Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531 : 534.01

ПРИМЕРЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ОКРЕСТНОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Исследуемые в работе механические системы можно рассматривать как совокупность слабо связанных нелинейных осцилляторов, находящихся под воздействием автономных сил различной природы (например диссипативных сил) и периодических возмущений. Предлагаются два алгоритма построения приближенного общего решения уравнений их движения, лежащего в окрестности состояния равновесия или периодического движения и пригодного на больших интервалах времени. Оба алгоритма основаны на идее групповых преобразований, затрагивающих частоты.

В первом из них (алгоритме 1) используется однопараметрическая группа симметрии уравнений движения, осуществляющая сдвиг малого параметра вплоть до обращения его в нуль. Это приводит исходную нелинейную систему в линейную с измененными частотами. Последняя легко интегрируется. Искомое решение восстанавливается при помощи рядов Ли.

Алгоритм 1 применим в случаях, когда полномерная окрестность исследуемого режима заполнена почти-периодическими движениями, что редко бывает при наличии в системе резонансов. При помощи этого алгоритма в работе получены нерезонансные решения уравнений Дюффинга, Матье, уравнений движения упругого маятника и уравнений плоских колебаний спутника на эллиптической орбите. Если колебания в окрестности исследуемого стационарного режима сопровождаются экспоненциальной раскачкой или затуханием, чем характеризуются и резонансные движения, то применим алгоритм 2.

В этом случае используемая группа симметрии сохраняет малый параметр, так что при каждом его фиксированном значении любое преобразование группы переводит множество решений в себя. Если размерность группы и исходной системы уравнений совпадают, действие группы оказывается транзитивным и из тривиального решения получаются все остальные, лежащие в его окрестности.

Возможность исследования тонких ситуаций, возникающих при резонансах, появляется благодаря тому, что используемые при этом определяющие уравнения Ли для векторного поля группы линейны и однородны (построения осуществляются в терминах алгебр Ли). Если эти уравнения в частных производных рассматривать лишь вдоль ведущего движения, то они превращаются в хорошо известные в теории устойчивости движения уравнения в вариациях.

Без уравнений в вариациях невозможно найти характеристические показатели решений в первом приближении. В такой же мере, без уравнений Ли, обобщающих уравнения в вариациях, нельзя, по-видимому, обойтись при получении разложений и показателей экспонент в дальнейших приближениях.

Алгоритм 2 использован в работе для построения асимптотических решений уравнений Ван-дер-Поля, Матье и Дюффинга.

Отметим, что предлагаемые алгоритмы основаны на сочетании идеи сдвига частот, восходящей к Линштедту и Пуанкаре [1], с групповым подходом к задаче построения асимптотических решений. Групповые аспекты различных задач динамики отмечались в работах [2, 3] и многих других [1].

Задачам построения решений, пригодных на больших интервалах времени, посвящена большая литература по методам возмущений [4, 5]. Асимптотические методы сводят задачу к новой системе уравнений, которая не всегда может быть проинтегрирована. Зато если удается, эту систему проинтегрировать, получается приближенное описание движения во всём фазовом пространстве.

В отличие от этого предлагаемые в данной работе теоретико-групповые приемы приводят в описанных ситуациях к простым последовательно интегрируемым системам, которые дают, однако, решение лишь локальной задачи: построение общего решения в окрестности исследуемого режима.

1. Постановка задачи и описание алгоритмов. Рассматриваемые системы описываются уравнениями

$$x_k^{\bullet} = -\omega_k y_k + \varepsilon g_k(x, y, t, \varepsilon) \tag{1.1}$$
$$y_k^{\bullet} = \omega_k x_k + \varepsilon h_k(x, y, t, \varepsilon), \quad k \leqslant n$$

Здесь частоты ω_k — вещественные числа, ε — малый параметр, g_k, h_k — аналитические функции всех своих аргументов, 2π-периодичны по t либо от t не зависят. Без нарушения общности

$$g_k(0, 0, t, \varepsilon) = h_k(0, 0, t, \varepsilon) = 0$$

Ставится задача о получении в окрестности положения равновесия общего (полномерного) формального решения в виде разложения по малому параметру, не содержащего вековых членов.

Систему уравнений (1.1) целесообразно записать в комплексной форме. Полагая $z_k = x_k + iy_k$, $f_k = g_k + ih_k$, получим

$$z_k^{\bullet} = i\omega_k z_k + \varepsilon f_k(z, \bar{z}, t, \varepsilon), \quad k \leqslant n \tag{1.2}$$

Сопряженная система не выписывается, поскольку она не понадобится в дальнейшем: ввиду наличия малого параметра главными членами правых частей уравнений являются выражения $i\omega_k z_k$, что сокращает число уравнений вдвое.

Алгоритм 1. Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований, осуществляющую сдвиг малого параметра $\varepsilon' = \varepsilon + \tau$ (τ — канонический параметр группы) и преобразующую систему (1.2) в себя

$$z_k'^{\bullet} = i\omega_k' z_k' + \varepsilon' f_k(z', \bar{z}', t, \varepsilon')$$

Группа не затрагивает время t, но преобразует частоты ω_k. Если в указанных преобразованиях положить $\tau = -\varepsilon$, получим $\varepsilon' = 0$, и система (1.2) приведется к виду

$$z_k'^{\bullet} = i\Omega_k z'^{\bullet}_k, \quad \Omega_k = \omega_k' |_{\tau=-\varepsilon}$$

Условие инвариантности уравнений (1.2) удобно формулировать

[1] *Богоявленский А. А., Емельянова И. С., Мархашов Л. М., Павловский Ю. Н., Яковенко Г. Н.* Групповые методы исследования уравнений механики систем конечного числа степеней свободы. III Всесоюзная четаевская конференция по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением. Тезисы докладов, Иркутск, 1977.

в терминах алгебр Ли

(1.3) $[D_\omega, Z] = 0$

$$D_\omega = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left[(i\omega_k z_k + f_k) \frac{\partial}{\partial z_k} + (-i\omega_k \bar{z}_k + \bar{f}_k) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right]$$

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \left[\psi_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\psi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} + \zeta_{\omega_k} \frac{\partial}{\partial \omega_k} \right] + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

Здесь D_ω — оператор сдвига вдоль траектории системы (1.2), Z — инфинитезимальный оператор группы; [*, *] — коммутатор.

Функции преобразования частот $\zeta_{\omega_k}^{*}$ нужно подбирать таким образом, чтобы после подстановки ω_k как функций Ω_k в выражения для ψ_k в последних исчезли вековые члены. Этого легче всего добиться заменой частот непосредственно в уравнениях движения еще до составления условия коммутирования (1.3). Именно, рассмотрим вместо уравнений (1.2) новые уравнения.

