

**ВЫНУЖДЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

В. А. Златоустов, В. В. Сазонов, В. А. Сарычев

(Москва)

Рассматриваются периодические решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания математического маятника под действием внешней синусоидальной силы. В случае, когда амплитуда вынуждающей силы мала, найден класс симметричных периодических решений, удовлетворяющих простым краевым условиям. С помощью численных расчетов эти решения продолжены в область больших амплитуд вынуждающей силы. Исследовано ветвление найденных решений.

1. Периодические колебания при малых амплитудах вынуждающей силы. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1.1) \quad x'' + \mu \sin x = e \sin t$$

где x — неизвестная функция, t — независимая переменная, e и μ — параметры. Это уравнение можно интерпретировать как уравнение движения математического маятника под влиянием внешней синусоидальной силы. Будем искать периодические решения этого уравнения, совпадающие при $e = 0$ с периодическими решениями соответствующего однородного уравнения.

Методом малого параметра Пуанкаре [1] можно доказать, что при достаточно малых $|e|$ и $\mu \neq l^2$ ($l = 0, 1, \dots$) существует единственное 2π -периодическое решение уравнения (1.1) $x_z(t, e)$, аналитически зависящее от e и переходящее при $e = 0$ в нуль. Для этого решения справедливы соотношения

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x_z(t + \pi, e) &= -x_z(t, e), & x_z(-t, e) &= -x_z(t, e) \\ x_z(t, -e) &= -x_z(t, e) \end{aligned}$$

Численное построение решения x_z сводится к решению для уравнения (1.1) краевой задачи

$$(1.3) \quad x(0) = x(\pi/2) = 0$$

Пусть m и n — взаимно-простые натуральные числа, $\mu > 0$. Найдем $2\pi m$ -периодические решения уравнения (1.1), переходящие при $e = 0$ в $2\pi m/n$ -периодические решения однородного уравнения. Искомые решения называются [2] решениями вида m/n . Для их определения воспользуемся методами [3, 4]. Введем функцию $x_0(t) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn} \sqrt{\mu} t)$, где модуль эллиптических функций k — корень уравнения $2nK(k) = \pi m \sqrt{\mu}$, $K(k)$ —

полный эллиптический интеграл первого рода. Функция $x_0(t)$ определена при $\mu > n^2/m^2$, удовлетворяет уравнению (1.1) при $e = 0$ и является $2\pi m/n$ -периодической.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$(1.4) \quad x'' + \mu \sin x = e \sin t - px_0'(t + t_0) \\ \int_0^{2\pi m} xx_0'(t + t_0) dt = 0$$

Здесь x — неизвестная функция, p — неизвестная постоянная, t_0 — произвольная постоянная. Используя результаты [3], можно доказать, что при достаточно малых $|e|$ система (1.4) имеет единственное $2\pi m$ -периодическое по t решение

$$(1.5) \quad x = x_*(t, t_0, e), \quad p = p_*(t_0, e)$$

аналитически зависящее от e и удовлетворяющее условиям $x_*(t, t_0, 0) = x_0(t + t_0)$, $p_*(t_0, 0) = 0$. Пусть $t_0(e)$ — корень так называемого бифуркационного уравнения

$$(1.6) \quad p_*(t_0, e) = 0.$$

Тогда $x(t, e) = x_*[t, t_0(e), e]$ — периодическое решение уравнения (1.1) вида m/n . Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, отыскание периодических решений вида m/n сводится к определению корней уравнения (1.6).

Укажем некоторые свойства решения (1.5). Используя очевидные равенства $x_0(t + \pi m/n) = -x_0(t)$, $\sin(t + \pi) = -\sin t$, можно доказать, что

$$(1.7) \quad x_*(t + \pi, t_0, e) = x_*(t, t_0 + \pi, -e), \\ x_*(t, t_0 + \frac{\pi m}{n}, e) = -x_*(t, t_0, -e)$$

$$(1.8) \quad p_*(t_0 + \pi, e) = p_*(t_0, -e), \quad p_*(t_0 + \frac{\pi m}{n}, e) = p_*(t_0, -e)$$

В силу (1.7) $x_*(t, t_0 + 2\pi m/n, e) = x_*(t, t_0, e)$, поэтому достаточно найти корни уравнения (1.6) в интервале $0 \leq t_0 < 2\pi m/n$. Функция $p_*(t_0, e)$ — периодическая по t_0 с периодом $2\pi/n$. В самом деле, так как m и n — взаимно-простые натуральные числа, то существуют целые s_1, s_2 , такие, что

$$(1.9) \quad s_1 m + s_2 n = 1$$

Отсюда $2\pi/n = 2\pi m s_1/n + 2\pi s_2$ и вследствие (1.8)

$$(1.10) \quad p_*(t_0 + \frac{2\pi}{n}, e) = p_*(t_0, e)$$

Используя нечетность функций $x_0(t)$ и $\sin t$, можно установить соотношения

$$(1.11) \quad x_*(t, -t_0, e) = -x_*(-t, t_0, e), \quad p_*(-t_0, e) = -p_*(t_0, e)$$

В силу последнего из этих соотношений и соотношения (1.10) уравнение (1.6) имеет тривиальные корни

$$(1.12) \quad t_0^{(r)} = \pi r/n \quad (r = 0, 1, \dots, 2m - 1)$$

которым отвечают периодические решения вида m/n

$$(1.13) \quad x_{n/m}^{(r)}(t, e) = x_*(t, t_0^{(r)}, e) \quad (r = 0, 1, \dots, 2m - 1)$$

С помощью соотношений (1.7), (1.8), (1.11) для этих решений можно установить равенства

$$(1.14) \quad \begin{aligned} x_{n/m}^{(s)}(t, e) &= x_{n/m}^{(r)}(t + \pi, -e) \\ &- x_{n/m}^{(r)}(-t + a_r, e) = x_{n/m}^{(r)}(t + a_r, e) \\ s &= r + n \pmod{2m}, \quad a_r = -\pi r s_2 \pmod{\pi m} \end{aligned}$$

Здесь s_2 — целое число, удовлетворяющее вместе с некоторым целым s_1 соотношению (1.9).

Дальнейшее исследование периодических решений вида m/n основывается на свойствах четности чисел m и n . В силу взаимной простоты этих чисел возможны два случая: 1) оба числа m и n нечетны, 2) одно из этих чисел четно, другое нечетно. Рассмотрим сначала первый случай. Используя соотношения (1.7) и нечетность m и n , находим

$$\begin{aligned} x_{n/m}^{(r)}(t + \pi m, e) &= -x_{n/m}^{(r)}(t, e) \\ x_{n/m}^{(s)}(t, e) &= -x_{n/m}^{(r)}(t, -e) \quad (s = r + m \pmod{2m}) \end{aligned}$$

Таким образом, решения (1.13) πm -антипериодические. Вследствие (1.14) для построения всех решений (1.13) достаточно при $e \geq 0$ найти решения $x_{n/m}^{(0)}$ и $x_{n/m}^{(m)}$. Последние определяются краевыми условиями $x(0) = x^*(\pi m/2) = 0$.

