Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.381

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА

В. С. Сергеев

(Москва)

Указывается новое семейство периодических решений уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при распределении масс в теле, близком к распределению масс для случая интегрируемости Лагранжа. Найденные периодические решения в невозмущенной задаче отвечают случаю, когда одна из частот регулярной прецессии Лагранжа обращается в нуль, т. е. соответствуют перманентным вращениям вокруг осей, расположенных в главной плоскости инерции тела для неподвижной точки. Эти перманентные вращения отвечают бифуркации; от них ответвляются регулярные прецессии [1]. Уравнения в вариациях приведенной задачи для таких движений имеют два нулевых корня с одной группой решений.

Периодические решения, близкие к перманентным вращениям произвольного твердого тела, рассматривались в работе [2]. Эти решения, как и решения, найденные в [3], получены на основании теоремы Ляпунова, т. е. в предположении несоизмеримости частот соответствующей системы уравнений в вариациях. В работе [4] методом Пуанкаре доказано существование периодических решений, которые рождаются из перманентных вращений случая Эйлера.

1. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки O в переменных Эйлера — Пуассона

$$Adp / dt + (C - B)\, qr = mg\, (y_0\gamma'' - z_0\gamma') \tag{1.1}$$
$$d\gamma / dt = r\gamma' - q\gamma'' \ (ABC,\ x_0y_0z_0,\ pqr,\ \gamma\gamma'\gamma'')$$

где предполагается, что положительное направление оси OZ, неподвижной в пространстве системы координат $OXYZ$, совпадает с направлением действия силы тяжести g.

Будем рассматривать класс движений твердого тела, близких к регулярной прецессии случая Лагранжа. С этой целью преобразуем уравнения (1.1), вводя в них малый параметр μ с помощью подстановок

$$\begin{aligned} &x_0 = \mu x_1 l, \quad y_0 = \mu y_1 l, \quad z_0 = z_1 l \\ &B = A\,(1 + \mu D), \quad k^2 = mgl / C \\ &p = kp_1, \quad q = kq_1, \quad r = k\,(r_0 + \mu r_1) \\ &\gamma = \gamma_1, \quad \gamma' = \gamma_1', \quad \gamma'' = \gamma_0'' + \mu\gamma_1'', \quad t = t_1 k^{-1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

в которых l — характерный размер тела, например, $l^2 = C / m$, а D, $r_0 \neq 0$, $\gamma_0'' \neq 0$ — некоторые постоянные.

Произведем далее в полученных таким образом уравнениях замену переменных $\gamma_1, \gamma_1', p_1, q_1 \to \gamma_2, \gamma_2', p_2, q_2$

$$\gamma_1 = -\gamma_0''M\cos\Omega t_1 + \mu\gamma_2, \quad p_1 = (\Omega - r_0)\,M\cos\Omega t_1 + \mu p_2 \tag{1.3}$$
$$\gamma_1' = \gamma_0''M\sin\Omega t_1 + \mu\gamma_2', \quad q_1 = (r_0 - \Omega)\,M\sin\Omega t_1 + \mu q_2$$

где M — произвольная постоянная, а Ω — одна из частот регулярной прецессии случая Лагранжа. Тогда получим неавтономную систему дифференциальных уравнений с голоморфными по новым переменным и μ правыми частями, периодически зависящими от времени. Указанная система уравнений допускает при выполнении условий $z_0 \neq 0$, $\Omega \neq 0$, $r_0 \neq 0$, $\gamma_0'' \neq 0$, $\pm$ 1 семейство периодических решений с периодом $T = 2\pi\,/\,(k\Omega)$ [1].

Рассмотрим случай вырождения для регулярной прецессии, т. е. будем считать, что в формулах (1.3) $\Omega = 0$; иными словами, будем требовать выполнения равенства

$$Cz_1\gamma_0'' + (C - A)\,r_0^2 = 0 \tag{1.4}$$

причем $z_1 \neq 0$ и $C - A \neq 0$.