(1.4) $z_k^{\cdot} = i\chi_k z_k + \varepsilon f_k (z, \bar{z}, t, \varepsilon), \quad k \leqslant n$

(1.5) $\chi_k = \Omega_k + \alpha_{k1}\varepsilon + \alpha_{k2}\varepsilon^2 + \ldots$

Здесь Ω_k — новые параметры (частоты), α_{kj} — функции частот, подбираемые таким образом, чтобы на всех этапах интегрирования не появлялось вековых членов в разложениях; α_{kj} могут также зависеть и от переменных z_k, $\bar{z}_k$, t. В этом случае потребуем, чтобы α_{kj} оставались постоянными вдоль решений системы (1.4)

(1.6) $D\chi_k = 0, \quad D = D_\omega \,|_{\omega_k \to \chi_k}$

где D — оператор сдвига вдоль траекторий системы (1.4).

Если теперь положить

(1.7) $\omega_k = \chi_k (\Omega, \varepsilon)$

то в силу условия (1.6) каждое решение системы (1.4) с параметрами Ω_k будет некоторым решением системы (1.4) с параметрами ω_k, и Ω_k будут определены как неявные функции ω_k. После преобразования частот и перехода к уравнениям (1.4) оператор группы приобретет вид

$$Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\psi_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\psi}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \equiv X + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

Условие коммутирования

(1.8) $[D, Y] = 0$ или $[D, X] = \partial D \,/\, \partial \varepsilon$

Уравнение (1.8) в координатах дает определяющие уравнения

(1.9) $D\psi_k = i\chi_k\psi_k + iz_k X\chi_k + \varepsilon X f_k + iz_k \dfrac{\partial \chi_k}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon f_k)$

Их решение будем искать в виде рядов

$$\psi_k = \psi_{k0} + \varepsilon\psi_{k1} + \varepsilon^2\psi_{k2} + \ldots$$

Операторы и функции f_k представим в виде

$$D = D_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \varepsilon^\mu D_\mu, \quad X = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varepsilon^\mu X_\mu, \quad f_k = \sum_{\mu=0}^{\infty} \varepsilon^{\mu-1} f_{k\mu} \tag{1.10}$$

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(i\Omega_k z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - i\Omega_k \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right),$$

$$X_\mu = \sum_{k=1}^{n} \left(\psi_{k\mu} \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\psi}_{k\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$$

$$D_\mu = \sum_{k=1}^{n} \left[(i\alpha_{k\mu} z_k + f_{k\mu}) \frac{\partial}{\partial z_k} + (-i\alpha_{k\mu} \bar{z}_k + \bar{f}_{k\mu}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right]$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1.6), (1.9) и приравнивая нулю совокупности слагаемых с одинаковыми степенями ε, получим уравнения

$$D_0 \psi_{ks} = i\Omega_k \psi_{ks} + \sum_{\mu+\nu=s-1} (i\alpha_{k\mu} \psi_{k\nu} + D_\mu \psi_{k\nu}) + \sum_{\mu+\nu=s} X_\mu f_{k\nu} + \tag{1.11}$$

$$+ iz_k \left((s+1) \alpha_{k,s+1} + \sum_{\mu+\nu=s} X_\mu \alpha_{k\nu} \right) + (s+1) f_{k,s+1}$$

$$D_0 \alpha_{ks} = -\sum_{\mu+\nu=s} D_\mu \alpha_{k\nu}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.12}$$

используемые в дальнейшем для последовательного нахождения функций ψ_{ks}.

Уравнения (1.11), (1.12) последовательно интегрируются при начальных условиях $\psi_{ks}(z, \bar{z}, 0) = 0$ (начальные условия можно выбирать и так, чтобы выражения для функций ψ_{ks} получались проще). Функции $\alpha_{k\nu}$ последовательно подбираются так, чтобы функции ψ_{ks} не содержали вековых членов. После того, как функции ψ_k будут найдены, конечные преобразования группы определяются рядами Ли

$$z_k' = z_k + \tau\psi_k + \frac{\tau^2}{2!} Y\psi_k + \frac{\tau^3}{3!} Y^2 \psi_k + \ldots$$

в которых следует положить $\tau = -\varepsilon$.

Общее решение системы (1.2) получим по формулам

$$z_k = z_k' \big|_{z_k = z_k^\circ \exp(i\Omega_k t)}$$

Здесь z_k° — начальные условия для z_k. Величины частот Ω_k получим, обращая формулы (1.5).

Групповое происхождение величин Ω_k позволяет доказать обратимость формул (1.5) относительно исходных частот ω_k.

Пусть исходная система имеет второй порядок, а функции преобразования частот ζ_{ω_k} зависят лишь от ω и ε. Преобразованная частота определяется рядом Ли по формуле

$$\omega' = \omega + \tau\zeta_\omega(\omega, \varepsilon) + \frac{\tau^2}{2!} \left(\zeta_\omega \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial \omega} + \frac{\partial \zeta_\omega}{\partial \varepsilon} \right) + \ldots \tag{1.13}$$

исходная частота — ее обращением

$$\omega = \omega' - \tau\zeta_\omega(\omega', \varepsilon') + \frac{\tau^2}{2!}\left(\zeta_\omega \frac{\partial\zeta_\omega}{\partial\omega'} + \frac{\partial\zeta_\omega}{\partial\varepsilon'}\right) + \ldots \tag{1.14}$$

Частота Ω линейной системы, в которую переходит исходная, определяется формулой (1.13) при $\tau = -\varepsilon$, частота ω — формулой (1.14) при $\varepsilon' = 0$, $\omega' = \Omega$, $\tau = -\varepsilon$.

Поскольку

$$\zeta_\omega(\Omega, 0) = \alpha_1, \quad \frac{1}{2!}\left(\zeta_\omega \frac{\partial\zeta_\omega}{\partial\omega'} + \frac{\partial\zeta_\omega}{\partial\varepsilon'}\right)\bigg|_{\varepsilon'=0,\ \omega'=\Omega} = \alpha_2, \ldots$$

в точке $(\Omega, 0)$ может быть определена функция ζ_ω и все ее производные

$$\frac{\partial\zeta_\omega}{\partial\varepsilon'} = 2!\alpha_2 - \zeta_\omega \frac{\partial\zeta_\omega}{\partial\omega'}, \ldots$$

После этого строится ряд для функции $\zeta_\omega(\omega, \varepsilon)$ и всех ее производных, а следовательно, и ряд для Ω.

Вопрос о сходимости получаемых разложений в этой работе не затрагивается. Полезно, однако, отметить, что получаемые при помощи алгоритма 1 ряды, представляющие решение уравнений (1.2), будут сходящимися всякий раз, когда сходятся ряды χ_k для частот. Это непосредственно следует из аналитичности правых частей уравнений (1.4) и начальных условий для ψ_k.

