Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 532.593

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. Заволженский, А. Х. Терсков

(Ростов-на-Дону)

Для малых чисел Рейнольдса получено приближенное решение линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса при граничных условиях, соответствующих случаю, когда у поверхности тяжелой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины действуют осесимметричные нормальные и радиальные касательные напряжения. В начальный момент времени задается осесимметричная форма свободной поверхности. Для стационарных возмущений у поверхности получены интегральные представления ее формы, справедливые при больших временах. Установлено существование круговых волн, которые распространяются не только от источника возмущений, но и по направлению к нему. Рассмотрены примеры. Исследованы также волны, бегущие от источника возмущений. Установлено, что главная часть этих волн одна и та же для малых и больших (см., например, [1–3]) значений числа Рейнольдса.

1. Допустим, что тяжелая несжимаемая вязкая жидкость до момента времени $t' = 0$ покоилась в полупространстве $z' \leqslant 0$ (ось z' направлена против силы тяжести). Пусть при $t' \geqslant 0$ на свободной поверхности начинают действовать касательные τ' и нормальные f' напряжения, а форма поверхности в момент $t' = 0$ принимает в неподвижной цилиндрической системе координат (r', θ, z'), начало которой лежит на невозмущенной свободной поверхности $z' = 0$, вид $z' = h'(r')$. Предположим, что все возмущения осесимметричны, причем проекция касательного напряжения на трансверсальную ось равна нулю. Тогда $\tau' = \tau'(r', t')$, $f' = f'(r', t')$. При малых числах Рейнольдса осесимметричная задача о движении жидкости, вызванном малыми возмущениями на ее поверхности, состоит в определении скорости $\mathbf{v}' = \{v_r', v_z'\}$ и гидродинамического давления p' как функций r', z', t' из линеаризованных уравнений Навье — Стокса

$$(1.1)\qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + \nabla q' = \nu \nabla^2 \mathbf{v}', \quad \nabla \mathbf{v}' = 0, \quad q' = \frac{p'}{\rho} + gz'$$

при заданных на неизвестной свободной поверхности $z' = \zeta'(r', t')$ нормальных и касательных составляющих тензора напряжений

$$(1.2)\qquad \rho g \zeta' - \rho q' + 2\mu \frac{\partial v_z'}{\partial z'}\bigg|_{z'=0} = -f'(r', t'), \quad \mu\left(\frac{\partial v_z'}{\partial r'} + \frac{\partial v_r'}{\partial z'}\right)_{z'=0} = -\tau'(r', t')$$

(в линейной постановке условия (1.2) выставляются на невозмущенной поверхности $z' = 0$) и при условии обращения в нуль искомых функций при $z' \to -\infty$. В начальный момент времени

$$(1.3)\qquad t' = 0, \quad \mathbf{v}' = 0, \quad \zeta' = h'(r')$$

Функция ζ' удовлетворяет уравнению

(1.4) $\quad \partial\zeta'/\partial t' = v_z' \,|_{z'=0}$

Введем безразмерные переменные (L — характерная длина, определяемая из явного вида возмущений на поверхности).

$$R = \frac{gL^3}{\nu^2}, \quad r = r'\sqrt[3]{\frac{g}{\nu^2 R}}, \quad t = t'\sqrt[3]{\frac{g^2}{\nu R^2}}, \quad \mathrm{v} = \frac{\nu \mathrm{v}'}{gL^2}, \quad h = \frac{h'}{RL}$$

$$\zeta = \frac{\zeta'}{RL}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad q = \frac{q'}{gL}, \quad f = \frac{f'}{\rho g L}, \quad \tau = \frac{\tau'}{\rho g L}$$

Замена переменных

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rw)}{\partial r}, \quad q = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

приводит задачу (1.1) — (1.4) в безразмерной форме к виду

(1.5) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

(1.6) $$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

(1.7) $$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (zw)}{\partial r}\Big|_{z=0}$$

(1.8) $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 (rw)}{\partial r\partial z}\Big|_{z=0} + R\zeta = -f(r, t)$$