Пусть теперь одно из чисел m и n четно. В этом случае целые числа s_1 и s_2 в (1.9) можно выбрать нечетными. Предположим, что их выбор сделан именно таким образом. В силу соотношения $\pi/n = \pi m s_1/n + \pi s_2$, соотношений (1.8) и нечетности чисел s_1, s_2 имеем $p_*(t_0 + \pi/n, e) = p_*(t_0, e)$. Отсюда, учитывая (1.11), находим, что уравнение (1.6) в рассматриваемом случае наряду с корнями (1.12) имеет тривиальные корни

$$\bar{t}_0^{(r)} = \frac{\pi(2r+1)}{2n} \quad (r = 0, 1, \dots, 2m - 1)$$

Этим корням отвечают периодические решения вида m/n

$$(1.15) \quad \bar{x}_{n/m}^{(r)}(t, e) = x_*(t, \bar{t}_0^{(r)}, e) \quad (r = 0, 1, \dots, 2m - 1)$$

для которых справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n/m}^{(s)}(t, e) &= \bar{x}_{n/m}^{(r)}(t + \pi, -e) \\ \bar{x}_{n/m}^{(r)}(-t + \bar{a}_r, e) &= \bar{x}_{n/m}^{(r)}(t + \bar{a}_r, e) \\ s &= r + n \pmod{2m}, \quad \bar{a}_r = -\pi(2r+1)s_2/2 \pmod{\pi m} \end{aligned}$$

В силу (1.7), (1.9) и нечетности s_2 имеем

$$(1.16) \quad \begin{aligned} x_{n/m}^s(t, e) &= -x_{n/m}^{(r)}(t + \pi s_2, e) \\ \bar{x}_{n/m}^{(s)}(t, e) &= -\bar{x}_{n/m}^{(r)}(t + \pi s_2, e), \quad s = r + 1 \pmod{2m} \end{aligned}$$

Вследствие соотношений (1.14), (1.16) для построения всех решений (1.13) достаточно при $e \geq 0$ найти решение $x_{n/m}^{(0)}$. Численное определение этого решения сводится к решению для уравнения (1.1) краевой задачи $x(0) = x(\pi m) = 0$. Точно так же для построения всех решений (1.15) достаточно при $e \geq 0$ найти решение $\bar{x}_{n/m}^{(q)}$, где $0 \leq q < m$, $(2q + 1)s_2 = -1 \pmod{2m}$. Это решение определяется краевыми условиями $x^*(\pi/2) = x^*(\pi/2 + \pi m) = 0$.

Из вида уравнения (1.1) следует, что кроме периодических решений x_z , (1.13), (1.15) это уравнение имеет периодические решения, получающиеся из указанных с помощью преобразования $x \rightarrow x + \pi$, $\mu \rightarrow -\mu$. Выше решения x_z , (1.13), (1.15) были определены при $|e| \ll 1$. Решая численно соответствующие краевые задачи, эти решения можно продолжить в область больших значений $|e|$. Таким способом в области $E = \{e, \mu: 0 \leq e \leq 10, |\mu| \leq 10\}$ были найдены 2π -периодические решения, совпадающие при $e \ll 1$ с решениями x_z , $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{2/1}^{(r)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(r)}$, $x_{3/1}^{(r)}$ ($r = 0, 1$). Ниже кратко описываются результаты проведенного исследования. Методика вычислений изложена в [5, 6].

2. 2π -периодические решения. Пусть n — целое нечетное число. Решения $x_{n/1}^{(0)}$, $x_{n/1}^{(1)}$ определены при $|e| \ll 1$, $\mu > n^2$ и являются нечетными π -антипериодическими функциями t . Численное построение этих решений сводится к решению краевой задачи (1.1), (1.3). Можно доказать, что всякое решение такой задачи нечетное и π -антипериодическое.

Если n четно, то при $|e| \ll 1$ и $\mu > n^2$ существуют решения $x_{n/1}^{(0)}$, $x_{n/1}^{(1)}$, $\bar{x}_{n/1}^{(0)}$, $\bar{x}_{n/1}^{(1)}$. Для этих решений справедливы равенства

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_{n/1}^{(r)}(-t, e) &= -x_{n/1}^{(r)}(t, e), \quad \bar{x}_{n/1}^{(r)}\left(-t + \frac{\pi}{2}, e\right) = \\ &= \bar{x}_{n/1}^{(r)}\left(t + \frac{\pi}{2}, e\right) \quad (r = 0, 1) \\ x_{n/1}^{(0)}(t + \pi, e) &= -x_{n/1}^{(1)}(t, e), \quad \bar{x}_{n/1}^{(0)}(t + \pi, e) = -\bar{x}_{n/1}^{(1)}(t, e) \end{aligned}$$