Алгоритм 2. Пусть в системе (1.2) собственные частоты ω_k связаны l резонансными соотношениями и, следовательно, имеется $h = n - l$ базовых частот $\omega_1, \ldots, \omega_h$

$$\omega_{h+\sigma} = \gamma_{\sigma 1}\omega_1 + \ldots + \gamma_{\sigma h}\omega_h, \quad \sigma = 1, \ldots, l$$

где $\gamma_{\sigma j}$ — рациональные числа. Эти соотношения могут выполняться как точно, так и приближенно (с точностью до некоторой степени ε).

Собственные частоты могут резонировать также с возмущающей частотой 1.

Как и в алгоритме 1, вводим ряды

$$\chi_k = \Omega_k + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{k\mu}\varepsilon^\mu, \quad D\chi_k = 0, \quad k \leqslant n$$

При этом соотношения

$$\Omega_{h+\sigma} = \sum_{j=1}^{h} \gamma_{\sigma j}\Omega_j, \quad \sigma \leqslant l$$

выполнены уже точно.

Если какая-либо из частот, например ω_1, резонирует с единицей, то полагаем $\Omega_1 = p/q$, где p, q — целые числа, соответствующие резонансу. В случаях, когда функции $\alpha_{k\mu}$ зависят от z, $\bar{z}$, t, будем требовать выполнения условий (1.6), т. е. $D\chi_k = 0$.

Рассматриваются однопараметрические группы системы (1.4), преобразующие ее в себя, сохраняющие параметр ε ($\varepsilon' = \varepsilon$) и сдвигающие тривиальное решение $z = 0$.

Операторы таких групп имеют вид

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \left(\psi_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{\psi}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right), \quad Y|_{z=0} \neq 0$$

Коммутационное соотношение $[D, Y] = 0$ дает определяющие уравнения

$$D\psi_k = i\chi_k\psi_k + iz_kY\chi_k + \varepsilon Yf_k$$

которые линейны и однородны относительно ψ_j. Это позволяет ввести новые искомые функции $\psi_j = \xi_j e^{\Lambda t}$ (Λ — вещественная величина, $Y = e^{\Lambda t}X$) таким образом, что экспонента $e^{\Lambda t}$ в новые уравнения не войдет, т. е.

$$D\xi_k = (i\chi_k - \Lambda)\,\xi_k + iz_kX\chi_k + \varepsilon f_k \tag{1.15}$$

$$\Lambda = \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \ldots$$

Величины β_1, β_2, ... могут зависеть от z, $\bar{z}$, t (хотя часто оказываются просто вещественными числами). В этом случае предполагается выполнение условия

$$D\Lambda = 0 \tag{1.16}$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$X\Lambda = 0 \tag{1.17}$$

В противном случае, при восстановлении решения уравнения (1.2) по оператору Y, даже тогда, когда он не содержит вековых членов, в решении такие члены обязательно появятся.

Решение уравнения (1.15) ищем в виде рядов

$$\xi_k = \xi_{k0} + \varepsilon\xi_{k1} + \varepsilon^2\xi_{k2} + \ldots$$

Используя разложения (1.10) и приравнивая в уравнениях (1.6), (1.15) — (1.17) слагаемые при одинаковых степенях ε, получим последовательность уравнений

$$\begin{aligned} D_0\xi_{ks} &= i\Omega_k\xi_{ks} + \sum_{\mu+\nu=s-1} [(i\alpha_{k\mu} - \beta_\mu)\,\xi_{k\nu} + D_\mu\xi_{k\nu}] + \\ &+ \sum_{\mu+\nu=s\geqslant 1} X_\mu f_{k\nu} + iz_k \sum_{\mu+\nu=s} X_\mu\alpha_{k\nu} \\ D_0\alpha_{ks} &= -\sum_{\mu+\nu=s-1} D_\mu\alpha_{k\nu}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \\ D_0\beta_s &= \sum_{\mu+\nu=s-1} D_\mu\beta_\nu, \quad X_0\beta_s = -\sum_{\mu+\nu=s-1} X_\mu\beta_\nu \end{aligned} \tag{1.18}$$

Эти уравнения для искомых функций с номером s легко интегрируются, если функции с индексами $j < s$ уже найдены. Величины $\alpha_{k\mu}$, β_μ и начальные значения для функций $\xi_{k\nu}$ подбираются из условий уничтожения в уравнениях слагаемых, которые порождают вековые члены (резонансных слагаемых). Решения уравнений для ξ_{k0} выбираются в виде $\xi_{k0} = C_k \exp i\Omega_k t$ (C — комплексные постоянные). Такой выбор функций ξ_{k0} гарантирует сдвиг тривиального решения уравнений (1.2).

Если удастся найти n независимых решений системы (1.18), то требуемое транзитивное решение системы (1.15) получится, в силу ее линейности, в виде линейной комбинации этих решений (с постоянными коэффициентами).

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — такое решение, т. е.

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{n} l_k \psi_{jk}$$

Функции ψ_j определяют вещественную группу преобразований (локальную) размерности $2n$, конечные преобразования которой определяются рядами Ли

$$z_j' = z_j + \tau\psi_j + \frac{\tau^2}{2!} Y\psi_j + \frac{\tau^3}{3!} Y^2\psi_j + \ldots \tag{1.19}$$

ψ_j, $Y\psi_j$, $Y^2\psi_j$ будут соответственно линейными, квадратичными, кубическими однородными формами постоянных $l_1, \ldots, l_n$. Поэтому правые части равенств (1.19) оказываются функциями постоянных $l_k^* \equiv \tau l_k$: $z_k' = \Phi_k(z, \bar{z}, t, \varepsilon, l^*)$.

Искомое решение уравнений (1.2) в окрестности тривиального решения получим по формулам

$$z_k = \Phi_k(0, 0, t, \varepsilon, l^*) \tag{1.20}$$

Найденные при помощи описанных алгоритмов решения асимптотичны в следующем смысле. Пусть z_k — точное, а

$$z_k^{(m)} = z_{k0} + \varepsilon z_{k1} + \varepsilon^2 z_{k2} + \ldots + z_{km}\varepsilon^m$$

— приближенное решение, даваемое отрезками найденных рядов. Полагая $z_k - z_k^{(m-1)} = \varepsilon^m w_k$, $w_k \sim 1$, получим для разностей $z_k - z_k^{(m)}$ дифференциальные уравнения, правые части которых имеют $(m+1)$-й порядок малости. При помощи теоремы существования и единственности можно установить, что функции $| z_k(t) - z_k^{(m)}(t) |$ будут оставаться величинами порядка ε на временах порядка ε^{-m}. Та же теорема позволяет установить и все необходимые константы в оценках, в том числе и для начальных условий. Отметим, что получение оценок представляет собой отдельную задачу.

2. Ограниченные незатухающие колебания. Используем алгоритм 1 в приложении к уравнениям Дюффинга, Матье, уравнениям движения упругого маятника и уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите.