(1.9) $$\frac{\partial w}{\partial t} - 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}\right) - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}\Big|_{z=0} = \tau(r, t)$$

$$t = 0, \quad \zeta = h(r), \quad \varphi = w = 0$$

Применим к этим соотношениям преобразование Лапласа — Карсона по t. Затем к (1.5), (1.7) и (1.8) применим преобразование Ханкеля нулевого порядка, а к (1.6) и (1.9) — преобразование Ханкеля первого порядка по r. Для обозначения изображений по Ханкелю используем нижний индекс, равный порядку преобразования. В результате для изображений получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых условий с постоянными коэффициентами. Из этой системы определяются изображения в классе функций, исчезающих при $z \to -\infty$. Осуществляя переход к оригиналам, найдем выражение для вида свободной поверхности. Для больших значений времени t в случае стационарных возмущений на поверхности, когда при $t \geqslant 0$ $f = f(r)$, $\tau = \tau(r)$, форма свободной поверхности принимает вид

(1.10) $$\zeta(r, t) = \zeta_h(r, t) + \zeta_n(r, t) + \zeta_\tau(r, t)$$

$$\zeta_h = \int_0^\infty s h_0(s) H(t, s) J_0(rs)\, ds, \quad \zeta_n = -\int_0^\infty s f_0(s) \chi(t, s) J_0(rs)\, ds$$

$$\zeta_\tau = \int_0^\infty s\tau_1(s)\, \Psi(t, s)\, J_0(rs)\, ds$$

$$(f_0, h_0) = \int_0^\infty r\,[f(r), h(r)]\, J_0(rs)\, dr, \quad \tau_1 = \int_0^\infty r\tau(r) J_1(rs)\, dr$$

$$H(t, s) \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\Delta - Rs}{\Delta}, \quad \Psi(t, s) \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{s(\sigma + 2s^2 - 2s\sqrt{\sigma + s^2})}{\sigma\Delta}$$

$$\Delta = (\sigma + 2s^2)^2 - 4s^3\sqrt{\sigma + s^2} + Rs$$

$$\chi(t, s) = \int_0^\infty \omega(\tau, s)d\tau - \int_t^\infty \omega(\tau, s)\,d\tau \tag{1.11}$$

$$\omega(t, s) \div \Omega(\sigma, s) = \frac{\sigma s}{\Delta} = s\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{F_q'(q_k, s)} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma + s^2} - sq_k}$$

Здесь σ — параметр преобразования по Лапласу — Карсону, $q_k = q_k(s)$ — корни многочлена

$$F(q, s) = s^3(q^4 + 2q^2 - 4q + 1) + R \tag{1.12}$$

Многочлен (1.12) в полуплоскости $\operatorname{Re} q > 0$ при $0 < s < a \approx 1.2R^{1/4}$ имеет два комплексно-сопряженных корня $q_2 = \bar{q}_1$, а при $a < s < \infty$ — два действительных корня $0.68 < q_1 < 1$ и $0.30 < q_2 < 0.63$. Из (1.12) следует

$$\operatorname{Re} q_k^2 < 1, \quad 0 \leqslant s < \infty, \quad k = 1,2,3,4 \tag{1.13}$$

2. Из (1.13) следует интегрируемость $\omega(t, s)$ при $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Тогда из (1.11) получим

$$\int_0^\infty \omega(t, s)\,dt = \lim_{\sigma\to 0} \frac{\Omega(\sigma, s)}{\sigma} = \frac{1}{R}$$

Из (1.10), (1.11), применяя интегральную формулу Фурье — Бесселя, найдем

$$\zeta_n = -\frac{f(r)}{R} + \int_0^\infty \int_t^\infty s f_0(s)\,\omega(\tau, s)\,J_0(rs)\,d\tau ds \tag{2.1}$$

Из второго соотношения (1.11) следует

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{F_q'(q_k, s)} = 0 \tag{2.2}$$

Тогда явное выражение $\omega(t, s)$ получим из второго соотношения (1.11) и (2.2) с учетом обращения [4] в виде

$$\omega(t, s) = s^2 \sum_{k=1}^{4} \frac{q_k \operatorname{erfc}(-sq_k\sqrt{t}) \exp[s^2(q_k^2 - 1)t]}{F_q'(q_k, s)} \tag{2.3}$$

Используя для больших времен t асимптотические выражения [5] функции ошибок, получим для (2.3) с учетом (2.2) и (1.12) выражение

$$\omega(t, s) = \frac{1}{2s} \sum_{\operatorname{Re} q_k > 0} \frac{q_k \exp[s^2(q_k^2 - 1)t]}{q_k^3 + q_k - 1} + O(t^{-3/2}e^{-s^2 t}) \tag{2.4}$$