Решения $x_{n/1}^{(0)}$, $x_{n/1}^{(1)}$ определяются краевыми условиями

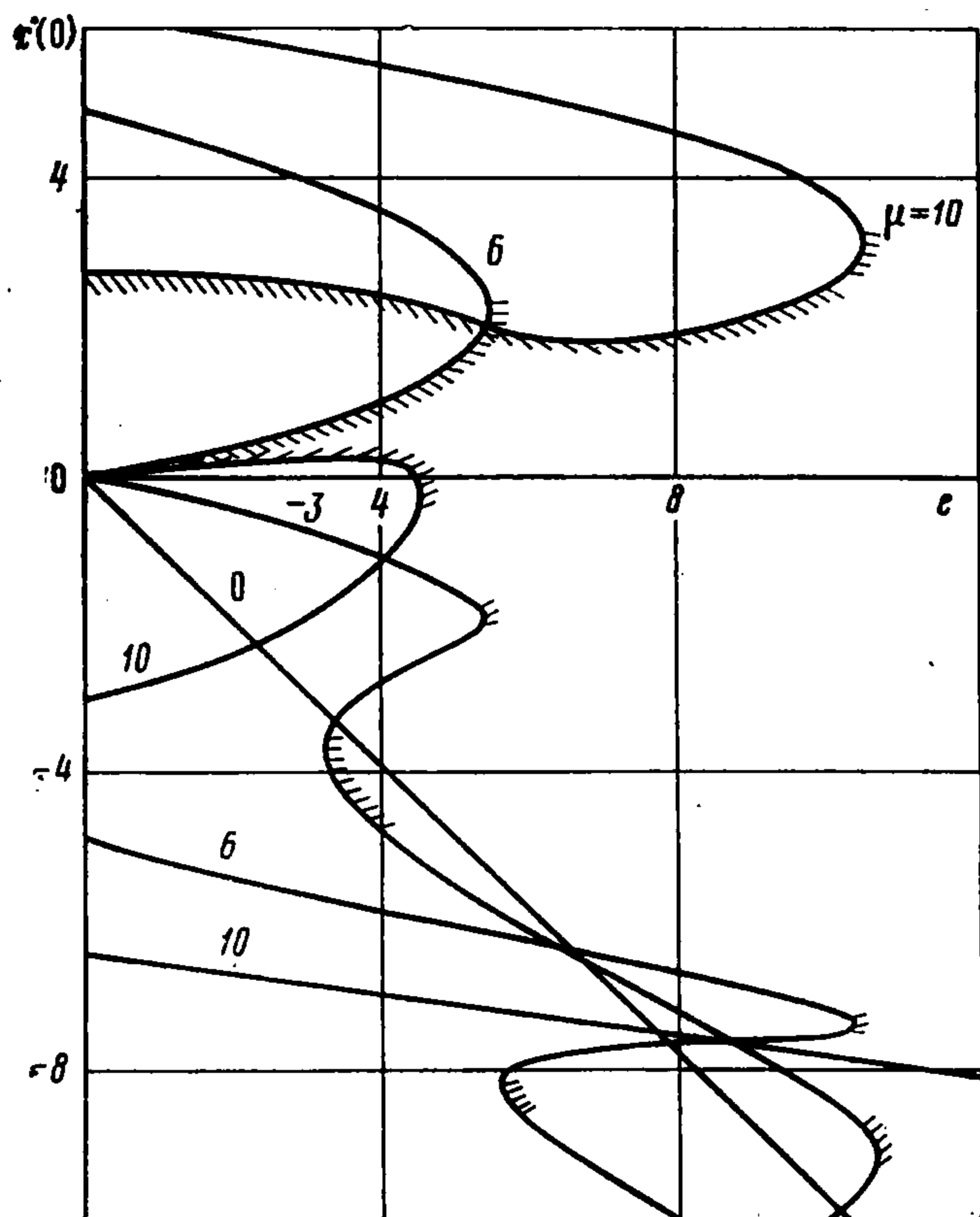
$$(2.2) \quad x(0) = x(\pi) = 0$$

решения $\bar{x}_{n/1}^{(0)}$, $\bar{x}_{n/1}^{(1)}$ — краевыми условиями

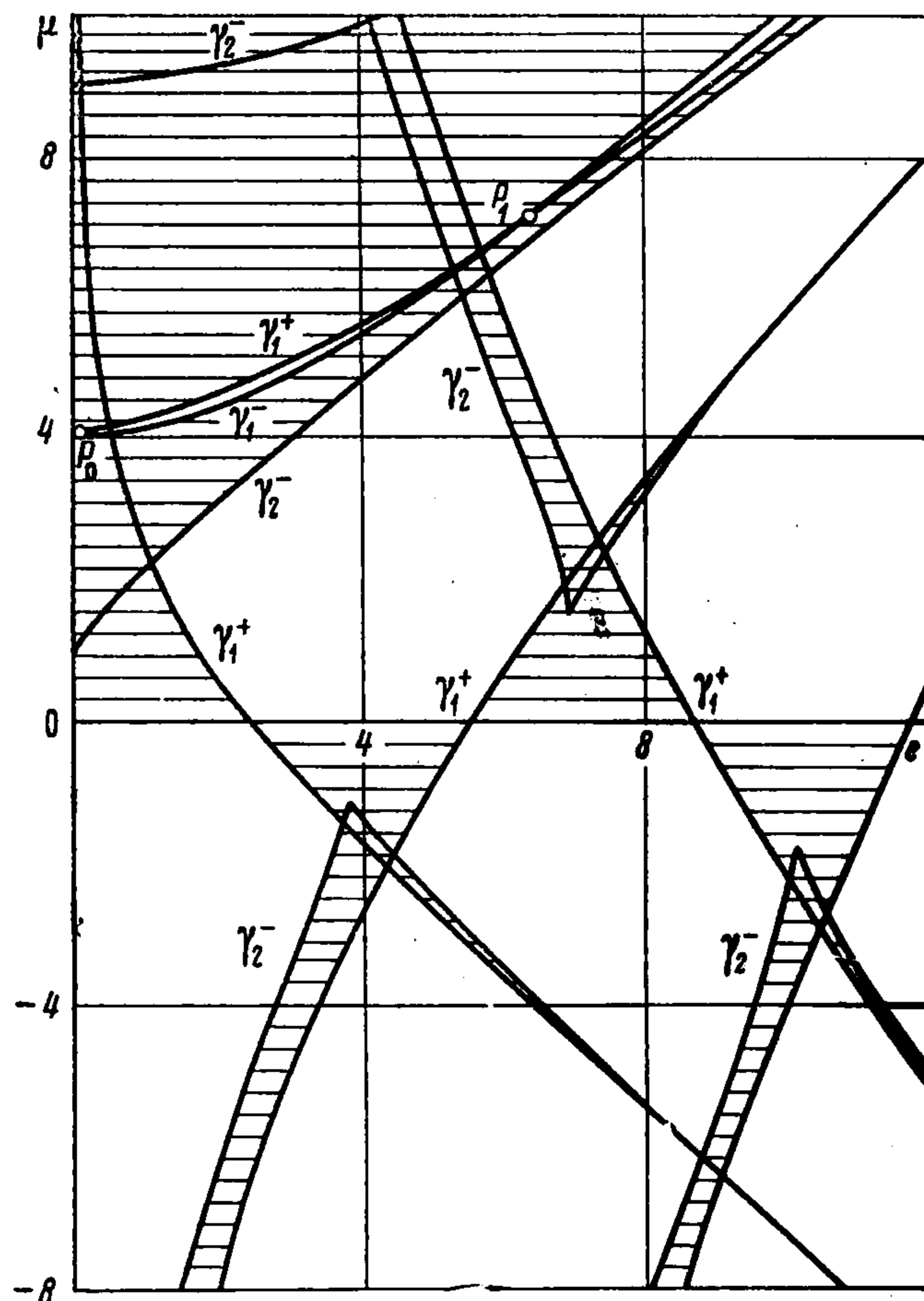
$$(2.3) \quad x^*(\pi/2) = x^*(3\pi/2) = 0$$

Этим условиям удовлетворяют также решения x_z и $x_{n/1}^{(0)}$, $x_{n/1}^{(1)}$ при нечетном n . Можно доказать, что всякое решение краевой задачи (1.1), (2.2) нечетное и 2π -периодическое, всякое решение краевой задачи (1.1), (2.3) — 2π -периодическое и удовлетворяет соотношению $x(-t + \pi/2) = x(t + \pi/2)$.