Уравнение Дюффинга имеет вид

$$x^{\cdot\cdot} + \omega^2 x = \varepsilon c x^3 + \lambda \sin t$$

Вводя комплексное переменное $z = x + iy$, $y = -x^{\cdot} / \omega$, получим

$$z^{\cdot} = i\omega z - i\varepsilon \frac{c}{8\omega}(z + \bar{z})^3 + \frac{\lambda}{2\omega}(e^{-it} - e^{-it}) \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1), как известно (см. [6], стр. 32), имеет единственное периодическое решение, которое в комплексной форме записывается в виде

$$w = \frac{i\lambda e^{-it}}{2\omega(1+\omega)} + \frac{i\lambda e^{it}}{2\omega(1-\omega)} + \varepsilon\left[\frac{ic\lambda^3}{8\omega(1-\omega^2)^3}\left(\frac{e^{-3it}}{3+\omega} + \frac{e^{3it}}{3-\omega}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{3ic\lambda^3}{8\omega(1-\omega^2)^3}\left(e^{it}\frac{1}{1-\omega} + e^{-it}\frac{1}{1+\omega}\right)\right] + \ldots \tag{2.2}$$

Найдем общее решение уравнения (2.1) в первом приближении, лежащее в окрестности периодического решения (2.1). Положив $z = w + u$

$$\omega = \Omega + \varepsilon\alpha_1 + \ldots \equiv \chi \tag{2.3}$$

приведем уравнение движения к виду

$$u^{\cdot} = i\Omega u + \varepsilon f_1 + \ldots \tag{2.4}$$

$$f_1 = -\frac{ic}{8\Omega}\left[(u+\bar{u})^3 + \frac{3i\lambda}{1-\Omega^2}(e^{it} - e^{-it})(u+\bar{u})^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{3\lambda^2}{(1-\Omega^2)^2}(e^{it} - e^{-it})^2(u+\bar{u})\right]$$

Теперь достаточно воспользоваться лишь первыми уравнениями системы (1.11)

$$D_0\psi_0 = i\Omega\psi_0 + i\alpha_1 u + f_1(u, \bar{u}, t), \quad D_0\alpha_1 = 0 \tag{2.5}$$

Для интегрирования этого (как и прочих уравнений системы (1.11)) удобно перейти к новым переменным $\gamma = ue^{-i\Omega t}$, $\bar{\gamma} = \bar{u}e^{i\Omega t}$ — интегралам уравнения $D_0\gamma = 0$. Тогда уравнение (2.5) запишется в легко интегрируемой форме

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = i\Omega\psi_0 + i\alpha_1\gamma e^{it} + f_1(\gamma e^{it}, \bar{\gamma}e^{-it}, t), \quad \frac{\partial\alpha_1}{\partial t} = 0 \tag{2.6}$$

Для того чтобы в выражении для ψ_0 не возникло вековых членов, α_1 необходимо взять в виде

$$\alpha_1 = \frac{3c}{8\Omega}\left(\gamma\bar{\gamma} - \frac{2\lambda^2}{(1-\Omega^2)^2}\right) \equiv \frac{3c}{8\Omega}\left(u\bar{u} - \frac{2\lambda^2}{(1-\Omega^2)^2}\right)$$

Обращая формулу (2.3), получим выражение для новой частоты

$$\Omega = \omega + \varepsilon\frac{3c}{8\omega}\left(\frac{2\lambda^2}{(1-\omega^2)^2} - u\bar{u}\right) + \ldots$$

причем, в силу условия $D\chi = 0$, $u\bar{u} = u_0\bar{u}_0 + O(\varepsilon)$, где $u_0 = u(0)$ — начальное значение u. Проинтегрировав уравнение (2.5) и вернувшись к переменному u, получим формулу преобразования $u' = u + \varepsilon\psi_0 + \ldots$ Правая часть этого равенства будет общим решением уравнения (2.4), если в ней положить $u = u_0e^{i\Omega t}$ (что равносильно условию $\gamma = u_0$). Таким образом, получим искомое общее решение

$$u = u_0e^{i\Omega t} + \varepsilon\frac{ic}{8\Omega}\left[-\frac{iu^3_0}{2\Omega}e^{3i\Omega t} + \frac{3iu_0\bar{u}_0^2}{2\Omega}e^{-i\Omega t} + \frac{i\bar{u}_0^3}{4\Omega}e^{-3i\Omega t} + \right.$$
$$+ \frac{3\lambda u_0^2}{(1-\Omega^2)(1+\Omega)}e^{-i(2\Omega+1)t} + \frac{6\lambda u_0\bar{u}_0}{(1-\Omega^2)(1-\Omega)}e^{i(2\Omega-1)t} +$$
$$+ \frac{3\lambda\bar{u}_0^2}{(1-\Omega^2)(1-3\Omega)}e^{i(1-2\Omega)t} + \frac{3\lambda\bar{u}_0^2}{(1-\Omega^2)(1+3\Omega)}e^{-i(2\Omega+1)t} +$$
$$+ \frac{6\lambda u_0\bar{u}_0}{(1-\Omega^2)(1-\Omega)}e^{-it} + \frac{6\lambda u_0\bar{u}_0}{(1-\Omega^2)(1+\Omega)}e^{-it} + \frac{3i\lambda^2u_0}{2(1-\Omega^2)^2}e^{i(\Omega+2)t} -$$
$$- \frac{3i\lambda^2u_0}{2(1-\Omega^2)^2}e^{i(\Omega-2)t} + \frac{3i\lambda^2\bar{u}_0}{2(1-\Omega^2)^2(1-\Omega)}e^{-i(\Omega-2)t} -$$
$$\left. - \frac{3i\lambda\bar{u}_0}{2(1-\Omega^2)^2(1+\Omega)}e^{-i(\Omega+2)t} - \frac{6i\lambda^2\bar{u}_0}{2\Omega(1-\Omega^2)^2}e^{-i\Omega t}\right] + \ldots$$

Ограниченность движений (в первом приближении), описываемых полученной формулой, согласуется с известным фактом устойчивости периодического движения (2.2) (см. [6], стр. 85).

Упругий маятник. Уравнения движения упругого маятника могут быть записаны в виде [6]

$$q_1'' = -\frac{mg}{cl_1} q_1 + \frac{l_0}{l_1}\left(-q_1 q_2 - \frac{1}{2} q_1^3 + q_1 q_2^2\right) + O(q^3)$$

$$q_2'' = -q_2 + \frac{l_0}{l_1}\left(-\frac{1}{2} q_1^2 + q_1^2 q_2\right) + O(q^3)$$

Здесь m, c — масса и жесткость маятника, g — ускорение свободного падения, l_0, l_1 — длины пружины в свободном состоянии и в положении равновесия маятника, q_1, q_2 — обобщенные координаты (линейные комбинации декартовых координат). Дифференцирование проводится по параметру $\tau = (c/m)^{1/2} t$.

