Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.516

ПЛОСКАЯ СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ, ВОЗНИКАЮЩАЯ ОТ ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

А. С. Кабанов

(Москва)

Получено решение линейной системы уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска для плоского движения вязкого, теплопроводящего газа, вызванного локальным источником тепла, в устойчиво стратифицированной среде при заданной постоянной горизонтальной скорости натекающего потока. Если тепловыделение не зависит от времени, то при устойчивой стратификации можно выделить асимптотически стационарную область течения. Объясняется механизм формирования области стационарного течения. Выявлена особенность течения, связанная с появлением вниз по потоку от источника тепла стационарных волн, длина которых зависит как от скорости натекающего потока, так и от вертикального градиента температуры. Показано, что в области, удаленной от источника, течение нестационарно и со временем расслаивается на ряд вихрей, число которых зависит от времени развития конвекции и вертикального градиента температуры.

В устойчиво стратифицированной среде вертикальный градиент плотности подавляет вертикальные движения, что вносит в рассматриваемую задачу внутренний масштаб, определяемый характерным размером области, в пределах которой имеет место индуцированный сток тепла, вызванный восходящим движением и градиентом температуры невозмущенной среды. В пределах этой области влияние вязкости на конвекцию становится существенным, если число Рейнольдса, определенное внутренним масштабом, не слишком велико. Тогда течение во всем пространстве может быть описано системой уравнений свободной конвекции.

1. Постановка задачи и ее решение. Пусть в пространстве действует источник тепла бесконечной длины в направлении, перпендикулярном плоскости (x, z) (ось oz направлена по вертикали). Источник характеризуется количеством тепла $Q(x, z, t)$, выделяющегося за единицу времени t в объеме единичной площади в плоскости (x, z) и единичной длины в направлении оси oy. Рассматриваются источники тепла, для которых

$$Q_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q\,dx\,dz \neq \infty \tag{1.1}$$

Вдали от источника тепла происходит движение вязкого теплопроводного газа, имеющее постоянную скорость u, направленную вдоль оси ox.

Рассмотрим плоское возмущение движения газа, вызванное указанным источником тепла. Движение вязкого теплопроводного газа будем описывать системой уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+u\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+u\frac{\partial v_z}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z+g\frac{T'}{T_0}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+u\frac{\partial T'}{\partial x}+(\gamma_a-\gamma)v_z-\chi\Delta T'=\frac{Q}{\rho c_p}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

Здесь $u+v_x$ и v_z — компоненты скорости возмущенного потока, p — давление в среде за вычетом гидростатического, $T'=T-T_0$, T — температура, $T_0(z)$ — температура невозмущенной среды, ρ — плотность газа, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент температуропроводности, $\gamma_a=g/c_p$, g — ускорение силы тяжести, c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, $\gamma=-\partial T_0/\partial z$.

Примем $\nu=\chi=\mathrm{const}$. Устойчиво стратифицированной среде соответствует $\gamma=\mathrm{const}<\gamma_a$.

Перейдем в систему координат (x'', z), движущуюся вдоль оси x с постоянной скоростью u. Тогда в системе уравнений свободной конвекции будут отсутствовать слагаемые, содержащие u, а источник будет иметь координаты $Q(x+ut, z, t)$ (штрихи у переменной x далее опускаем). В подвижной системе отсчета течение носит локальный характер и затухает на бесконечности; это означает, что потенциальная часть течения отсутствует [1], а система уравнений конвекции вместе с краевыми условиями приводит к задаче

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}-\nu\Delta\Delta\psi=\frac{g}{T_0}\frac{\partial T'}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}-\nu\Delta T'+(\gamma_a-\gamma)\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{Q}{\rho c_p}$$

$$t=0,\ \psi=0,\ T'=0;\ x=z=\pm\infty,\ \psi=0,\quad T'=0$$

Здесь ψ — функция тока возмущения поля скоростей.