В области E при $e \ll 1$ существует решение x_z и восемь решений вида $1/n$: $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{2/1}^{(r)}$, $x_{3/1}^{(r)}$, $x_{s/1}^{(r)}$ ($r = 0, 1$). Для построения x_z , $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{s/1}^{(r)}$ решалась краевая задача (1.3). Ее решения в области E , совпадающие при $e \ll 1$ с решениями x_z , $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{s/1}^{(r)}$, приведены на фиг. 1. Здесь указана зависимость начальной скорости этих решений $x^*(0)$ от e для разных значений μ . Для идентификации вычисленных решений заметим, что при $-10 \leq \mu < 1$, $e \ll 1$ существует одно решение x_z ; при $1 < \mu < 9$,



Фиг. 1

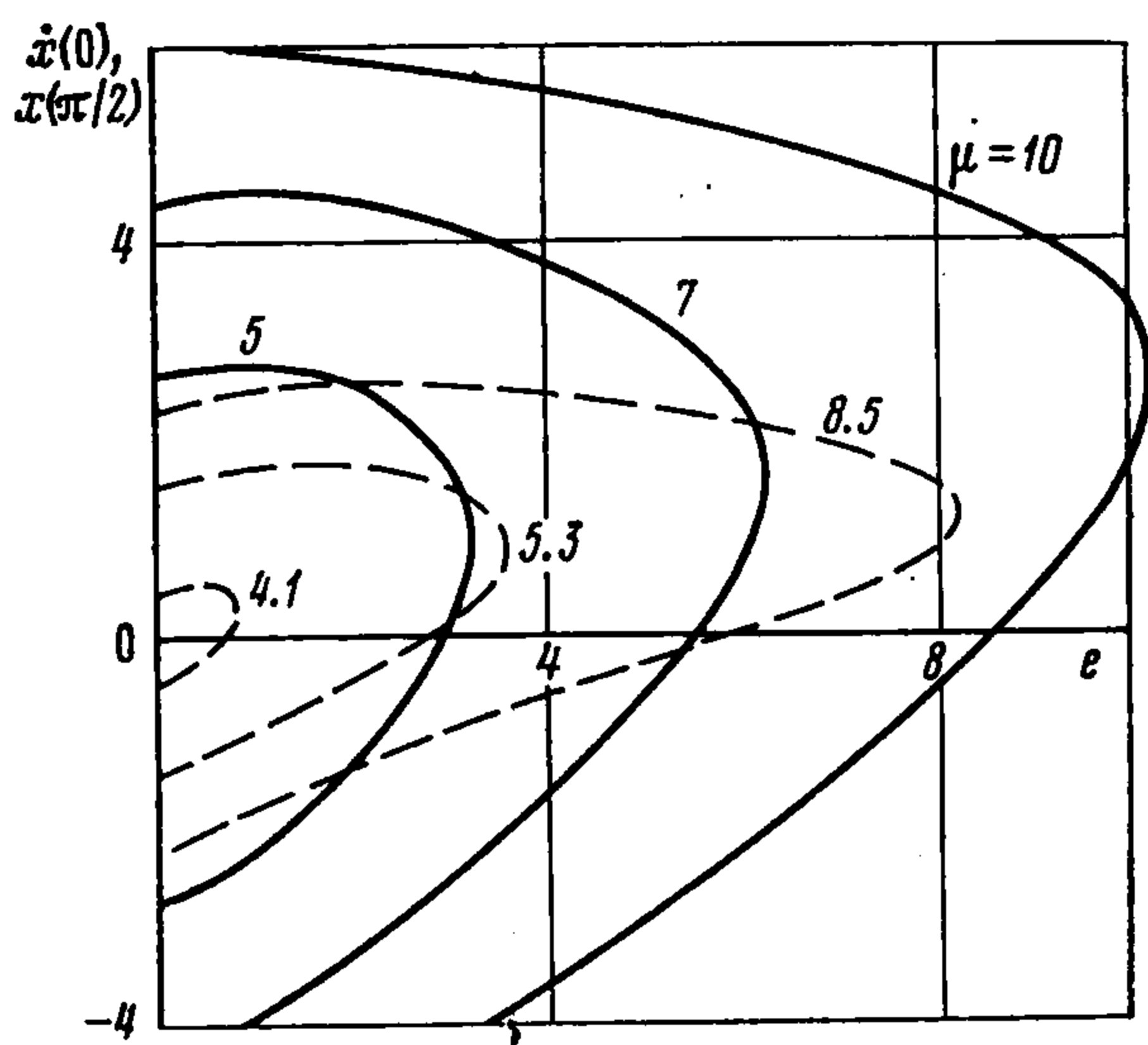


Фиг. 2

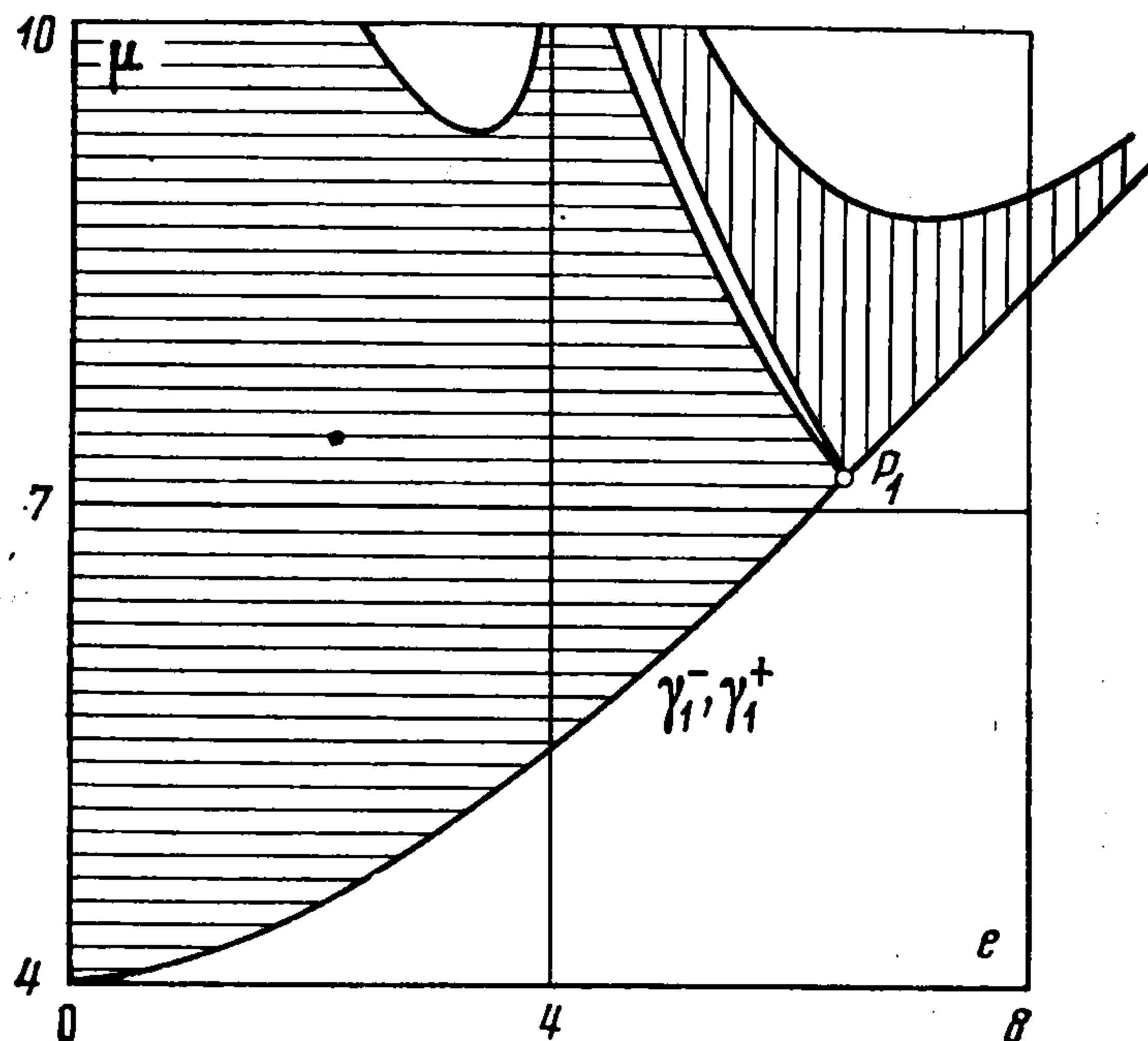
$e \ll 1$ существует три решения x_z , $x_{1/1}^{(0)}$, $x_{1/1}^{(1)}$, удовлетворяющих неравенствам $\dot{x}_{1/1}^{(1)}(0, e) < x_z^*(0, e) < \dot{x}_{1/1}^{(0)}(0, e)$, при $9 < \mu \leq 10$, $e \ll 1$ существует пять решений x_z , $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{s/1}^{(r)}$ ($r = 0, 1$), для которых $\dot{x}_{1/1}^{(1)}(0, e) < \dot{x}_{s/1}^{(1)}(0, e) < x_z^*(0, e) < \dot{x}_{s/1}^{(0)}(0, e) < \dot{x}_{1/1}^{(0)}(0, e)$.

