Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.55

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, В УСЛОВИИ ПОЛНОЙ НЕВЕСОМОСТИ

Нго Зуй Кан

(Воронеж)

В линейной постановке рассматривается задача о совместном движении твердого тела и вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей полость в теле, при условии полной невесомости.

Без учета поверхностного натяжения в условиях обычного тяготения эта задача изучена в [1–3]. В [4,5] рассмотрено вынужденное вращение вязкой жидкости, обладающей поверхностным натяжением.

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело, имеющее полость, частично заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, движется вокруг неподвижной точки O в условиях полной невесомости.

Медленное движение жидкости в полости описывается уравнениями Навье — Стокса, имеющими в системе координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с телом [2,3], вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор относительной скорости частиц жидкости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частиц жидкости относительно точки O, p — давление в жидкости, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, Ω — область, занимаемая жидкостью при равновесии.

Граничное условие на смоченной части стенки S полости имеет вид

$$\mathbf{u}=0 \quad \text{на} \quad S \tag{1.2}$$

Граничное условие на свободной поверхности жидкости в криволинейной системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3), выбранной таким образом, что точка $(\xi_1, \xi_2, 0)$ лежит на Γ_0, а координата ξ_3 отсчитывается по внешней нормали n к Γ_0, причем коэффициент Ламе $h_3 = 1$, запишем в форме [4]

$$\mathbf{u}_{1,3}+\mathbf{u}_{3,1}=\mathbf{u}_{2,3}+\mathbf{u}_{3,2}=0, \quad \int\limits_{\Gamma_0}\mathbf{u}_3\,d\Gamma=0 \tag{1.3}$$

$$p-2\rho\nu\frac{\partial\mathbf{u}_3}{\partial\xi_3}=\sigma B_1N, \quad \frac{\partial N}{\partial t}=u_3 \quad \text{на} \quad \Gamma_0$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, N — отклонение движущейся свободной поверхности от равновесной Γ_0, B_1 — дифференциальный оператор эллиптического типа

$$B_1 N = aN - \Delta_\Gamma N - \frac{1}{|\Gamma_0|}\int\limits_{\Gamma_0}(aN - \Delta_\Gamma N)\,d\Gamma$$

$$a = -(k_1^2 + k_2^2 + \sigma^{-1}\partial p_0/\partial n)$$

k_1, k_2 — главные кривизны поверхности Γ_0 жидкости при равновесии, Δ_Γ — оператор Лапласа — Бельтрами.

Как и в [4 5], предполагается, что свободная поверхность Γ_0 не имеет общих точек со смоченной поверхностью S полости и что состояние равновесия жидкости устойчиво, т. е. оператор B_1 положительно определен.

При условии полной невесомости ($\mathbf{g} = 0$) уравнение движения тела с жидкостью имеет вид [2,3]

$$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \rho\int\limits_\Omega \left[\mathbf{r}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right]d\Omega = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{J}$ — тензор момента инерции системы «тело + жидкость» относительно точки O, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

Исключая величину $\boldsymbol{\varepsilon}$ в уравнении (1.1) с помощью уравнения (1.4), получаем

$$\mathbf{r}\times\rho\mathbf{J}^{-1}\int\limits_\Omega\left[\mathbf{r}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right]d\Omega + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \tag{1.5}$$

Исследуем задачу (1.1) — (1.3), (1.5) об определении движения жидкости в совместном движении тела с жидкостью при начальных условиях

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad N(0) = N_0 \tag{1.6}$$

Ускорение тела определяется по известной скорости жидкости при помощи соотношения (1.4).

2. Сведение задачи к операторным уравнениям. Для исследования уравнений задачи введем рассмотренные в [6] функциональные пространства. Через $W_2^{1,0}(\Omega)$ обозначается замыкание в норме пространства С. Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$ совокупности всех соленоидальных вектор-функций $\mathbf{v}$ из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности поверхности S. Под $L_2^\circ(\Omega)$ понимаем пополнение $W_2^{1,0}(\Omega)$ по норме пространства $L_2(\Omega)$. Ортогональное дополнение к $L_2^\circ(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ будет замыканием потенциальных в Ω вектор-функций, равных нулю на Γ_0 (см., например, [5]). Отметим, что для вектор-функций из $L_2^\circ(\Omega)$ нормальная составляющая на S равна нулю.