Разрешим систему уравнений (1.3) относительно ψ. Действуя на первое уравнение (1.3) оператором $\partial/\partial t-\nu\Delta$, а на второе оператором $gT_0^{-1}\,\partial/\partial x$ и складывая полученные выражения, придем к задаче

$$L\psi=g(\rho c_pT_0)^{-1}\partial Q/\partial x \tag{1.4}$$

$$t=0,\quad \psi=0,\quad x=z=\pm\infty,\ \psi=0$$

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\frac{\partial}{\partial t}\Delta-\nu\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\Delta\Delta+\omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\omega_0^2=(\gamma_a-\gamma)g/T_0=\mathrm{const}>0$$

Решение задачи (1.4) представим в виде

$$\psi=\frac{g}{\rho c_pT_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{t}G(x,z,t\,|\,x',z',t')\frac{\partial}{\partial x'}Q(x'+ut',z',t')\,dt'\,dx'\,dz' \tag{1.5}$$

Задача для функции Грина G имеет вид

$$LG=\delta(x-x')\,\delta(z-z')\delta(t-t') \tag{1.6}$$

$$t=0,\quad G=0;\quad x=z=\pm\infty,\quad G=0$$

Для решения (1.6) используем формальное операторное уравнение [2], эквивалентное уравнению (1.6)

$$G = L^{-1}\delta(x - x')\,\delta(z - z')\,\delta(t - t') + G_0 \tag{1.7}$$

Здесь L^{-1} — оператор, обратный оператору L, G_0 — несингулярная часть функции Грина, которая является решением однородного уравнения $LG_0 = 0$ и определяется с учетом граничных условий для функции G.

Представляя δ-функции в виде разложения Фурье и учитывая (1.4), (1.5) и (1.7), находим

$$\psi = \frac{g}{\rho c_p T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t Q(x' + ut', z', t')\, G^*(x, z, t \mid x', z', t')\, dt'\, dx'\, dz' \tag{1.8}$$

$$G^* = -\frac{\partial G}{\partial x'} = -$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{ik_1 \exp[i\omega(t - t') + ik_1(x - x') + ik_2(z - z')]}{K(\omega, k_1, k_2)}\, d\omega\, dk_1\, dk_2$$

$$K = (k_1^2 + k_2^2)\,\{[i\omega + \nu(k_1^2 + k_2^2)]^2 + \omega_0^2 k_1^2 / (k_1^2 + k_2^2)\}$$

При выводе (1.8) предполагалось

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t Q\, \frac{\partial G_0}{\partial x'}\, dx'\, dz'\, dt' = 0 \tag{1.9}$$

Как показано ниже, предположение (1.9) следует из условия обращения в нуль компонент возмущений скорости вдали от источника тепла.

Проводя в G^* (1.8) интегрирование по ω, переходя к полярной системе координат (k, φ), согласно соотношениям $k_1 = k\cos\varphi$, $k_2 = k\sin\varphi$ и интегрируя по k, получим

$$G^* = -\frac{i}{8\omega_0[\pi^3\nu(t - t')]^{1/2}} \int_0^{2\pi} \Lambda[\zeta(\varphi)]\, \sin[\omega_0(t - t')\cos\varphi]\, d\varphi \tag{1.10}$$

$$\Lambda(\zeta) = \exp(-\zeta^2)[1 - \operatorname{erf}(-i\zeta)]$$

$$\zeta(x, x', z, z', t, t'; \varphi) = \frac{(x - x')\cos\varphi + (z - z')\sin\varphi}{[4\nu(t - t')]^{1/2}}$$