Зависимость начальной скорости вычисленных решений от параметров e и μ можно задать в виде поверхности S в пространстве $(\alpha = x^*(0), e, \mu)$, причем одним и тем же значениям e и μ могут отвечать несколько значений $x^*(0)$. Кривые на фиг. 1 представляют собой сечения поверхности S плоскостями $\mu = \text{const}$. Ортогональная проекция этой поверхности на плоскость (e, μ) задает разбиение области E на подобласти, такие, что во всех точках одной и той же подобласти существует одинаковое число решений краевой задачи (1.3). Кривые, осуществляющие это разбиение, называются кривыми разветвления и приведены на фиг. 2 (кривые γ_2^- , смысл этого и других аналогичных обозначений будет разъяснен ниже). На кривые разветвления проектируются такие точки поверхности S , в которых касательная плоскость к S параллельна оси α . Отображение проектирования в любой окрестности указанных точек не взаимно-однозначно.

Все остальные точки S имеют окрестность, в которой это отображение взаимно-однозначно. Решения краевой задачи (1.3) полностью определяются также величиной $x(\pi/2)$. В пространстве $(\bar{\alpha} = x(\pi/2), e, \mu)$ зависимость $x(\pi/2)$ от e и μ для найденных решений можно задать в виде поверхности \bar{S} , диффеоморфной поверхности S . Ниже, если это не вызывает затруднений, решения, являющиеся продолжением решений $x_{n/1}^{(r)}$, $\bar{x}_{n/1}^{(r)}$, x_z в область больших значений e , обозначаются соответственно через $x_{n/1}^{(r)}$, $\bar{x}_{n/1}^{(r)}$, x_z .



Фиг. 3



Фиг. 4

Для вычисления решений $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$ решалась краевая задача (2.2). Зависимость начальной скорости этих решений $x'(0)$ от e для разных значений μ указана сплошной линией на фиг. 3. Решение, для которого $x'(0) > 0$ ($x'(0) < 0$) при $e \ll 1$, является решением $x_{2/1}^{(0)}$, ($x_{2/1}^{(1)}$). В пространстве (α, e, μ) решениям $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$ поставим в соответствие поверхность S' .

Укажем некоторые свойства поверхностей S и S' . Пусть $x = X(t, \alpha, e, \mu)$ — решение уравнения (1.1) с начальными условиями $X(0, \alpha, e, \mu) = 0$, $X'(0, \alpha, e, \mu) = \alpha$. Тогда, если $(\alpha, e, \mu) \in S$, то $X(\pi, \alpha, e, \mu) = -\alpha$; если $(\alpha, e, \mu) \in S'$, то и $(-X(\pi, \alpha, e, \mu), e, \mu) \in S'$. Если $(\alpha, e, \mu) \in S'$, но $(\alpha, e, \mu) \notin S$, то точки (α, e, μ) и $(-X(\pi, \alpha, e, \mu), e, \mu)$ лежат на поверхности S' по разные стороны от S . Одна из этих точек соответствует решению $x_{2/1}^{(0)}$, другая — решению $x_{2/1}^{(1)}$. При некотором $e = e_*(\mu)$ решения $x_{2/1}^{(0)}$ и $x_{2/1}^{(1)}$ сливаются: $x_{2/1}^{(0)}(t, e_*) = x_{2/1}^{(1)}(t, e_*)$. Отсюда в силу (2.1) $x_{2/1}^{(0)}(t + \pi, e_*) = -x_{2/1}^{(0)}(t, e_*)$, и решение $x_{2/1}^{(0)}(t, e_*)$ удовлетворяет краевым условиям (1.3). Анализ расчетов (ср. фиг. 1, 3) показывает, что поверхность S' пересекает поверхность S по линии слияния решений $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$. В точках этой линии касательная плоскость к поверхности S' параллельна оси α . Проекция линии $S \cap S'$ на плоскость (e, μ) — кривая разветвления решений $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$ — приведена на фиг. 2 (кривая γ_1^-).

Для вычисления решений $\bar{x}_{2/1}^{(0)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(1)}$ решалась краевая задача (2.3). На фиг. 3 штриховой линией указана зависимость начальной координаты этих решений $x(\pi/2)$ от e для разных значений μ . Решение, у которого $x(\pi/2) > 0$ ($x(\pi/2) < 0$) при $e \ll 1$, является решением $\bar{x}_{2/1}^{(1)}$ ($\bar{x}_{2/1}^{(0)}$). В пространстве $(\bar{\alpha}, e, \mu)$ решениям $\bar{x}_{2/1}^{(0)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(1)}$ отвечает поверхность \bar{S}' . Свойства поверхностей \bar{S} и \bar{S}' аналогичны свойствам поверхностей S и S' . Проекция линии $\bar{S} \cap \bar{S}'$ на плоскость (e, μ) является кривой разветвления решений $\bar{x}_{2/1}^{(0)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(1)}$ и приведена на фиг. 2. (кривая γ_1^+). При выбранном масштабе фиг. 2 кривые γ_1^+ и γ_1^- должны сливаться, но для наглядности изображены раздельно. Правильно указана кривая γ_1^- .

3. Устойчивость 2π -периодических решений. Уравнение в вариациях для уравнения (1.1) имеет вид

$$(3.1) \quad y'' + \mu y \cos x = 0$$

Пусть в (3.1) $x = x(t)$ — периодическое решение уравнения (1.1), такое, что функция $\cos x(t)$ имеет период T . Тогда характеристическое уравнение уравнения (3.1) записывается следующим образом:

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad A = 1/2 [y_1(T) + y_2(T)]$$

Здесь $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения уравнения (3.1) с начальными условиями $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1'(0) = y_2'(0) = 0$. Если $|A| < 1$, то выполнено необходимое условие устойчивости решения $x(t)$. В этом случае говорят, что $x(t)$ устойчиво в линейном приближении. При $|A| > 1$ решение $x(t)$ неустойчиво. Далее всюду под устойчивостью понимается устойчивость в линейном приближении.