Применяя метод, изложенный в [5,6], сведем второе уравнение (1.1) и уравнение (1.5) с условиями (1.2), (1.3) к двум операторным уравнениям в $L_2^\circ(\Omega)$ и $W_2^{-1/2}(\Gamma_0)$ вида

$$(I + B)\,d\mathbf{u}/dt + \nu A\mathbf{v} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nu\, d\varphi/dt + \sigma B_1\Gamma(\mathbf{v} + T\varphi) = 0$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + T\varphi, \quad B\mathbf{v} = \Pi\left\{\mathbf{r}\times\rho\mathbf{J}^{-1}\int\limits_\Omega[\mathbf{r}_1\times\mathbf{v}]\,d\Omega\right\}$$

Здесь B — оператор переноса [7], Π — оператор ортогонального проектирования пространства $L_2(\Omega)$ на подпространство $L_2^0(\Omega)$, Γ — оператор следа вектор-функции на свободной поверхности Γ_0, A и T — операторы, порожденные вспомогательными граничными задачами, описанными в [5, 6]. Оператор A является самосопряженным положительно-определенным оператором в $L_2^\circ(\Omega)$, имеющим вполне непрерывный обратный оператор класса σ_p ($\forall_p > 3/_2$), линейный оператор T непрерывно действует из $W_2^{-1/2}(\Gamma_0)$ в $W_2^{1,0}(\Omega)$.

Под $W_2^\gamma(\Gamma_0)$, как и в [5], будем понимать комплексное гильбертово пространство Соболева — Слободецкого с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_\gamma^2 = \sum_{|q|\leqslant|\gamma|}\|\mathbf{u}^{(q)}\|^2 + \sum_{|q|=[\gamma]}\int\limits_{\Gamma_0}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{|\mathbf{u}^{(q)}(x_1)-\mathbf{u}^{(q)}(x_2)|^2}{|x_1-x_2|^{2+2(\gamma+[\gamma])}}\,d\Gamma_{x_1}\,d\Gamma_{x_2}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0}\mathbf{u}\,d\Gamma = 0$$

Здесь $[\gamma]$ — целая часть γ, $W_2^{-\gamma}(\Gamma_0)$ — пространство, сопряженное с $W_2^\gamma(\Gamma_0)$ относительно скалярного произведения в пространстве $W_2^\circ(\Gamma_0) = L_2(\Gamma_0)\ominus\{1\}$.

3. Теорема существования и единственности решения. Из результатов работ [7, 8] следует, что оператор $(I+B)$ имеет самосопряженный положительно-определенный обратный $(I+B)^{-1}$.

Далее используются следующие леммы, доказанные в [5].

Лемма 1. Оператор $C = \Gamma T$ изотермически отображает $W_2^{-1/2}(\Gamma_0)$ на $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Его сужение на $W_2^\circ(\Gamma_0) = L_2(\Gamma_0)\ominus\{1\}$ есть самосопряженный положительный вполне непрерывный оператор, действующий в $W_2^\circ(\Gamma_0)$.

Лемма 2. Оператор $B_2 = C^{1/2}B_1C^{1/2}$ является неограниченным самосопряженным положительно-определенным в $W_2^\circ(\Gamma_0)$, причем $D(B_2) = W_2^1(\Gamma_0)$. Оператор B_2^{-1} принадлежит классу σ_q при $q > 3$.

Из леммы 1 следует, что оператор C имеет обратный оператор C^{-1}, являющийся самосопряженным положительно-определенным в $W_2^\circ(\Gamma_0)$. Непосредственная проверка показывает, что $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ есть область определения оператора $C^{-1/2}$.

Применяя к обеим частям уравнений (2.1) оператор $(I+B)^{-1}$, получим

$$\frac{ds}{dt} + \nu^{-1}\sigma^{1/2}A^{1/2}TC^{-1/2}\frac{d\eta}{dt} + \nu A^{1/2}(I+B)^{-1}A^{1/2}s = 0 \tag{3.1}$$

$$\nu^{-1}\sigma^{1/2}\frac{d\eta}{dt} + \nu^{-1}\sigma C^{1/2}B_1\Gamma(A^{-1/2}s + \nu^{-1}\sigma^{1/2}TC^{-1/2}\eta) = 0$$

$$s = A^{1/2}v,\quad \eta = \nu\sigma^{-1/2}C^{1/2}\varphi$$

Полученную систему будем рассматривать как одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в $L_2^\circ(\Omega)\oplus W_2^{1/2}(\Gamma_0)$, действуя на которое оператором

$$\begin{Vmatrix} I_\Omega & -A^{1/2}TC^{-1/2} \\ 0 & \nu\sigma^{-1/2}I_\Gamma \end{Vmatrix}$$