Выполнив замены (1.2) — (1.4), получим следующую автономную систему уравнений:

$$\begin{aligned} &dp_2\,/\,dt_1 - A_1r_0q_2 + A_2z_1\gamma_2' = g_1 \\ &dq_2\,/\,dt_1 + A_1r_0p_2 - A_2z_1\gamma_2 = g_2 \\ &d\gamma_2\,/\,dt_1 - r_0\gamma_2' + \gamma_0''q_2 = g_3 \\ &d\gamma_2'\,/\,dt_1 - \gamma_2''p_2 + r_0\,(M^2 + 1)\,\gamma_2 = g_4 \\ &A_1 = (A - C)\,/\,A, \quad A_2 = C\,/\,A \end{aligned} \tag{1.5}$$

к которой присоединим уравнение

$$dr_1\,/\,dt_1 - y_1\gamma_0''M = g_5 \tag{1.6}$$

и соотношение

$$\gamma_1'' = M\gamma_2 - \frac{\mu}{2\gamma_0''}\,(\gamma_2^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_1''^2) \tag{1.7}$$

получающееся из геометрического интеграла уравнений (1.1), если принять во внимание, что постоянная M выбирается на основании равенства $\gamma_0''^2\,(M^2 + 1) = 1$.

В уравнениях (1.5), (1.6) g_i $(i = 1,\ldots,5)$ — известные голоморфные функции параметра μ и переменных γ_2, γ_2', p_2, q_2, r_1, обращающиеся при $\mu = 0$ в постоянные.

2. Будем искать методом малого параметра Пуанкаре периодические решения уравнений (1.5), (1.6) в виде степенных рядов по параметру μ с периодом, близким к периоду порождающего периодического решения системы (1.5), для чего положим

$$t_1 = (1 + \alpha)\,\tau, \quad \alpha = \mu\alpha' = \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \ldots \tag{2.1}$$

---

[1] См. *Сергеев В. С.* Об одном семействе периодических решений уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой. Третья Всесоюзная Четаевская конференция по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Аннот. докл. Иркутск, 1977.

При вычислении каждого приближения по μ уравнение (1.6) отделяется от основной системы (1.5). Будем полагать, что $r_1 = 0$ при $\tau = 0$.

Преобразованием

$$X_k = a_k p_2 + b_k \gamma_2, \quad X_{k+1} = a_{k+1} q_2 + b_{k+1} \gamma_2', \quad k = 1, 3$$
$$a_1 = \varkappa_1 A_1 (A_1 + 1) r_0^2, \quad b_1 = A_1 r_0^3 \gamma_0''^{-3} (1 + A_1 \gamma_0''^2)$$
$$a_2 = \varkappa_1^2 A_1 r_0, \quad b_2 = -\varkappa_1^2 A_1 r_0^2 \gamma_0''^{-1}$$
$$a_3 = r_0, \quad b_3 = A_1 r_0^2 \gamma_0''$$
$$a_4 = -r_0^2 \gamma_0''^{-2} (1 + A_1 \gamma_0''^2), \quad b_4 = -r_0^3 \gamma_0''^{-1} A_1 (A_1 + 1)$$

приведем (1.5) к виду

$$dX_1 / d\tau = \varkappa_1 X_2 + F_1, \quad dX_3 / d\tau = F_3 \tag{2.2}$$
$$dX_2 / d\tau = -\varkappa_1 X_1 + F_2, \quad dX_4 / d\tau = \varkappa_2 X_3 + F_4$$

причем функции F_i переменных X_j $(i, j = 1,\ldots,4)$ и μ того же типа, что и функции g_i в (1.5). Постоянные

$$\varkappa_1^2 = 4A_2 z_1 \gamma_0'' + r_0^2 (M^2 + A_2^2), \quad \varkappa_2 = A_1 r_0^2 M^2 \tag{2.3}$$

будем считать отличными от нуля, т. е. дополнительно потребуем, чтобы $\gamma_0'' \neq \pm 1$.