Полагая $z_k = x_k + iy_k$, $x_1 = q_1$, $y_1 = -x_1^{\bullet} / \omega$, $x_2 = q_2$, $y_2 = -x_2^{\bullet}$, запишем уравнения движения в комплексной форме

$$z_1^{\bullet} = i\omega z_1 + \frac{i\gamma}{\omega}\left[\frac{\varepsilon}{4}(z_1 + \bar z_1)(z_2 + \bar z_2) + \frac{\varepsilon^2}{16}(-2(z_1 + \bar z_1)(z_2 + \bar z_2)^2 + \right.$$

$$\left. + (z_1 + \bar z_1)^3)\right]$$

$$z_2^{\bullet} = iz_2 + i\gamma\left[\frac{\varepsilon}{8}(z_1 + \bar z_1)^2 - \frac{\varepsilon^2}{8}(z_1 + \bar z_1)(z_2 + \bar z_2)\right] + \ldots$$

$$\omega^2 = \frac{mg}{cl_1}, \qquad \gamma = \frac{l_0}{l_1}$$

Малый параметр введен путем замены $z \to \varepsilon z$. Ставится задача описания движения маятника в окрестности положения равновесия во втором приближении. Используется алгоритм 1. Опуская подробности, приведем окончательный результат (z_{k0}° — произвольные постоянные)

$$z_1 = z_{10}^{\circ} e^{i\Omega_1\tau} - \frac{\gamma}{4\Omega_1\Omega_2} z_{10}^{\circ} z_{20}^{\circ} e^{i(\Omega_1+\Omega_2)\tau} - \frac{\gamma}{4\Omega_1} \frac{\bar z_{10}^{\circ} z_{20}^{\circ}}{\Omega_2 - 2\Omega_1} e^{i(\Omega_2-\Omega_1)\tau} +$$

$$+ \frac{\gamma \bar z_{20}^{\circ} z_{10}^{\circ}}{4\Omega_1\Omega_2} e^{i(\Omega_1-\Omega_2)\tau} + \frac{\gamma}{4\Omega_1} \frac{\bar z_{10}^{\circ} \bar z_{20}^{\circ}}{2\Omega_1 + \Omega_2} e^{i(\Omega_1+\Omega_2)\tau} + \ldots$$

$$z_2 = z_{20}^{\circ} e^{i\Omega_2\tau} - \frac{i\gamma}{4\Omega_2} z_{10}^{\circ} \bar z_{10}^{\circ} + \frac{i\gamma}{8} \frac{z_{10}^{\circ 2}}{2\Omega_1 - \Omega_2} e^{2i\Omega_1\tau} -$$

$$- \frac{i\gamma}{8} \frac{z_{10}^{\circ 2}}{2\Omega_1 + \Omega_2} e^{-2i\Omega_1\tau} + \ldots$$

$$\Omega_1 = \omega + \frac{\gamma}{4\omega}\left[\frac{z_{10}^{\circ} \bar z_{10}^{\circ}}{4}\left(3 - \gamma\frac{3 - 8\omega^2}{1 - 4\omega^2}\right) - z_{20}^{\circ} \bar z_{20}^{\circ}\left(1 + \frac{\gamma}{4\omega^2 - 1}\right)\right]$$

$$\Omega_2 = 1 - \frac{\gamma}{8} z_{10}^{\circ} \bar z_{10}^{\circ}\left(1 + \frac{2\gamma}{4\omega^2 - 1}\right)$$

Из формул виден главный резонанс: $2\omega = 1$.

Уравнение Матье. Если в уравнении Матье

$$x^{\bullet\bullet} + \omega^2 (1 - h\cos t)\, x = 0$$

положить $\omega h = 4\varepsilon$, $y = -x^{\bullet} / \omega$ и ввести комплексное переменное $z = x + iy$, то уравнение запишется в виде

$$z^{\bullet} = i\omega z + i\varepsilon (z + \bar z)(e^{it} + e^{-it}) \tag{2.7}$$

Найдем во втором приближении нерезонансное решение этого уравнения. При помощи алгоритма 1 получим

$$z = z_0 e^{i\Omega t} + \varepsilon\left(z_0 e^{i(\Omega+1)t} - z_0 e^{i(\Omega-1)t} - \frac{\bar{z}_0}{2\Omega-1} e^{-i(\Omega-1)t} - \right.$$
$$\left. - \frac{z_0}{2\Omega+1} e^{-i(\Omega+1)t}\right) + \varepsilon^2\left[\frac{\Omega z_0 e^{i(\Omega+2)t}}{2\Omega+1} - \frac{\Omega\bar{z}_0 e^{-i(\Omega+2)t}}{(\Omega+1)(2\Omega+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Omega z_0 e^{i(\Omega-2)t}}{2\Omega+1} + \frac{\Omega\bar{z}_0 e^{-i(\Omega-2)t}}{(2\Omega-1)(\Omega-1)} + \frac{2z_0 e^{-i\Omega t}}{4\Omega^2-1}\right]$$

С точностью до ε^3 включительно

$$\Omega = \omega + \frac{4\omega}{1-4\omega^2}\varepsilon^2$$

Спутник на эллиптической орбите. Уравнение плоских колебаний спутника относительно центра масс, когда последний движется по эллиптической орбите, имеет вид

$$(1 + e\cos v)\frac{d^2\alpha}{dv^2} - 2e\frac{d\alpha}{dv}\sin v + \mu\sin\alpha\cos\alpha = 2e\sin v \tag{2.8}$$

Здесь α — угол тангажа, v — истинная аномалия, e — эксцентриситет орбиты, $\mu = 3(A - C)/B$ — отношение главных моментов инерции спутника.

Полагая $x = 2\alpha$, уравнение движения можно записать в виде системы второго порядка. Комплексная запись этой системы (после разложения $\sin x$ в ряд)

$$z^{\cdot} = -i\mu^{1/2}a^{-1/2}z - \frac{3a'}{4a}(z - \bar{z}) + i\,\frac{\mu^{1/2}a^{-1/2}}{48}(z + \bar{z})^3 + \tag{2.9}$$
$$+ \frac{2}{a^2} - 2 + \ldots \quad (a = 1 + e\cos v)$$

Известно существование 2π-периодического решения уравнения (2.8), порождающим решением которого является $\alpha = 0$ [5].