получим уравнение вида

$$(3.2)\qquad d\mathbf{x}/dt + M_1\mathbf{x} + K_1\mathbf{x} = 0$$

$$M_1 = \begin{Vmatrix} \nu A^{1/2}(I+B)^{-1}A^{1/2} & 0 \\ 0 & \nu^{-1}\sigma B_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Vmatrix} \mathbf{s} \\ \eta \end{Vmatrix}$$

$$K_1 = \begin{Vmatrix} -\nu^{-1}\sigma A^{1/2}TB_1\Gamma A^{-1/2} & -\nu^{-2}\sigma^{3/2}A^{1/2}TC^{-1/2}B_2 \\ \sigma^{1/2}C^{1/2}B_1\Gamma A^{-1/2} & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь I_Ω — единичный оператор в $L_2{}^\circ(\Omega)$, I_Γ — единичный оператор в $W_2{}^{1/2}(\Gamma_0)$.

Начальные условия переходят в условие

$$(3.3)\qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \operatorname{col}\{A^{1/2}\mathbf{v}_0,\ \sigma^{-1/2}\nu C^{1/2}\varphi_0\}, \qquad \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 + T\varphi_0$$

Теорема 1. Уравнение (3.2) является абстрактным параболическим уравнением в пространстве $L_2{}^\circ(\Omega) \oplus W_2{}^{1/2}(\Gamma_0)$. Задача Коши для него равномерно корректна. Соответствующая полугруппа аналитична в секторе, содержащем положительную ось. Задача (3.2) (3.3) имеет ослабленное решение при любом $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Оператор $A^{-1/2}(I+B)A^{-1/2}$ является ограниченным самосопряженным положительным оператором, поэтому обратный к нему оператор $A^{1/2}(I+B)^{-1}A^{1/2}$ является самосопряженным положительно-определенным в $L_2{}^\circ(\Omega)$. Из последнего соотношения (2.1) следует, что область значений оператора B совпадает с областью значений проекционного оператора Π на множестве линейных функций вида $\mathbf{r}\times\mathbf{l}$, поэтому в силу результатов [9] область значений B состоит из сколь угодно гладких функций. Отсюда вытекает, что область значений оператора $A^{-1/2}(I+B)A^{-1/2}$ состоит из функций $\mathbf{v}\in W_2{}^2(\Omega)$, тогда область определения оператора $A^{1/2}(I+B)^{-1}A^{1/2}$ есть $W_2{}^2(\Omega)\cap W_2{}^{1,0}(\Omega)$.

По оператору B_2 образуем шкалу гильбертовых пространств [10,11]

$$H_\gamma(\Gamma) = D(B_2{}^\gamma)$$

В силу леммы 2 эта шкала является шкалой гильбертовых пространств, соединяющей $W_2{}^\circ(\Gamma_0)$ и $W_2{}^1(\Gamma_0)$. Отсюда и из результатов работы [11] вытекает, что при $\gamma\leqslant 1$ пространства Соболева $W_2{}^\gamma(\Gamma_0)$ совпадают с пространствами $H_\gamma(\Gamma_0)$.

Оператор B_2 — самосопряженный положительно-определенный в $H_0(\Gamma_0) = W_2{}^\circ(\Gamma_0)$, поэтому в силу результатов [11] он будет самосопряженным положительно-определенным и в $H_{1/2}(\Gamma_0) = W_2{}^{1/2}(\Gamma_0)$.

Таким образом оператор M_1 является самосопряженным положительно-определенным в $L_2{}^\circ(\Omega)\oplus W_2{}^{1/2}(\Gamma_0)$. Тогда полугруппа, порожденная уравнением $dx/dt = -M_1x$, будет сжимающей аналитической в правой полуплоскости (см. [12]).

Представим оператор K_1 в виде

$$K_1 = T_1M_1$$

$$T_1 = \begin{Vmatrix} -\sigma\nu^{-2}T_{11} & -\sigma^{1/2}\nu^{-1}T_{12} \\ \sigma^{1/2}\nu^{-1}T_{21} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$T_{11} = T_{12}T_{21}, \quad T_{12} = A^{1/2}TC^{-1/2}, \quad T_{21} = B_2C^{-1/2}\Gamma A^{-1}(I+B)A^{-1/2}$$

Оператор K_1 вполне подчинен оператору M_1, если оператор T_1 вполне непрерывен в пространстве $L_2^\circ(\Omega) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ (см., например, [12]). Последнее утверждение вытекает из следующих лемм.