3. Периодические решения автономной системы уравнений (2.2) периода $T' = 2\pi / \varkappa_1$ представим следующим образом:

$$X_1 (\tau) = (M_1 + \beta_1) \cos \varkappa_1 \tau + X_1' (\tau, \mu) \tag{3.1}$$
$$X_2 (\tau) = -(M_1 + \beta_1) \sin \varkappa_1 \tau + X_2' (\tau, \mu)$$
$$X_3 (\tau) = M_3 + \beta_3 + X_3' (\tau, \mu)$$
$$X_4 (\tau) = \varkappa_2 (M_3 + m_3 + \beta_3) \tau + M_4 + \beta_4 + X_4' (\tau, \mu)$$

Постоянные M_k, а также функции $\beta_k = \beta_k (\mu)$ $(k = 1, 3, 4)$ являются величинами, которые наряду с $\alpha = \alpha (\mu)$ должны быть определены из условий периодичности. Функции $X_i' (\tau, \mu)$ в (3.1) находятся последовательно в виде степенных рядов по μ при решении системы уравнений (2.2), (1.6), причем $X_i' (\tau, 0) = m_i$ и

$$m_1 = -A_1 A_2 r_0 \gamma_0'' \varkappa_1 x_1, \quad m_2 = m_4 = 0$$
$$m_3 = -A_2 (1 + A_1 \gamma_0''^2) (A_1 \gamma_0'' M^2)^{-1} x_1$$

Уравнения (2.2), (1.6) допускают два первых интеграла, соответствующих интегралам энергии и площадей задачи. Эти интегралы, зависимые при $\mu = 0$, позволяют тем не менее исключить из условий периодичности

$$X_i (T') - X_i (0) = 0, \quad i = 1,\ldots,4 \tag{3.2}$$
$$r_1 (T') - r_1 (0) = 0 \tag{3.3}$$

условия периодичности функций X_1, X_3, если выполнено неравенство

$$x_1 [(2A - C) (1 + A_1 \gamma_0''^2) r_0^2 + C x_1 \gamma_0''^2] \neq 0 \tag{3.4}$$

Последнее из условий (3.2) служит для определения M_3 ($M_3 = -m_3$) и голоморфной функции $\beta_3 = B_3(\mu, \alpha', \beta_1, \beta_4)$, причем $B_3(0, \alpha', \beta_1, \beta_4) = 0$. Условие (3.3), которое может выполняться лишь при $y_1 = 0$, приводится к виду

$$-T'd\,[\varkappa_2(M_3 + m_3 + \beta_3)\,T'/2 + M_4 + \beta_4] + \mu H = 0 \tag{3.5}$$

$$d = A_2^{-1} D r_0 M\,(1 + A_1\gamma_0''^2)\,(A_1\gamma_0''\varkappa_1^4)^{-1} + x_1\varkappa_1^{-2}$$

(H — голоморфная функция μ в окрестности $\mu = 0$). Уравнение (3.5), когда

$$d \neq 0 \tag{3.6}$$

позволяет найти $M_4 = 0$ и голоморфную функцию $\beta_4 = B_4(\mu, \alpha', \beta_1)$, такую, что $B_4(0, \alpha', \beta_1) = 0$. Наконец, условие периодичности X_2 при $M_1 \neq 0$ определяет α' в виде степенного ряда по μ, первый член которого равен

$$\alpha_1 = \frac{r_0^4}{2\varkappa_1^4}\left[De^2 + \frac{x_1 M A_2}{\varkappa_1^2\gamma_0''}(3\varkappa_1^2 r_0^{-2} + \gamma_0''^2 e^2)\right] \tag{3.7}$$

$$(e = A_1(1 + A_1))$$

Таким образом могут быть удовлетворены все условия периодичности (3.2), (3.3) и найдены функции $\alpha = \alpha(\mu)$, $\beta_s = \beta_s(\mu)$ ($s = 3, 4$) в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням параметра μ. Величина $M_1 + \beta_1$ при этом остается произвольной. Потребуем, чтобы в начальный момент $\gamma'' = \gamma_0''$, тогда M_1 и $\beta_1 = \beta_1(\mu)$ определяются из соотношения (1.7), взятого при $\tau = 0$. В этом случае

$$M_1 = A_2\gamma_0''^3\varkappa_1^3 x_1(\gamma_0''^2 - 1)^{-1}$$

Итак, доказана

Теорема. Уравнения движения (1.1) при распределении масс в теле, близком к случаю интегрируемости Лагранжа, т. е. при $A - B \sim \mu$, $A \neq C$, $x_0 \neq 0 \sim \mu$, $y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$, где μ мало, допускают семейство периодических решений, если $r_0 \neq 0$, $\gamma''_0 \neq 0, \pm 1$ и выполняются условия (1.4), (3.4), (3.6). Решения представляются голоморфными функциями параметра μ в окрестности $\mu = 0$ с периодом $T = 2\pi(1 + \alpha)/(k\varkappa_1)$ по t, где $\varkappa_1$ и α определяются формулами (2.1), (2.3), (3.7).