Исследуем окрестность этого периодического решения вдали от главного резонанса $2\omega = 1$ в предположении малости эксцентриситета e. Использовав алгоритм 1, получим следующий результат ($z = \sqrt{e}\,u \equiv \varepsilon\, u$):

$$u = u_0 e^{i\Omega v} + \varepsilon\left(\frac{2i}{1-\Omega}e^{iv} - \frac{2i}{1+\Omega}e^{-iv}\right) + \varepsilon^2\left[-u_0\left(\frac{\Omega}{4} + \frac{3}{8}\right)e^{i(\Omega+1)v} + \right.$$
$$+ u_0\left(\frac{\Omega}{4} - \frac{3}{8}\right)e^{i(\Omega-1)v} + \frac{3\bar{u}_0}{8(2\Omega+1)}e^{-i(\Omega+1)v} + \frac{3\bar{u}_0}{8(1-2\Omega)}e^{-i(\Omega-1)v} -$$
$$\left. - \frac{u_0^3}{96}e^{3i\Omega v} + \frac{u_0\bar{u}_0^3}{32}e^{-i\Omega v} + \frac{\bar{u}_0^3}{192}e^{-3i\Omega v}\right] + \ldots$$

С точностью до ε^3 включительно (u_0 — произвольная постоянная)

$$-\Omega = \sqrt{\mu} - \varepsilon^2\frac{\sqrt{\mu}}{16}u_0\bar{u}_0 \quad (\sqrt{\mu} \equiv \omega > 1)$$

Таким образом, полномерная окрестность исследуемого периодического движения заполнена в вычисленном приближении почти-периодическими движениями, что согласуется с фактом устойчивости периодического движения [1].

3. Колебания, сопровождающиеся экспоненциальной раскачкой или затуханием. *Уравнения Ван-дер-Поля.* Пользуясь алгоритмом 2, найдем общее решение уравнения Ван-дер-Поля

$$x^{\cdot\cdot} + x = \varepsilon (1 - x^2) x^{\cdot}$$

в окрестности состояния покоя $x = x^{\cdot} = 0$. Перейдем к комплексному переменному $z = x + iy$, $y = - x^{\cdot}$ и, положив $z = \varepsilon u$, запишем уравнение в виде

$$u^{\cdot} = iu + \varepsilon f_1 + \varepsilon^3 f_3 \tag{3.1}$$

$$f_1 = {}^1/_2 (u - \bar{u}), \quad f_3 = {}^1/_8 (\bar{u}^3 + \bar{u}^2 u - \bar{u}u^2 - u^3)$$

Определяющие уравнения (1.18)

$$\begin{aligned} &D_0\xi_0 = i\Omega\xi_0 \\ &D_0\xi_1 = i\Omega\xi_1 - D_1\xi_0 + (i\alpha_1 - \beta_1)\, \xi_0 + X_0 f_1 \\ &D_0\xi_2 = i\, \Omega\xi_2 - D_1\xi_1 - D_2\xi_0 + (i\alpha_1 - \beta_1)\, \xi_1 + (i\alpha_2 - \\ &\quad - \beta_2)\, \xi_0 + X_1 f_1 \\ &D_0\xi_3 = i\Omega\xi_3 - D_1\xi_2 - D_2\xi_1 - D_3\xi_0 + (i\alpha_1 - \beta_1)\, \xi_2 + \\ &\quad + (i\alpha_2 - \beta_2)\, \xi_1 + (i\alpha_3 - \beta_3)\, \xi_0 + X_0 f_3 + X_2 f_1, \ \ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

(так как в результате вычислений оказалось, что α_3, β_3 — постоянные, производные от них в уравнениях (3.2) сразу же отброшены). Интегрируя первое уравнение (3.2), получим $\xi_0 = Ce^{i\Omega t}$ (необходимо $\xi_0 |_{u=0} \neq 0$). Выбором α_1, β_1 убираем из правой части второго уравнения (3.2) резонансные слагаемые.

Получим

$$D_0\xi_1 = i\Omega\xi_1 - {}^1/_2\bar{C}e^{-i\Omega t}, \; C = \text{const}\, (\alpha_1 = 0, \ \beta_1 = {}^1/_2)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\xi_1 = -\frac{i\bar{C}}{4\Omega} e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t} F_1 (\gamma, \bar{\gamma}) \quad (\gamma = ue^{-i\Omega t}, \ \bar{\gamma} = \bar{u}e^{i\Omega t})$$

где F_1 — произвольная функция своих аргументов.

Третье уравнение (3.2) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} &D_0\xi_2 = i\Omega\xi_2 - \frac{1}{2}(u - \bar{u}) \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} - \frac{1}{2}(\bar{u} - u)\, e^{2i\Omega t} \frac{\partial F_1}{\partial \bar{\gamma}} + \\ &\quad + (i\alpha_2 - \beta_2)\, Ce^{i\Omega t} - \frac{iC}{8\Omega} e^{i\Omega t} - \frac{1}{2} e^{-i\Omega t} \bar{F}_1. \end{aligned}$$

Выбором α_2 и β_2 убираем в нем резонансные слагаемые

$$\alpha_2 = {}^1/_8\Omega, \quad \beta_2 = 0$$

При этом можно положить $F_1 = 0$. Тогда $D_0\xi_2 = i\Omega\xi_2$ и, следовательно

$$\xi_2 = e^{i\Omega t} F_2 (\gamma, \bar{\gamma})$$

---

[1] *Сарычев В. А., Златоустов В. А.* Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР, № 48, М., 1975.

Функции F_2, α_3, β_3 подбираются так, чтобы уничтожить резонансные слагаемые в последнем уравнении (3.2)

$$F_2 = -{}^1/_8\bar{C}\gamma^2 - {}^1/_4 C\gamma\bar{\gamma} \equiv -{}^1/_8\bar{C}u^2e^{-2i\Omega t} - {}^1/_4 Cu\bar{u}$$
$$(\alpha_3 = \beta_3 = 0)$$

Интегрируя последнее из уравнений (3.2), получим

$$\xi_3 = \frac{i}{2\Omega}\left(\frac{\bar{C}}{32\Omega^2} + \frac{\bar{C}}{4}\gamma\bar{\gamma} + \frac{C}{16}\bar{\gamma}^2\right)e^{-i\Omega t} + \frac{iC}{4\Omega}\gamma^2 e^{3i\Omega t} +$$
$$+ \frac{3iC}{32\Omega}\bar{\gamma}^2 e^{-3i\Omega t} + e^{i\Omega t}F_3(\gamma, \bar{\gamma})$$

Функцию F_3, выбор которой диктуется условием уничтожения резонансных слагаемых в уравнении для ξ_4 (в данном тексте не выписано), достаточно взять в форме

$$F_3 = A_3\gamma^2 + B_3\gamma\bar{\gamma}, \quad A_3 = \frac{3i\bar{C}}{16\Omega}, \quad B_3 = \frac{3iC}{8\Omega}$$

Кроме того, из этого же условия получим

$$\alpha_4 = -\frac{1}{128\Omega^3}, \quad \beta_4 = 0$$

Преобразование группы получаем по формуле (1.19)

$$u' = u + \tau\psi + \frac{\tau^2}{2!}Y\psi + \frac{\tau^3}{3!}Y^2\psi + \ldots \equiv \Phi(z, \bar{z}, t, \varepsilon, l_0, \bar{l}_0)$$
$$\psi = e^{\Lambda t}(\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \varepsilon^2\xi_2 + \varepsilon^3\xi_3 + \ldots), \quad l_0 = \tau C$$