Граница области устойчивости задается уравнениями $A = 1$ и $A = -1$. При $A = 1$ уравнение (3.1) имеет нетривиальное T -периодическое решение. Если

$$(3.2) \quad \text{rank} \begin{vmatrix} y_1(T) - 1 & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) - 1 \end{vmatrix} = 1$$

то это решение единственно (с точностью до постоянного множителя). Если условие (3.2) не выполнено, то все решения уравнения (3.1) будут T -периодическими. При $A = -1$ уравнение (3.1) имеет нетривиальное T -антипериодическое решение. Если

$$(3.3) \quad \text{rank} \begin{vmatrix} y_1(T) + 1 & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) + 1 \end{vmatrix} = 1$$

то это решение единственно. В противном случае T -антипериодическими будут все решения уравнения (3.1). Пусть $\cos x(t)$ — четная функция и $|A| = 1$. Тогда при выполнении условия (3.2) или (3.3) соответствующее периодическое решение уравнения (3.1) будет либо четным, либо нечетным.

Если $x(t)$ — решение краевой задачи (1.3), то $\cos x(t)$ — четная π -периодическая функция. Поэтому, исследуя устойчивость решений x_2 , $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{2/1}^{(r)}$ ($r = 0, 1$), можно взять $T = \pi$. Области устойчивости этих решений — участки поверхности S , ограниченные кривыми, на которых $|A| = 1$. Обозначим эти кривые через Γ_m^+ , Γ_m^- ($m = 1, 2$). На кривой

Γ_m^+ (Γ_m^-) уравнение (3.1) имеет четное (нечетное) πm -периодическое решение. Таким образом, $A = 1$ на кривых Γ_1^+ и Γ_1^- , $A = -1$ на кривых Γ_2^+ и Γ_2^- . Построение кривых Γ_m^+ , Γ_m^- сводится к решению следующих краевых задач для системы уравнений (1.1), (3.1):

$$(3.4) \quad x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (\Gamma_1^+)$$

$$x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (\Gamma_1^-)$$

$$x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (\Gamma_2^+)$$

$$x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (\Gamma_2^-)$$

Здесь в скобках указана кривая, получаемая в результате решения данной краевой задачи. Проекция кривых Γ_m^+ , Γ_m^- на плоскость (e, μ) обозначим соответственно через γ_m^+ , γ_m^- . Расположение кривых γ_m^+ , γ_m^- в области E показано на фиг. 2. Кривых γ_2^+ не оказалось. Точки пересечения кривых γ_1^+ с осью $\mu = 0$ определяются уравнением $J_0(e) = 0$, где $J_0(e)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Для дальнейшего представляют интерес кривые γ_1^+ и γ_1^- , выходящие из точки $P_0 (e = 0, \mu = 4)$. Они пересекаются в точке $P_1 (e = 6.43, \mu = 7.17)$ и при $e \ll 1$ задаются уравнениями

$$\mu = 4 + \frac{1}{9}e^2 - \frac{41}{38880}e^4 + O(e^6) \quad (\gamma_1^+)$$

$$\mu = 4 + \frac{1}{9}e^2 - \frac{59}{38880}e^4 + O(e^6) \quad (\gamma_1^-)$$

Кривые γ_1^+ , γ_1^- , γ_2^- ограничивают проекции на плоскость (e, μ) областей устойчивости решений x_z , $x_{1/1}^{(r)}$, $x_{2/1}^{(r)}$. На фиг. 2 проекции этих областей заштрихованы. При некоторых e и μ существует несколько рассматриваемых решений. На фиг. 1 участки устойчивости этих решений заштрихованы.

Устойчивость решений $x_{2/1}^{(r)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(r)}$ исследуется аналогично. В силу двух последних соотношений (2.1)

$$\begin{aligned} \cos x_{2/1}^{(0)}(t + \pi, e) &= \cos x_{2/1}^{(1)}(t, e), \quad \cos \bar{x}_{2/1}^{(0)}(t + \pi, e) = \\ &= \cos \bar{x}_{2/1}^{(1)}(t, e) \end{aligned}$$

поэтому решения $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$, $(\bar{x}_{2/1}^{(0)}, \bar{x}_{2/1}^{(1)})$ устойчивы или неустойчивы одновременно. Область устойчивости решений $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$, $(\bar{x}_{2/1}^{(0)}, \bar{x}_{2/1}^{(1)})$ указана на фиг. 4 горизонтальной (вертикальной) штриховкой.

4. Ветвление 2π -периодических решений. Уравнение поверхности S в пространстве (α, e, μ) , используя функцию $X(t, \alpha, e, \mu)$ из п. 2, можно записать в виде $X(\pi/2, \alpha, e, \mu) = 0$. Кривые, лежащие на поверхности S , в точках которых касательная плоскость к S параллельна оси α , задаются уравнениями

$$(4.1) \quad X(\pi/2, \alpha, e, \mu) = 0, \quad \partial X(\pi/2, \alpha, e, \mu)/\partial \alpha = 0$$

Проекция этих кривых на плоскость (e, μ) — кривые разветвления краевой задачи (1.3). Функции $x = X(t, \alpha, e, \mu)$, $y = \partial X(t, \alpha, e, \mu)/\partial \alpha$

на кривых (4.1) удовлетворяют последним из условий (3.4), следовательно, рассматриваемые кривые разветвления являются кривыми γ_2^- . Аналогично можно доказать, что проекция линии пересечения поверхностей S и S' (\bar{S} и \bar{S}') на плоскость (e, μ) — кривая γ_1^- (γ_1^+).

Ветвление 2π -периодических решений уравнения (1.1) на кривых γ_2^- аналогично ветвлению 2π -периодических решений уравнения, изучавшегося в [6], и здесь рассматриваться не будет. Исследуем только ветвление 2π -периодических решений на кривых γ_1^+ , γ_1^- , выходящих из точки P_0 . Пусть точка (α_*, e_*, μ_*) лежит на кривой Γ_1^+ или Γ_1^- , $x_*(t) = X(t, \alpha_*, e_*, \mu_*)$. Тогда с помощью обозначений

$$\begin{aligned} q &= x - x_*(t), \quad \varepsilon = e - e_*, \quad \delta = \mu - \mu_*, \quad f(t) = \\ &= \mu_* \cos x_*(t) \\ H(q, t, \varepsilon, \delta) &= \varepsilon \sin t + \mu_* \sin x_*(t) - (\mu_* + \delta) \sin [x_*(t) + \\ &+ q] + \mu_* q \cos x_*(t) \end{aligned}$$

уравнение (1.1) можно записать в виде

$$(4.2) \quad q'' + f(t)q = H(q, t, \varepsilon, \delta)$$

Здесь

$$(4.3) \quad f(t + \pi) = f(t), \quad H(q, t + \pi, \varepsilon, \delta) = -H(-q, t, \varepsilon, \delta)$$

$$(4.4) \quad f(t) = f(-t), \quad H(q, t, \varepsilon, \delta) = -H(-q, -t, \varepsilon, \delta)$$

Функция $H(q, t, \varepsilon, \delta)$ — аналитическая по q, ε, δ в точке $q = \varepsilon = \delta = 0$, причем $H(q, t, \varepsilon, \delta) = O(q^2 + |\varepsilon| + |\delta|)$. Исследование 2π -периодических решений уравнения (1.1), переходящих при $e = e_*$, $\mu = \mu_*$ в решение $x_*(t)$, эквивалентно исследованию 2π -периодических решений уравнения (4.2), переходящих при $\varepsilon = \delta = 0$ в нуль. Такое исследование проводится по-разному в зависимости от выполнения условия (3.2). Как показали вычисления, это условие нарушается только в точках P_0 и P_1 .