Лемма 3. Оператор T_{12} вполне непрерывно действует из $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ в $L_2^\circ(\Omega)$. В самом деле, пусть μ — ограниченное множество в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Из леммы 1 следует, что оператор $C^{-1/2}$ переводит μ в ограниченное множество в $W_2^\circ(\Gamma_0)$ и в компактное множество в $W_2^{-1/2}(\Gamma_0)$ в силу полной непрерывности оператора вложения. Тогда из указанных выше свойств операторов T и A следует, что оператор $TC^{-1/2}$ переводит μ в компактное множество в $W_2^1(\Omega)$, а оператор $A^{1/2}TC^{-1/2}$ переводит μ в компактное множество в $L_2^\circ(\Omega)$. Это означает полная непрерывность оператора $A^{1/2}TC^{-1/2}$ из $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ в $L_2^\circ(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 4. Оператор T_{11} вполне непрерывно действует из $L_2^\circ(\Omega)$ в $L_2^\circ(\Omega)$.

Доказательство. Так как область значений оператора B состоит из сколь угодно гладких функций, оператор $(I + B)\, A^{-1/2}$ ограничен как оператор из $L_2^\circ(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$ и вполне непрерывен как оператор из $L_2^\circ(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Omega)$ в силу теоремы вложения. Оператор $B_2C^{-1/2}\Gamma A^{-1} = C^{1/2}B_1\Gamma A^{-1}$ ограничен как оператор из $W_2^{1/2}(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$, что вытекает из цепочки отображений

$$W_2^{1/2}(\Omega) \xrightarrow{A^{-1}} W_2^{5/2}(\Omega) \xrightarrow{\Gamma} W_2^{2}(\Gamma_0) \xrightarrow{B_1} W_2^{0}(\Gamma_0) \xrightarrow{C^{1/2}} W_2^{1/2}(\Gamma_0)$$

Непрерывность оператора в первом звене вытекает из результатов работы [13], во втором — из теоремы о следах [13], в третьем — из оценки [14]

$$\|B_1^{-1}\mathrm{v}\|_{W_2^2(\Gamma_0)} \leqslant c\|\mathrm{v}\|_{W_2^0(\Gamma_0)} \quad \text{для } \mathrm{v} \in W_2^0(\Gamma_0)$$

Оператор в четвертом звене непрерывен в силу леммы 1.

Таким образом, оператор T_{11} представляет собой произведение вполне непрерывного оператора $(I + B)\, A^{-1/2}$ из $L_2^\circ(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Omega)$, ограниченного оператора $B_2C^{-1/2}\Gamma A^{-1}$ из $W_2^{1/2}(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ и вполне непрерывного оператора T_{12} из $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ в $L_2^\circ(\Omega)$, поэтому он является вполне непрерывным как оператор из $L_2^\circ(\Omega)$ в $L_2^\circ(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Оператор T_{21} вполне непрерывно действует из $L_2^\circ(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$.

Доказательство леммы 5 вытекает из доказательства леммы 4.

Полная подчиненность оператора K_1 оператору M_1 доказана. Тогда все утверждения теоремы 1 вытекают из результатов [12].

Замечание. При заданных начальном распределении скорости жидкости $\mathbf{u}_0$ в объеме Ω и начальном отклонении свободной поверхности N_0 от равновесной поверхности (1.6) p_0 на поверхности Γ_0 в начальный момент времени определяется согласно второму соотношению (1.3). Как показано в [6], отсюда однозначно определяются начальные значения $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{w}_0 = T\,\varphi_0$ в разложении (3.3) по $\mathbf{u}_0$ и p_0.

4. Нормальные колебания. Рассмотрим нормальные колебания вязкой жидкости при совместном движении системы тело+жидкость в условии полной невесомости. Решение задачи будем искать в виде

$$(\mathbf{u},\ p,\ N) = e^{-\lambda t}\,(\mathbf{u}_1,\ p_1,\ N_1)$$

Здесь $\mathbf{u}_1$, p_1, N_1 являются функциями только координат. Для величин $s_1 = A^{1/2}v_1$, $\eta_1 = \sigma^{-1/2}\nu C^{1/2}\varphi_1$ приходим к задаче

$$\nu s_1 = \lambda F_1(s_1 + \nu^{-1}\sigma^{1/2}T_{12}\eta_1) \tag{4.1}$$
$$\sigma^{1/2}\nu^{-1}T_{12}\eta_1 = \sigma(\lambda\nu)^{-1}F_2(s_1 + \sigma^{1/2}\nu^{-1}T_{12}\eta_1)$$
$$F_1 = A^{-1/2}(I + B)A^{-1/2}, \quad F_2 = A^{1/2}TB_1\Gamma A^{-1/2}$$