Выражение (1.10) вместе с (1.8) дает решение задачи. Переходя в неподвижную систему отсчета, для вертикальной составляющей скорости получим

$$v_z = \frac{g}{8\pi^2 \rho c_p T_0 \omega_0 \nu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{t - t'}\, Q(x' + ut', z', t')\, I\, dt'\, dx'\, dz' \tag{1.11}$$

$$I = \int_0^{2\pi} (1 + i\pi^{1/2}\zeta^*)\, \Lambda(\zeta^*) \cos\varphi \sin[\omega_0(t - t')\cos\varphi]\, d\varphi$$

$$\zeta^* \equiv \zeta(x, x' + ut, z, z', t, t'; \varphi)$$

2. Структура течения вдали от источника тепла. Выберем начало координат в области, где $Q \neq 0$. При описании течения на расстояниях $R = (x^2 + z^2)^{1/2}$, значительно превышающих характерный размер области тепловыделения, заменим Q в (1.8) и (1.11) выражением $Q = Q_0(t')\delta(z')\times \times\delta(x' + ut')$, где Q_0 определяется согласно (1.1). Положим также $R \gg \gg (\nu t)^{1/2}$, $R \gg ut$. Тем самым рассматривается область пространства, куда практически не доходит тепло от источника. Здесь течение создается как полем давления, формируемым всей областью течения, так и возмущениями температуры T', порождаемыми индуцированным источником $(\gamma_a - -\gamma)v_z$. Влияние вязкости и температуропроводности в этой области пренебрежимо мало [3], следовательно, величину ζ^* можно считать большой, что позволяет записать выражение для функции тока, согласно (1.8), (1.10), в неподвижной системе отсчета в виде

$$\psi = -uz + \frac{g}{2\pi\rho c_p T_0}\frac{x}{R^2}\int_0^t Q_0(t')\int_0^{t'}\cos[\Omega(t'-\tau)]J_0(\omega_0\tau)\,d\tau\,dt' \tag{2.1}$$

Здесь J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $\Omega = = \omega_0 z / R$.

Из (2.1) следует, что при $R \to \infty$ конвективные движения затухают. Это подтверждает применимость условия (1.9).

Если Q_0 не зависит от времени, тогда при $t\Omega \gg 1$ из (2.1) следует пространственно-временное асимптотическое решение задачи

$$\psi = -uz + (2\pi\rho c_p T_0\omega_0^2)^{-1} g Q_0 \sin(\Omega t) / z \tag{2.2}$$

Отметим, что формула (2.2) непригодна на вертикальной оси ($x = 0$), а также вблизи горизонтальной оси, где $\Omega \to 0$, и неравенство $t\Omega \gg 1$ невыполнимо.

Асимптотические формулы (2.1) и (2.2) указывают на то, что на больших расстояниях от источника в среде возникают нестационарные колебания. Здесь величины ψ, v_z, v_x и T' в каждой точке пространства изменяются с частотой Ω, зависящей от координат. Зависимость частоты Ω от координат приводит со временем к расслоению течения на ряд вихрей, число которых через каждый промежуток времени, равный $\tau = 2\pi / \omega_0$, увеличивается в одном квадранте плоскости на единицу. Вихрем здесь названа односвязная область течения, в пределах которой завихренность имеет один и тот же знак. На границах вихря $\psi = 0$. Каждый отдельный вихрь граничит с вихрями, имеющими противоположный знак завихренности. Это свойство течения описано в [4], где рассматривалась задача о развитии конвекции в устойчиво стратифицированной атмосфере от локального возмущения температуры. Колебательный характер течения обязан устойчивой стратификации ($\omega_0 > 0$). При нейтральной стратификации ($\omega_0 = 0$) колебания отсутствуют. В рассматриваемой области, как следует из (2.1), при $\omega_0 = 0$ решение имеет вид

$$\psi = -uz + (2\pi\rho c_p T_0)^{-1} gxR^{-2}\int_0^t t' Q_0(t')\,dt' \tag{2.3}$$

Сравнение (2.2) и (2.3) приводит к выводу, что при устойчивой и нейтральной стратификациях характер затухания амплитуды скорости при $R \to \infty$ одинаков, т. е. $\vec{v} \sim R^{-2}$.

Асимптотические решения (2.1) и (2.2) справедливы и для нелинейной конвекции. Однако условия их применимости будут более жесткими, зависящими от индуцированной конвективной скорости.