Рассмотрим произвольную точку кривых γ_1^+ , γ_1^- , отличную от точек P_0 и P_1 . В этой точке линейно-независимые решения уравнения

$$(4.5) \quad u'' + f(t)u = 0$$

можно взять в виде

$$(4.6) \quad u_1(t) = u(t), \quad u_2(t) = u(t)t + v(t)$$

Здесь $u(t)$ и $v(t)$ — π -периодические функции, причем $u(t)$ на кривой γ_1^+ — четная, а на кривой γ_1^- — нечетная. Рассмотрим вспомогательную систему

$$q'' + f(t)q = H(q, t, \varepsilon, \delta) - pu(t), \quad \int_0^{2\pi} u(t)q dt = a$$

где q — неизвестная функция, p — неизвестная постоянная, a — произвольная постоянная. При достаточно малых $|a|, |\varepsilon|, |\delta|$ эта система имеет [3] единственное 2π -периодическое по t решение

$$(4.7) \quad q = q_*(t, a, \varepsilon, \delta), \quad p = p_*(a, \varepsilon, \delta)$$

аналитически зависящее от a, ε, δ и удовлетворяющее условиям $q_*(t, 0, 0, 0) = 0$, $p_*(0, 0, 0) = 0$. Определение 2π -периодических решений уравнения (4.2), переходящих

при $\varepsilon = \delta = 0$ в нуль, эквивалентно [3] отысканию корней $a = a(\varepsilon, \delta)$ уравнения

$$(4.8) \quad p_*(a, \varepsilon, \delta) = 0$$

таких, что $a(0, 0) = 0$. Пусть $a(\varepsilon, \delta)$ — корень уравнения (4.8) и $a(0, 0) = 0$. Тогда $q = q_*[t, a(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta]$ — 2π -периодическое решение уравнения (4.2). Характеристические показатели λ этого решения имеют вид

$$\lambda^2 = \frac{M^2}{2\pi W} \frac{\partial p_*[a(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta]}{\partial a} [1 + o(1)]$$

$$M = \int_0^{2\pi} u^2(t) dt, \quad W = u^2 + u \cdot v - uv' = \text{const}$$

(через $o(1)$ обозначена функция ε, δ , стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$; W — вронскиан функций (4.6)).

Укажем некоторые свойства решения (4.7). Используя соотношения (4.3) и π -периодичность функции $u(t)$, можно доказать, что

$$(4.9) \quad q_*(t + \pi, a, \varepsilon, \delta) = -q_*(t, -a, \varepsilon, \delta), \quad p_*(a, \varepsilon, \delta) = -p_*(-a, \varepsilon, \delta)$$

В силу (4.4) и свойств четности функции $u(t)$ имеем

$$(4.10) \quad q_*(t, a, \varepsilon, \delta) = -q_*(-t, a, \varepsilon, \delta), \quad (\alpha_*, e_*, \mu_*) \in \Gamma_1^-$$

$$(4.11) \quad q_*(t, a, \varepsilon, \delta) = -q_*(-t, -a, \varepsilon, \delta), \quad (\alpha_*, e_*, \mu_*) \in \Gamma_1^+$$

Вследствие (4.9) $p_*(a, \varepsilon, \delta) = a\varphi(a^2, \varepsilon, \delta)$, где $\varphi(z, \varepsilon, \delta)$ — аналитическая функция z, ε, δ в точке $z = \varepsilon = \delta = 0, \varphi(0, 0, 0) = 0$. Уравнение (4.8) имеет тривиальный корень $a = 0$, которому отвечает нечетное π -антипериодическое (ср. (4.9) — (4.11)) решение уравнения (4.2) $q_0(t, \varepsilon, \delta) = q_*(t, 0, \varepsilon, \delta)$, удовлетворяющее условию

$$(4.12) \quad (x_*'(0) + q_0'(0, \varepsilon, \delta), e_* + \varepsilon, \mu_* + \delta) \in S$$

При $a \neq 0$ уравнение (4.8) переходит в уравнение

$$(4.13) \quad \varphi(a^2, \varepsilon, \delta) = 0$$

Представим функцию $\varphi(z, \varepsilon, \delta)$ в виде $\varphi(z, \varepsilon, \delta) = \varphi_{100}z + \varphi_{010}\varepsilon + \varphi_{001}\delta + O(z^2 + \varepsilon^2 + \delta^2)$. Как показали вычисления, во всех точках кривых γ_1^+, γ_1^- (в том числе и точках P_0 и P_1) $\varphi_{010}^2 + \varphi_{001}^2 > 0, \varphi_{100} \neq 0$. Согласно теореме о неявной функции при достаточно малых $|a|, |\varepsilon|, |\delta|$, уравнение (4.13) эквивалентно уравнению

$$(4.14) \quad a^2 = h(\varepsilon, \delta)$$

где $h(\varepsilon, \delta) = -\varphi_{100}^{-1}(\varphi_{010}\varepsilon + \varphi_{001}\delta) + O(\varepsilon^2 + \delta^2)$ — аналитическая функция ε, δ в точке $\varepsilon = \delta = 0$. Так как $\varphi_{010}^2 + \varphi_{001}^2 > 0$, точка $\varepsilon = \delta = 0$ не является особой точкой кривой $h(\varepsilon, \delta) = 0$. В области $\{\varepsilon, \delta : h(\varepsilon, \delta) > 0\}$ уравнение (4.14) имеет два действительных корня $a_1(\varepsilon, \delta) = [h(\varepsilon, \delta)]^{1/2}, a_2(\varepsilon, \delta) = -a_1(\varepsilon, \delta)$, которым отвечают решения $q_j(t, \varepsilon, \delta) = q_*[t, a_j(\varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta]$ ($j = 1, 2$). Эти решения связаны соотношением $q_2(t, \varepsilon, \delta) = -q_1(t + \pi, \varepsilon, \delta)$.