Из (2.1) и (2.4) получим

$$t \to \infty, \quad \zeta_n = -\frac{f(r)}{R} + \zeta_n^{(1)}(r, t) + \zeta_n^{(2)}(r, t) \tag{2.5}$$

$$\zeta_n^{(1)} = -\operatorname{Re} \int_0^a \frac{q_1 \exp[s^2(q_1^2 - 1)t]}{s^2(q_1^2 - 1)(q_1^3 + q_1 - 1)} f_0(s)\,J_0(rs)\,ds$$

$$\zeta_n^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{q_1 \exp[s^2(q_1^2 - 1)t]}{s^2(q_1^2 - 1)(q_1^3 + q_1 - 1)} f_0(s)\,J_0(rs)\,ds$$

Из (1.12) находим

$$q_1 = s^{-3/4}R^{1/4}e^{i\pi/4} - {}^1/_2 s^{3/4}R^{-1/4}e^{-i\pi/4} + O(s), \quad s \to 0 \tag{2.6}$$

$$q_1 = 1 - {}^1/_4 Rs^{-3}[1 + O(s^{-1})], \quad s \to 0$$

Отсюда и из (1.13) следует, что основной вклад в асимптотическое разложение интегралов (2.5) при $t \to \infty$ дают окрестности нулевых значений показателей экспоненты. В первом интеграле (2.5) эта окрестность совпадает с окрестностью точки $s = 0$. Соответствующий вклад получим, заменяя интервал интегрирования малым отрезком $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$, учитывая, что в этой области, в силу (2.6)

$$s^2(q_1^2 - 1) \sim -2s^2 + i\sqrt{Rs}, \quad \frac{q_1}{s^2(q_1^2-1)(q_1^3+q_1-1)} \sim -\frac{s}{R}, s \to 0$$

и интегрируя от 0 до ∞. Тогда

$$\zeta_n^{(1)} = \frac{1}{R}\int_0^\infty se^{-2s^2t}f_0(s)J_0(rs)\cos(t\sqrt{Rs})\,ds, \quad t \to \infty \tag{2.7}$$

Основной вклад в асимптотическое разложение второго интеграла (2.5) при $t \to \infty$ дает окрестность бесконечно удаленной точки. В силу (2.6) имеем

$$s^2(q_1^2 - 1) \sim -\frac{R}{2s}, \quad \frac{q_1}{s^2(q_1^2-1)(q_1^3+q_1-1)} \sim -\frac{2s}{R}, \quad s \to \infty$$

Следовательно

$$\zeta_n^{(2)} = \frac{1}{R}\int_0^\infty s\exp\left[\frac{-Rt}{(2s)}\right]f_0(s)J_0(rs)\,ds, \ t \to \infty \tag{2.8}$$

Формулы (2.5), (2.7) и (2.8) описывают асимптотическое поведение возмущений на поверхности, вызванных стационарными нормальными давлениями. Аналогично, из (1.10) получим интегральные представления формы свободной поверхности за счет начального ее возвышения в виде

$$\zeta_h = \zeta_h^{(1)}(r, t) + \zeta_h^{(2)}(r, t), \quad t \to \infty \tag{2.9}$$

$$\zeta_h^{(1)} = \int_0^\infty se^{-2s^2t}h_0(s)J_0(rs)\cos(t\sqrt{Rs})\,ds$$

$$\zeta_h^{(2)} = \int_0^\infty s\exp\left[\frac{-Rt}{2s}\right]h_0(s)J_0(rs)\,ds$$

При действии на поверхность стационарных радиальных касательных напряжений

$$\zeta_\tau = \zeta_\tau^{(1)}(r, t) + \zeta_\tau^{(2)}(r, t), \quad t \to \infty \tag{2.10}$$

$$\zeta_\tau^{(1)} = -\frac{1}{R}\int_0^\infty se^{-2s^2t}\tau_1(s)J_0(rs)\cos(t\sqrt{Rs})\,ds$$

$$\zeta_\tau^{(2)} = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{\tau_1(s)}{s^2}\exp\left[\frac{-Rt}{2s}\right]J_0(rs)\,ds$$

3. Рассмотрим теперь ряд конкретных примеров.

1°. Асимптотическое поведение поверхности жидкости, из которой при $t' = 0$ удален цилиндр радиуса a', погруженный на глубину h'.

В безразмерных переменных начальная форма свободной поверхности имеет вид

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad h(r) = -h; \quad r > a, \ h(r) = 0 \tag{3.1}$$

$$V' = \pi a'^2 h', \quad L = V'^{1/3}, \quad a = a'(g\nu^{-2}R^{-1})^{1/3}$$

$$h = h' / (RL), \quad R = g\nu^{-2}V'$$

Здесь V' — объем жидкости, вытесненной цилиндром в начальный момент.