Общее решение уравнения (3.1) в соответствии с алгоритмом 2 вычисляется по формуле

$$u = \Phi(0, 0, \varepsilon, t, l_0, \bar{l}_0)$$

Таким образом, окончательно найдем (l_0 — произвольная постоянная)

$$u = l_0 e^{(\Lambda+i\Omega)t} - \varepsilon i\frac{\bar{l}_0}{4\Omega}e^{(\Lambda-i\Omega)t} - \varepsilon^2\frac{1}{8}l_0^2\bar{l}_0 e^{(3\Lambda+i\Omega)t} +$$
$$+ \varepsilon^3\left\{i\frac{\bar{l}_0}{64\Omega^3}e^{(\Lambda-i\Omega)t} + \frac{1}{6}e^{3\Lambda t}\left[\frac{9il_0\bar{l}_0^2}{16\Omega}e^{-i\Omega t} + \frac{9il_0^2\bar{l}_0}{8\Omega}e^{i\Omega t} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{3il_0^3}{8\Omega}e^{3i\Omega t} + \frac{3i\bar{l}_0^3}{16\Omega}e^{-3i\Omega t}\right]\right\} + \ldots$$

С точностью до ε^4 имеем $\Lambda = {}^1/_2\,\varepsilon$. Обращая формулу для частоты

$$1 = \Omega + \frac{\varepsilon^2}{8\Omega} - \frac{\varepsilon^4}{128\Omega^3} + \ldots$$

получим

$$\Omega = 1 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{128}\varepsilon^4 + \ldots$$

Уравнение Матье. Изучение окрестности резонансного 4π-периодического решения уравнения Матье (2.7) приводит к общему решению (l_1, l_2 —

произвольные постоянные, θ — параметр)

$$z_1 = e^{\Lambda_1 t}\,\Phi^*\,(z_0 = e^{i\theta},\quad \alpha_1 = -ie^{-2i\theta}),\quad z_2 = e^{\Lambda_2 t}\,\Phi^*\,(z_0 = e^{-i\theta},$$
$$\alpha_1 = -ie^{2i\theta})$$
$$\Phi^* = z_0 e^{1/2 t} + \varepsilon\,(z_0 e^{3/2 it} - z_0 e^{-1/2 it} - {}^1/_2 \bar z_0 e^{-3/2 it}) +$$
$$+ \varepsilon^2\,[-{}^1/_6 \bar z_0 e^{-5/2 it} - ({}^1/_2 \alpha_1 \bar z_0 + iz_0) e^{-3/2 it} + {}^1/_2 i\bar z_0 e^{-1/2 it} -$$
$$- 2i\bar z_0 e^{3/2 it} + {}^1/_2 iz_0 e^{5/2 it}]$$

Собственная частота и показатель определяются формулами (с точностью до ε^3)

$$\omega = {}^1/_2 - \varepsilon\cos 2\theta + {}^1/_2\,\varepsilon^2,\qquad \Lambda_1 = \varepsilon\sin 2\theta,\qquad \Lambda_2 = -\varepsilon\sin 2\,\theta$$

При каждом фиксированном ω получаем вполне определенное значение θ, соответствующие этому значению показатели Λ_1, Λ_2 и решение z.

Уравнение Дюффинга. Когда собственная частота колебаний близка к частоте возмущения, $\omega \approx 1$, уравнение Дюффинга записывается в виде (см. [6], стр. 85)

$$x^{\cdot\cdot} + x^{\cdot} = \varepsilon ax + \varepsilon cx^3 + \varepsilon\lambda'\sin t$$

В комплексной форме

$$z^{\cdot} = iz - i\frac{\varepsilon a}{2}(z+\bar z) - i\,\frac{\varepsilon c}{8}(z+\bar z)^3 + \frac{\varepsilon\lambda'}{2}(e^{-it} - e^{it}) \tag{3.3}$$

2π-периодические решения этого уравнения вычисляются по формуле (см. [6], стр. 33)

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots,\qquad w_0 = -\,i\rho e^{it} \tag{3.4}$$

$$w_1 = -\,\frac{ic\rho^3}{16}e^{3it} - \frac{ic\rho^3}{32}e^{-3it} - iN_1 e^{it},\qquad N_1\left(a + \frac{9}{4}c\rho^2\right) = \frac{3c^2\rho^5}{128}$$

Амплитуда ρ определяется совокупностью положительных решений уравнений

$$a\rho + {}^3/_4\,c\rho^3 \pm \lambda' = 0\ (\lambda' > 0) \tag{3.5}$$

Таких решений либо одно, либо три. Случай кратных корней уравнений (3.4) исключен из рассмотрения. Используя алгоритм 2, найдем общее решение уравнения (3.3) в окрестности периодических движений. Подстановкой $z = w + \varepsilon u$ приведем это уравнение к виду (с учетом разложения (3.4))

$$u^{\cdot} = iu + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots$$

$$f_1 = (u+\bar u)\left[\frac{3ic\rho^2}{8}(e^{2it} + e^{-2it}) - \frac{i}{2}\left(a + \frac{3c\rho^2}{2}\right)\right]$$

$$f_2 = i\,(u+\bar u)\left[-\frac{3c\rho}{2}N_1 + \frac{3c\rho}{4}\left(N_1 - \frac{c\rho^3}{32}\right)\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3c^2\rho^4}{128}(e^{4it} + e^{-4it})\right] + \frac{3c\rho}{8}(u+\bar u)^2(e^{-it} - e^{it})$$

Определяющее уравнение для $\xi_0 : D_0\xi_0 = i\xi_0$ (см. (1.18)). Его решение возьмем в виде $\xi_0 = Ce^{it}$ ($C = \text{const}$).