Если $(\alpha_*, e_*, \mu_*) \in \Gamma_1^-$, то $q_j(t, \varepsilon, \delta) = -q_j(-t, \varepsilon, \delta)$ и

$$(x_*'(0) + q_j'(0, \varepsilon, \delta), e_* + \varepsilon, \mu_* + \delta) \in S' \quad (j = 1, 2)$$

Если $(\alpha_*, e_*, \mu_*) \in \Gamma_1^+$, то $q_j(-t + \pi/2, \varepsilon, \delta) = q_j(t + \pi/2, \varepsilon, \delta)$ и

$$\left(x_*\left(\frac{\pi}{2}\right) + q_j\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, \delta\right), e_* + \varepsilon, \mu_* + \delta\right) \in S' \quad (j = 1, 2)$$

Характеристические показатели решений q_0, q_1, q_2 имеют вид

$$\lambda^2 = -\frac{M^2\varphi_{100}}{2\pi W} h(\varepsilon, \delta)[1 + o(1)] \quad (q_0)$$

$$\lambda^2 = \frac{M^2\varphi_{100}}{\pi W} h(\varepsilon, \delta)[1 + o(1)] \quad (q_1, q_2)$$

Отсюда следует, что исследуемая кривая γ_1^+ или γ_1^- в плоскости (ε, δ) задается уравнением $h(\varepsilon, \delta) = 0$. Она является границей области устойчивости решения q_0 и кривой разветвления решений q_1, q_2 . На этой кривой $q_0 = q_1 = q_2$. Решения q_1, q_2 устойчивы или неустойчивы одновременно. Если они устойчивы (неустойчивы), то в области существования этих решений решение q_0 неустойчиво (устойчиво). Вронскиан функций (4.6) в точке P_1 меняет знак, проходя через бесконечность. Полученные результаты позволяют проконтролировать численное исследование устойчивости решений $x_2, x_{2/1}^{(r)}, \bar{x}_{2/1}^{(r)}$ ($r = 0, 1$) в окрестности кривых γ_1^+, γ_1^- (ср. расположение заштрихованных областей на фиг. 2, 4, 5).

Исследуем теперь ветвление 2π -периодических решений в окрестности точек P_0 и P_1 . В этих точках линейно-независимые решения уравнения (4.5) $u_1(t), u_2(t)$ являются π -периодическими. Выберем их так, чтобы $u_1(t)$ было четным, а $u_2(t)$ — нечетным. Рассмотрим вспомогательную систему

$$q'' + f(t)q = H(q, t, \varepsilon, \delta) - p_1 u_1(t) - p_2 u_2(t)$$

$$\int_0^{2\pi} u_1(t) q dt = a_1, \quad \int_0^{2\pi} u_2(t) q dt = a_2$$

Здесь q — неизвестная функция; p_1, p_2 — неизвестные постоянные; a_1, a_2 — произвольные постоянные. При достаточно малых $|a_1|, |a_2|, |\varepsilon|, |\delta|$ эта система имеет [3] единственное 2π -периодическое по t решение

$$(4.15) \quad q = \bar{q}_*(t, a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

$$p_1 = p_1^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta), \quad p_2 = p_2^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

аналитически зависящее от $a_1, a_2, \varepsilon, \delta$ и удовлетворяющее условиям $\bar{q}_*(t, 0, 0, 0, 0) = 0, p_j^*(0, 0, 0, 0) = 0$ ($j = 1, 2$). Определение 2π -периодических решений уравнения (4.2), переходящих при $\varepsilon = \delta = 0$ в нуль, эквивалентно [3] отысканию корней $a_1 = a_1(\varepsilon, \delta), a_2 = a_2(\varepsilon, \delta)$ системы

$$(4.16) \quad p_1^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = 0, \quad p_2^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = 0$$

таких, что $a_1(0, 0) = a_2(0, 0) = 0$.

Для решения (4.15) справедливы соотношения

$$(4.17) \quad \bar{q}_*(t + \pi, a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = -\bar{q}_*(t, -a_1, -a_2, \varepsilon, \delta)$$

$$\bar{q}_*(t, a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = -\bar{q}_*(-t, -a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

$$p_j^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = -p_j^*(-a_1, -a_2, \varepsilon, \delta) \quad (j = 1, 2)$$

$$p_1^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = -p_1^*(-a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

$$p_2^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = p_2^*(-a_1, a_2, \varepsilon, \delta)$$

доказываемые аналогично соотношениям (4.9) — (4.11). В силу (4.17)

$$p_j^*(a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = a_j \varphi_j(a_1^2, a_2^2, \varepsilon, \delta) \quad (j = 1, 2)$$

где $\varphi_j(z_1, z_2, \varepsilon, \delta)$ — аналитические функции $z_1, z_2, \varepsilon, \delta$ в точке $z_1 = z_2 = \varepsilon = \delta = 0, \varphi_j(0, 0, 0, 0) = 0$. Система (4.16) имеет тривиальные корни $a_1 = a_2 = 0$, которым отвечает нечетное π -антипериодическое решение уравнения (4.2) $q_0(t, \varepsilon, \delta) = \bar{q}_*(t, 0, 0, \varepsilon, \delta)$, удовлетворяющее условию (4.12).

В точке P_0 имеем $x_*(t) = 0, H(q, t + \pi, \varepsilon, \delta) = H(q, t, -\varepsilon, \delta)$. В силу последнего равенства $\bar{q}_*(t + \pi, a_1, a_2, \varepsilon, \delta) = \bar{q}_*(t, a_1, a_2, -\varepsilon, \delta)$ и, следовательно, $q_0(t, \varepsilon, \delta) = -q_0(t, -\varepsilon, \delta), q_0(t, 0, \delta) = 0$. Таким образом, $q_0 = x_2$ при $\delta \neq 0$. Решение q_0 — продолжение решения x_2 в устранимую особую точку P_0 .

Не проводя общего исследования системы (4.16), укажем ее корни, отвечающие решениям $x_{2/1}^{(r)}, \bar{x}_{2/1}^{(r)}$ ($r = 0, 1$). При $a_1 = a \neq 0, a_2 = 0$ эта система переходит в уравнение

$$(4.18) \quad \varphi_1(a^2, 0, \varepsilon, \delta) = 0$$

а функция $q_*(t, a, \varepsilon, \delta) = \bar{q}_*(t, a, 0, \varepsilon, \delta)$ в силу (4.17) удовлетворяет соотношению (4.11). Аналогично при $a_1 = 0, a_2 = a \neq 0$ система (4.16) переходит в уравнение

$$(4.19) \quad \varphi_2(0, a^2, \varepsilon, \delta) = 0$$

а для функции $q_*(t, a, \varepsilon, \delta) = \bar{q}_*(t, 0, a, \varepsilon, \delta)$ справедливо равенство (4.10). Ветвление периодических решений в этих случаях аналогично ветвлению периодических решений в точках кривых γ_1^+ , γ_1^- , не совпадающих с точками P_0 , P_1 . Решения уравнения (1.1), отвечающие корням уравнений (4.18), (4.19), являются соответственно решениями $\bar{x}_{2/1}^{(r)}$, $x_{2/1}^{(r)}$.

Выше были исследованы кривые γ_1^+ и γ_1^- , выходящие из точки P_0 . Аналогично можно показать, что остальные кривые γ_1^+ (фиг. 2) являются кривыми разветвления 2π -периодических решений уравнения (1.1), численное построение которых сводится к решению краевой задачи (2.3). Эти решения не существуют при $\varepsilon \ll 1$.

Поступила 29 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Кац А. М. Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких консервативным. ПММ, 1955, т. 19, вып. 1.
3. Hölder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik. Math. Zeit., 1929, Bd31.
4. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
5. Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжевский А. П. Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты. Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 5.
6. Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 6.