3. Область стационарного течения. Рассмотрим случай, когда источник $Q = Q_0\delta(z')\delta(x' + ut')$ является линейным и стационарным. Из (1.11) следует, что в области $R \ll \sqrt{\nu t}$ при $u = 0$, $\omega_0 \neq 0$ и $\omega_0 t \to \infty$ имеет место монотонное уменьшение скорости с увеличением расстояния от начала координат. Это означает, что существует стационарное, затухающее на бесконечности решение плоской задачи. Возможность появления области стационарного течения связана с тем, что в третьем уравнении (1.1) слагаемое $(\gamma_a - \gamma)\, v_z$ можно рассматривать как индуцированный сток тепла. Характерный размер в области, где индуцированный сток тепла оказывает компенсирующее действие на источник Q, определяется из равенства

$$(3.1) \qquad (\gamma_a - \gamma)\, v_z{}^* l^2 = Q_0 / (\rho c_p)$$

В качестве $v_z{}^*$ в (3.1) следует выбрать значение вертикальной скорости в области, где действует источник Q. Положив $u^2 / (4\nu\omega_0) \ll 1$, из (1.11) находим, что в точке $x = z = 0$

$$(3.2) \qquad v_z = (4\pi\rho c_p\nu)^{-1}[T_0(\gamma_a - \gamma)]^{-1/2} g^{1/2} Q_0 [1 - u^2 / (4\nu\omega_0)]$$

Из (3.2) следует, что натекающий поток стабилизирует конвекцию. Из (3.1) и (3.2) находим

$$(3.3) \qquad l = \{4\pi\nu / [\omega_0(1 - u^2 / (4\nu\omega_0))]\}^{1/2}$$

Выражения (3.2) и (3.3) определяют предел применимости линейного приближения при $R_1 = v_z\, l / \nu \ll 1$. Из последнего условия и (3.2), (3.3) следует, что линейное приближение применимо при

$$Q_0 \ll (4\pi)^{1/2} \rho c_p \nu^{3/2} (\gamma_a - \gamma) \;/\; [1 - u^2 / (4\nu\, \omega_0)]^{1/2}$$

При произвольных значениях параметра $\beta = u / (2\sqrt{\nu\omega_0})$ выражение для вертикальной скорости в начале координат запишем, согласно (1.11), в виде

$$v_z(\beta) = v_z(0)\, v_z{}^*(\beta)$$

$$v_z{}^*(\beta) = 1 - \frac{iu\beta}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{2\pi} \Lambda(\tau) \cos^2\varphi \sin(t\cos\varphi)\, d\varphi\, dt$$

$$\tau = -\beta\sqrt{t}\cos\varphi$$

Здесь $v_z(0)$ определяется, согласно (3.2), при $\beta = 0$. Функция $v_z{}^*(\beta)$ хорошо аппроксимируется выражением $v_z{}^*(\beta) = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg}(\beta^{-2})$; эта зависимость определяет характер стабилизирующего воздействия натекающего потока на конвекцию. С ростом β величина $v_z{}^*$ монотонно уменьшается от максимального значения, равного единице, до нуля.

Взаимодействие натекающего потока с индуцированной конвекцией аналогично натеканию потока со скоростью u на препятствие, которым является возмущенная теплом конвективная зона. Тогда при $u \neq 0$

в области $l \ll R \ll \sqrt{\nu t}$ возможно образование не зависящего от вязкости стационарного течения. Характерный размер препятствия равен l, тогда толщина L «пограничного слоя», где существенна вязкость, равна $(\nu l / u)^{1/2}$. Данная оценка тем точнее, чем больше $R_2 = ul / \nu$. Структуру течения при $R \gg L$ получим, полагая в (1.8), (1.10) $Q = Q_0\delta(z')\delta(x' + ut')$, устремляя t в бесконечность и используя для функции erf (y) асимптотическое представление при больших y. Тогда из (1.8), (1.10) следует

$$\psi = -uz + \frac{gQ_0}{(2\pi)^2\rho c_p T_0\omega_0 u}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\omega_0 u^{-1}x'\cos\varphi)}{(x-x')\cos\varphi + z\sin\varphi}\,d\varphi\,dx'$$