Из (3.1) и (1.10) получим

$$h_0(s) = -ahJ_1(as) / s \tag{3.2}$$

Формула (2.9) при этом принимает вид

$$\zeta_h^{(2)} = -ah\int_0^\infty \exp\left[-\frac{Rt}{2s}\right] J_1(as) J_0(rs)\, ds \tag{3.3}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение поверхности жидкости при больших a и r. Окрестность точки $s = 0$ в (3.3) в этом случае несущественна. Поэтому, применяя асимптотические формулы для функций Бесселя при больших значениях аргумента, получим

$$\zeta_h^{(2)} = -2\pi^{-1}ha^{1/2}r^{-1/2}\{\operatorname{sgn}(r-a)\operatorname{Im} K_0[e^{i\pi/4}(2Rt|r-a|)^{1/2}] - \tag{3.4}$$
$$- \operatorname{Re} K_0[e^{i\pi/4}(2R\,t\,(r+a))^{1/2}]\}$$

Здесь K_0 — функция Макдональда.

При $r \gg a$, применяя асимптотические формулы для функций Макдональда, найдем

$$\zeta_h^{(2)} = h[2a^2 / (\pi^2r^2\rho^*)]^{1/4}\, \xi(r, t) \tag{3.5}$$

$$\xi(r, t) = \exp(-\rho^{*1/2}) \sin(\pi/8 + \rho^{*1/2}) \operatorname{sgn}(r-a)$$

$$\rho^* = R\,|r-a|\,t$$

В окрестности окружности $r = a$ формула (3.4) принимает вид

$$\zeta_h^{(2)} = -2h\pi^{-1} \operatorname{sgn}(r-a) \operatorname{Im} K_0(e^{i\pi/4}\sqrt{2}\rho^*)$$

Следовательно, затухание колебаний жидкости происходит и в окрестности $r = a$. Если $2R\,|r-a|\,t \ll 1$, для малых z найдем

$$K_0(z) \sim \ln(2/z), \quad \zeta_h^{(2)} \sim {}^1/_2 h \operatorname{sgn}(r-a)$$

Следовательно, в этом случае высота свободной поверхности при переходе через окружность $r = a$ меняется скачком от значения $(-h/2)$ до $h/2$.

В окрестности $r = 0$ формула (3.3) дает

$$\zeta_h^{(2)} = -ah\int_0^\infty \exp\left[-\frac{Rt}{2s}\right] J_1(as)\, ds$$

Заменяя здесь J_1 асимптотикой при больших значениях аргумента, получим

$$\zeta_h^{(2)} = -h\sqrt{2}\exp(-\sqrt{aRt})\cos\sqrt{aRt}$$

Из (3.5) следует, что в рассматриваемом случае возмущения $\zeta_h^{(2)}$ представляют собой волны, распространяющиеся со скоростью $(a' - r')\,/\,t'$ по направлению к источнику — окружности $r' = a'$. С течением времени возмущения затухают при любом r'. Наиболее медленное затухание происходит в окрестности источника возмущения $r' = a'$.

Аналогичными возмущениями являются волны $\zeta_n^{(2)}$ и $\zeta_\tau^{(2)}$ (см. (2.8) и (2.10)), также распространяющиеся по направлению к своим источникам. Возможность существования волн такого рода обнаружена здесь впервые.

При исследовании возмущений (2.9) положим $a \to 0$, $h \to \infty$, так что $V = \pi a^2 h = \mathrm{const}$. Формула (3.2) принимает вид $h_0(s) = -V\,/\,(2\pi)$, следовательно

$$\zeta_h^{(1)} = -\frac{V}{2\pi}\int_0^\infty s\exp(-2s^2t)\,J_0(rs)\cos(t\sqrt{\pi s})\,ds \tag{3.6}$$

Если $r \sim 0$, то $J_0(rs) \sim 1$, и

$$\zeta_h^{(1)} = -\frac{V}{\pi t}\int_0^\infty x^3 e^{-2x^4}\cos\omega x\,dx = -\frac{6V2^{1/4}}{\pi t\omega^4}\left[1 + O(\omega^{-4})\right] \tag{3.7}$$

$$\omega = g^{1/2}t'^{3/4}\nu^{-1/4}$$

Следовательно, вблизи начала координат возмущения $\zeta_h^{(1)}$ колебательного характера не имеют.