Функция ξ_1 получается интегрированием уравнения

$$D_0\xi_1 = i\xi_1 - D_1\xi_0 + a_1\xi_0 + X_0 f_1\quad (a_k \equiv i\alpha_k - \beta_k)$$

После подстановки конкретных выражений ξ_0 и f_1

$$D_0\xi_1 = i\xi_1 + a_1Ce^{it} + C\frac{3ic\rho^2}{8}(e^{3it}+e^{-it}) - C\frac{i}{2}\left(a+\frac{3c\rho^2}{2}\right)e^{it} + \\ + \bar{C}\frac{3ic\rho^2}{8}(e^{it}+e^{-3it}) - \bar{C}\frac{i}{2}\left(a+\frac{3c\rho^2}{2}\right)e^{-it}$$

Приравнивая нулю совокупность резонансных слагаемых правой части, получим

$$a_1C - C\frac{i}{2}\left(a+\frac{3c\rho^2}{2}\right) - \frac{3ic\rho^2}{8}\bar{C} = 0 \quad (C = re^{i\theta})$$

Отсюда

$$a_1 \equiv i\alpha_1 - \beta_1 = -\frac{3c\rho^2}{8}\sin 2\theta + i\left(\frac{a}{2}+\frac{3c\rho^2}{4}-\frac{3c\rho^2}{8}\cos 2\theta\right)$$

Так как $\omega = 1 + \alpha_1\varepsilon + \ldots$, то при точном резонансе ($\omega = 1$) будет

$$\alpha_1 \equiv \frac{a}{2}+\frac{3c\rho^2}{4}-\frac{3c\rho^2}{8}\cos 2\theta = 0 \tag{3.6}$$

Далее имеем

$$\beta_1 = \frac{3c\rho^2}{8}\sin 2\theta \tag{3.7}$$

Из сопоставления условий (3.6) и (3.5), как нетрудно проверить, вытекает, что удовлетворить уравнению вещественным значением параметра θ можно лишь в случае, если амплитудные уравнения (3.5) имеют все три вещественных корня $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ и $\rho = \rho_2$.

Таким образом, в данном случае имеем дело с окрестностью периодического решения, отвечающего среднему корню $\rho = \rho_2$.

Очевидно, значению $\cos 2\theta$, вычисленному по формуле (3.6), отвечают два значения β_1

$$\beta_1^+ = \frac{3c\rho^2}{8}\sin 2\theta, \quad \beta_1^- = -\frac{3c\rho^2}{8}\sin 2\theta$$

и, следовательно, два значения для показателя

$$\Lambda_1 = \varepsilon\frac{3c\rho^2}{8}\sin 2\theta + \ldots, \quad \Lambda_2 = -\varepsilon\frac{3c\rho^2}{8}\sin 2\theta + \ldots$$

Учитывая, что в дальнейшем экспоненты с этими показателями войдут в решение уравнения (3.3), видим, что соответствующее периодическое решение неустойчиво. Это согласуется с известным фактом (см. [6], стр. 86).

Далее

$$\xi_1 = \frac{3c\rho^2}{8}\left(\frac{C}{2}e^{3it} - \frac{C}{4}e^{-3it}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{C}\frac{3c\rho^2}{4} - C\frac{3c\rho^2}{8} + \bar{C}\frac{a}{2}\right)e^{-it} + \\ + e^{it}F_1(\gamma, \bar{\gamma})$$

Величины α_2, β_2 и функцию F_1 выбираем так, чтобы уничтожить резонансные слагаемые в уравнении для ξ_2

$$D_0\xi_2 = i\xi_2 - D_1\xi_1 - D_2\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_0 + X_0f_2 + X_1f_1$$

Сделав необходимые выкладки, получим

$$r = \rho, \quad F_1 = A\gamma + B\bar{\gamma}, \quad A = i\frac{\cos 2\theta}{\cos^3\theta}, \quad B = -\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}e^{i\theta}$$

Из этих формул видно, что ξ_1 имеет особенность при $\cos\theta = 0$, которой, как нетрудно установить, отвечает исключенный из рассмотрения случай кратных корней амплитудного уравнения (3.5). Значениям θ и $-\theta$, удовлетворяющим условию (3.6), отвечают два решения определяющих уравнений

$$\xi_0^+ = \rho e^{i\theta} e^{it}, \quad \xi_0^- = \rho e^{-i\theta} e^{it}$$

$$\xi_1^+ = \frac{3c\rho^3}{8}\left(e^{i\theta}\frac{e^{3it}}{2} - e^{-i\theta}\frac{e^{-3it}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-i\theta}\frac{3c\rho^3}{4} - e^{i\theta}\frac{3c\rho^3}{8} + \right.$$
$$\left. + e^{-i\theta}\frac{\rho a}{2}\right)e^{-it} + A^+u + B^+\bar{u}e^{2it}, \quad A^+ = A, \quad B^+ = B$$

$$\xi_1^- = \frac{3c\rho^3}{8}\left(e^{-i\theta}\frac{e^{3it}}{2} - e^{i\theta}\frac{e^{-3it}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\frac{3c\rho^3}{4} - e^{-i\theta}\frac{3c\rho^3}{8} + \right.$$
$$\left. + e^{i\theta}\frac{\rho a}{2}\right)e^{-it} + A^-u + B^-\bar{u}e^{2it}, \quad A^- = A, \; B^- = \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}e^{-i\theta}$$

Если теперь вернуться к функциям $\psi = \xi e^{\Lambda t}$, получим двухпараметрическую группу, определяемую семейством операторов $Y = \psi\, \partial/\partial u + \bar{\psi}\, \partial/\partial \bar{u}$, где в первом приближении

$$\psi = l_1(\xi_0^+ + \varepsilon\xi_1^+)e^{\Lambda_1 t} + l_2(\xi_0^- + \varepsilon\xi_1^-)e^{\Lambda_2 t} \equiv$$
$$\equiv \psi(l_1, l_2, u, \bar{u}, t, \varepsilon)$$

l_1, l_2 — произвольные постоянные. Первое приближение искомого общего решения определится по формуле

$$u = \psi(l_1^*, l_2^*, 0, 0, t, \varepsilon) + \frac{1}{2}\left(\psi(l_1^*, l_2^*, 0, 0, t, \varepsilon)\frac{\partial\psi}{\partial u}\bigg|_{u=0} + \right.$$
$$\left. + \bar{\psi}(l_1^*, l_2^*, 0, 0, t, \varepsilon)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{u}}\bigg|_{u=0}\right)$$

где $l_1^* = \tau l_1$, $l_2^* = \tau l_2$ — произвольные постоянные.

Обратимся теперь к вопросу об окрестности других периодических решений уравнения Дюффинга. Нерезонансное уравнение Дюффинга (2.1) переходит в резонансное уравнение (3.3) путем замены $\omega^2 - 1 = a\varepsilon$, $\lambda' = \varepsilon\lambda$. Ясно, что соответствующие периодические решения уравнений (2.1) и (3.3) переходят одно в другое. Несложные рассуждения и выкладки показывают, что переход совершается для решений с $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$.

Переходят одна в другую и соответствующие окрестности этих решений, что позволяет их построить, используя указанную замену.

Автор благодарит В. М. Алексеева за важные критические замечания.

Поступила 23 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды, т. 1. М., «Наука», 1971.
2. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды. Успехи матем. наук, 1969, т. 24, вып. 2.
3. *Povzner A.* Linear methods in problems of non-linear differential equations with a small parameter. Internat. J. Non-linear Mech., 1974, vol. 9, No. 4.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
5. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
7. *Mettler E.* Über höhere Näherungen in der Theorie des elastischen Pendels mit innerer Resonanz. Z. angew. Math. und Mech., 1975, Bd 55, H 2.
8. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.