Замечание 1. Периодические решения, аналогичные найденным, существуют также в случае, когда требование теоремы $y_0 = 0$ заменено условием $y_0 \sim \mu^2$.

Замечание 2. Если в преобразовании (1.3) вместо t_1 положить $t_1 + \pi/(2\Omega)$, то можно доказать, подобно предыдущему, существование семейства периодических решений, когда центр тяжести рассматриваемого тела расположен так, что $y_0 \sim \mu$, а $x_0 = 0$ (или, согласно замечанию 1, $\sim \mu^2$).

4. Выясним, каким движениям отвечают найденные периодические решения уравнений (1.1). С этой целью вычислим первые члены разложений для угла нутации ϑ, а также для скоростей собственного вращения и пре-

цессии $\varphi^\cdot$, $\psi^\cdot$ в ряды по степеням μ. Тогда

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & \vartheta = \vartheta_0 + \mu\Theta\,(1 + \cos \varkappa_1\tau) + \ldots \quad (\gamma_0'' = \cos\vartheta_0) \\
& d\varphi\, /\, d\tau = \mu\Phi \cos \varkappa_1\tau + \ldots \\
& d\psi\, /\, d\tau = (1+\alpha)\frac{r_0}{\gamma_0''} + \frac{\mu}{\gamma_0''}\,[(R - \Theta \operatorname{tg}\vartheta_0)(\cos\varkappa_1\tau - 1) - \\
& - \Phi\cos\varkappa_1\tau] + \ldots \\
& \Theta = \frac{A_2\gamma_0''^2 x_1}{A_1 M r_0^2 \sin\vartheta_0}, \quad \Phi = \frac{M_1(1 + A_1\gamma_0''^2)}{M A_1 \gamma_0''^2 \varkappa_1^3} \\
& R = M_1\,(\varkappa_1^5 A_1\gamma_0'')^{-1}\,[D A_2^{-1} e r_0\,(r_0 - \Omega)\,\gamma_0'' - x_1\,(1 + A_1\gamma_0''^2)]
\end{aligned}
$$

Из первой и третьей формул (4.1) следует, что на вращающейся вокруг вертикали OZ с постоянной угловой скоростью $n = k\,[r_0 - \mu\,(R - \Theta \operatorname{tg}\vartheta_0)]\, /\, \gamma_0''$ единичной сфере с центром в точке O ось Oz системы координат, связанной с главными осями инерции тела, описывает в первом приближении малый эллипс. При этом тело, согласно второй формуле (4.2), совершает малые вращения вокруг оси Oz либрационного характера. Однако уже во втором приближении угол φ имеет вековой член. Семейство движений зависит от трех произвольных постоянных, начальных значений ϑ_0, φ_0, ψ_0 углов Эйлера, поскольку начальное значение переменной

$$r = k\,[r_0 + \mu R\,(\cos\varkappa_1\tau - 1) + \ldots]$$

связано с ϑ_0 равенством (1.4).

Ряды, представляющие периодические решения, сходятся для достаточно малых значений параметра μ. Способом, указанным в работе [5], можно найти гарантированную оценку радиуса сходимости этих рядов.

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Теоретична и приложна механика, София, 1974, № 2.
2. *Mettler E.* Periodische und asymptotische Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels. Math. Z., 1937, Bd 43.
3. *Яхья Х. М.* О периодических движениях твердого тела вокруг неподвижной точки, близких к стационарным. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
4. *Козлов В. В.* Новые периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
5. *Сергеев В. С.* Периодические решения уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в одном случае. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1969, № 6.