Вертикальная составляющая скорости при $z = 0$ определяется выражением

$$v_z(x) = \frac{gQ_0}{2\pi\rho c_p T_0 u^2}\int_0^\infty \frac{J_0(\omega_0 u^{-1}x')}{x - x'}\,dx' \tag{3.4}$$

Интеграл в (3.4) понимается в смысле главного значения. При $x < 0$, $\omega_0 u^{-1} | x | \gg 1$ из (3.4) следует

$$\begin{aligned} v_z(x) &= (4\rho c_p T_0 u^2)^{-1} gQ_0[N_0(\omega_0 u^{-1} | x |) - H_0(\omega_0 u^{-1} | x |)] \approx \\ &\approx -(2\pi\rho c_p T_0 u\omega_0)^{-1} gQ_0 / | x | + O[(\omega_0 u^{-1}x)^{-3}] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь N_0 и H_0 — соответственно функции Неймана и Струве. Для положительных x из (3.4) находим

$$\begin{aligned} v_z(x) &= (4\rho c_p T_0 u^2)^{-1} gQ_0[N_0(\omega_0 u^{-1}x) + H_0(\omega_0 u^{-1}x)] \approx \\ &\approx (2\sqrt{\pi}\rho c_p T_0 u\omega_0)^{-1}\sqrt{u / (\omega_0 x)}\sin(\omega_0 u^{-1}x - \pi/4) + \\ &+ O[(\omega_0 u^{-1}x)^{-1}] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Согласно (3.5) и (3.6), характер затухания амплитуды вертикальной скорости в области течения вверх по потоку ($v_z \sim | x |^{-1}$, $x < 0$) и вниз по потоку ($v_z \sim x^{-1/2}$, $x > 0$) существенно различен вследствие того, что натекающий поток переносит тепло в область $x > 0$. Свойства конвекции вверх по потоку и вниз по потоку качественно различаются. При $\omega_0 u^{-1}x \gg 1$ вниз по потоку, согласно (3.6), образуются стационарные волны длиной $\lambda = 2\pi u / \omega_0$, амплитуда которых при $x \to \infty$ затухает по закону $x^{-1/2}$. Вверх по потоку волны не образуются. Здесь происходит опускание газа, компенсирующее направленное вверх движение (3.2) в области, где сосредоточено тепло от источника. Стационарные волны более выражены в первом квадранте плоскости (x, z).

В заключение отметим, что при нейтральной стратификации ($\omega_0 = 0$) линейное решение (1.11) расходится при $t \to \infty$. При $u = 0$ в точке $x = z = 0$ имеем

$$v_z(t) = At / \nu, \quad A = gQ_0 / (8\pi\rho c_p T_0) \tag{3.7}$$

Решение (3.7) пригодно пока $R_3 = v_z(t)\sqrt{t / \nu} \ll 1$. Условие $R_3 \ll 1$ дает ограничение на время ($0 \leqslant t \ll A^{-2/3}\nu$), в течение которого пригодно линейное решение

(3.7). Хотя натекающий поток (при $u \neq 0$) стабилизирует конвекцию, тем не менее при $\omega_0 = 0$ линейное приближение также дает расходящееся решение, а именно, при $t \gg 4\nu / u^2$ в точке $x = z = 0$ имеем

$$v_z(t, u) = 2A \{1 - \pi^{-1} \ln [u^2 t / (4\nu)]\}$$

Автор благодарит П. Н. Свиркунова за полезную критику и ценные замечания.

Поступила 24 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. *Иваненко Д., Соколов А.* Классическая теория поля. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. *Кабанов А. С.* Пространственное и временное асимптотические решения задачи о развитии кучевого облака. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 4.
4. *Кабанов А. С., Клыков А. Е.* Модель конвекции в атмосфере с облаком и численные эксперименты по воздействию на кучевое облако. Метеорология и гидрология, 1978, № 3.