Заменяя при $r \to \infty$ функцию Бесселя соответствующей асимптотикой, получим

$$t \to \infty, \quad \zeta_h^{(1)} = -2^{-1/2}\pi^{-3/2}Vt^{-3/4}r^{-1/2}\,\mathrm{Re}\,(j_1 + j_2) \tag{3.8}$$

$$j_k = \int_0^\infty x^2\exp(-2x^4)\exp\{i[\pm\omega(\eta x^2 \mp x) + \pi/4]\}\,dx$$

$$\eta = r'\nu^{-1/4}g^{-1/2}t'^{-5/4}; \quad k = 1, 2$$

Здесь знак плюс соответствует $k = 1$, минус — $k = 2$.

Асимптотическую формулу для j_1 при $\omega \to \infty$ получим методом стационарной фазы [6] в виде

$$r \to \infty, \quad \eta \ll \omega, \quad j_1 \sim -\frac{V\exp[-1/(8\eta^4)]\cos[\omega/(4\eta)]}{2^{5/2}\pi\eta^{5/2}\omega^{1/2}r^{1/2}t^{3/4}} \tag{3.9}$$

Функция в показателе осциллирующей экспоненты в j_2 не имеет стационарных точек при $x > 0$. Тогда оценка j_2 принимает вид

$$j_2 = O(\omega^{-3}r^{-1/2}t^{-3/4}) \tag{3.10}$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что при независимых r и t j_1 экспоненциально исчезает при $\omega \to \infty$. Тогда в (3.8) превалирует j_2. Если же r и t связаны условием $\eta(r, t) = \mathrm{const}$, то $j_1 = O(\omega^{-1/2}r^{-1/2}t^{-3/4})$. В этом случае j_1 превышает значение (3.10). Таким образом, возмущения $\zeta_h^{(1)}$ практически равны нулю всюду, за исключением области $\eta = \mathrm{const}$, где они совпадают с (3.9). В размерном виде с учетом (3.7) и (3.8) имеем

$$\zeta_h'^{(1)} \sim -\frac{gt'^2V'\sqrt{2}}{8\pi r'^3}\exp\left(-\frac{\nu t'^5 g^2}{8r'^4}\right)\cos\left(\frac{gt'^2}{4r'}\right) \tag{3.11}$$

Условие $\eta = \mathrm{const}$ означает, что от источника возмущений расходятся круговые волны (3.11) со скоростью $5r'\,/\,4t'$.

2°. Модель антициклона у поверхности жидкости. В этом случае касательные напряжения примем в виде $\tau'(r') = T'\delta(r' - a')$, где T' — работа радиальных касательных усилий на поверхности, отнесенная к площади их распространения.

Допустим, что $T' \to \infty$, $a' \to 0$, но работа $A' = \pi a'^2 T' = \text{const}$. Тогда формула (2.10) дает

$$\zeta_\tau'^{(1)} \sim -\frac{gA't'^4\sqrt{2}}{32\rho r'^5}\exp\left(-\frac{\nu g^2 t'^5}{8r'^4}\right)\cos\left(\frac{gt'^2}{4r'}\right)$$

3°. $f'(r') = f$ при $0 \leqslant r' \leqslant a'$, $f'(r') = 0$ при $r' > a'$.

Если $a' \to 0$, $f' \to \infty$, но $P' = \pi a'^2 f' = \text{const}$, то получим сосредоточенную силу, действующую по нормали на свободную поверхность. Из (2.7) в этом случае следует

$$\zeta_n'^{(1)} \sim \frac{P't'^2\sqrt{2}}{8\pi\rho r'^3}\exp\left(-\frac{\nu g^2 t'^5}{8r'^4}\right)\cos\left(\frac{gt'^2}{4r'}\right)$$

В заключение отметим, что выражение (3.11) с точностью до $O(R)$ совпадает с результатом, полученным в [1] исследованием точного решения задачи (1.1)—(1.4) при малых значениях параметра $\varepsilon = \nu g^{-1/2} L^{-3/2} = R^{-1/2}$. Это означает, что главная часть волны, бегущей от источника возмущений, одна и та же для малых и больших значений R. Иными словами, интегральные представления (2.7), (2.9) и (2.10), равно как и соответствующие им результаты [1], верны как для малых, так и для больших значений параметра $R = \varepsilon^{-2}$.

Поступила 27 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, «Наукова думка», 1976.
2. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной поверхностью. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. *Никитин А. К., Грунтфест Р. А.* К плоской задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., «Наука», 1964.
4. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.
6. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.