Обозначая $\xi_1 = s_1 + \sigma^{1/2}\nu^{-1}T_{12}\eta_1$, получим

$$\xi_1 = \lambda\nu^{-1}F_1\xi_1 + \sigma(\lambda\nu)^{-1}F_2\xi_1 \tag{4.2}$$

Умножив обе стороны на ξ_1, замечая, что $(F_1\xi_1, \xi_1) \geqslant 0$ в силу положительности оператора F_1, $(F_2\xi_1, \xi_1) = (B_1\Gamma A^{-1/2}\xi_1, \Gamma A^{1/2}\xi_1) > 0$ в силу положительной определенности оператора B_1, получаем

$$\lambda = {}^1/_2\{\nu(\xi_1, \xi_1) \pm [\nu^2(\xi_1, \xi_1)^2 - 4\sigma(F_1\xi_1, \xi_1)(F_2\xi_1, \xi_1)]^{1/2}\}/(F_1\xi_1, \xi_1)$$

Отсюда видно, что λ имеет положительную вещественную часть.

Для доказательства полноты системы собственных и присоединенных векторов задачи (4.1) воспользуемся уравнением (3.2). Для нормальных колебаний запишем (3.2) в виде

$$x_1 = \lambda M_1^{-1}(I + S)x_1 \tag{4.3}$$
$$M_1^{-1} = \begin{Vmatrix} \nu^{-1}F_1 & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}\nu B_2^{-1} \end{Vmatrix}, \quad x_1 = \begin{Vmatrix} s_1 \\ \eta_1 \end{Vmatrix}$$
$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \nu^{-1}\sigma^{1/2}T_{12} \\ -\sigma^{1/2}\nu^{-1}T_{21} & -\sigma\nu^{-2}T_{21}T_{12} \end{Vmatrix}$$

Лемма 6. Оператор S вполне непрерывен в $L_2^\circ(\Omega) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma_0)$.

Доказательство. В силу лемм 3 и 5 оператор T_{12} вполне непрерывен как оператор из $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ в $L_2^\circ(\Omega)$, оператор T_{21} вполне непрерывен как оператор из $L_2^\circ(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Остается доказать, что оператор $T_{21}T_{12}$ вполне непрерывен в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Из доказательства леммы 3 и 4 следует, что он представляет собой произведение вполне непрерывного оператора $TC^{-1/2}$ из $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ в $W_2^{1/2}(\Omega)$, ограниченного оператора $(I + B)$ в $W_2^{1/2}(\Omega)$ и ограниченного оператора $B_2C^{-1/2}\Gamma A^{-1}$ из $W_2^{1/2}(\Omega)$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Следовательно, он вполне непрерывен как оператор из $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Лемма доказана.

Как указано выше, самосопряженный оператор A^{-1} вполне непрерывен и принадлежит классу σ_q ($\forall\, q > {}^3/_2$). Оператор F_1 обладает теми же свойствами. В силу леммы 2 и результатов работы [11] оператор B_2^{-1} вполне непрерывен, самосопряжен в $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ и принадлежит классу σ_q ($\forall q > 3$). Отсюда следует, что оператор M_1^{-1} самосопряженный, вполне непрерывный в $L_2^\circ(\Omega) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ и принадлежит классу σ_q при $q > 3$.

Теорема 2. Система собственных и присоединенных векторов задачи (4.1) о нормальных колебаниях вязкой жидкости при совместном движении системы тело + жидкость в условии полной невесомости полна в $L_2^\circ(\Omega) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma_0)$. Все нормальные колебания для любого ε (> 0)

являются затухающими и за исключением, быть может, конечного числа имеют аргумент, лежащий в угле $-\varepsilon < \arg \lambda < \varepsilon$. Спектр этой задачи дискретен и имеет одну точку сгущения на бесконечности.

Теорема 2 вытекает из теоремы М. В. Келдыша [15].

Автор благодарит С. Г. Крейна за ценные указания и постоянное внимание к работе, а также Н. Д. Копачевского за полезные замечания.

Поступила 7 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
2. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
3. *Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Задачи о малых движениях тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 5.
5. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
6. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. Функциональный анализ и его приложения, 1968, т. 8, № 4.
7. *Нго Зуй Кан.* О движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой вязкой жидкостью. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968, т. 8, № 4.
8. *Кобрин А. И.* К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
9. *Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, 1960, т. 59.
10. Функциональный анализ (под общей ред. С. Г. Крейна). М., «Наука», 1972.
11. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И.* Шкалы банаховых пространств. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 2.
12. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967.
13. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. Матем. сб., 1965, т. 68, вып. 3.
14. *Агранович М. С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
15. *Гохберг И. Ц., Крейн С. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.