Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ РЕЗОНАНСОВ

В. Э. Жавнерчик

(Минск)

Исследуется устойчивость положения равновесия автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае n пар чисто мнимых корней при одновременном наличии нескольких резонансных соотношений. Даются достаточные условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия в первом нелинейном порядке для одного специального класса систем. Полученные результаты распространяются на гамильтоновы системы.

В качестве примера рассматривается задача о колебаниях спутника около положения относительного равновесия на круговой орбите.

1. Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_*^{\cdot} = Ax_* + X_*(x_*), \quad x_*^{\cdot} = dx_* / dt \tag{1.1}$$

$$x_* = (x_1^*, \ldots, x_{2n}^*), \quad X_* = (X_1^*, \ldots, X_{2n}^*), \quad X_*(0) =$$

где x_* и X_* — $2n$-мерные векторы евклидова пространства E_{2n}; A — квадратная постоянная матрица, имеющая лишь чисто мнимые собственные значения $\pm i\omega_s$ ($\omega_s > 0$, $s = 1, \ldots, n$), среди которых нет кратных; $X_s^*(x_*)$ — голоморфные функции, разложения которых по степеням x_* начинаются формами m-го порядка.

Пусть в системе (1.1) имеет место $\mu > 1$ резонансных соотношений вида

$$\langle \Omega, P_\nu \rangle = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu \tag{1.2}$$

$$\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q), \quad P_\nu = (p_{\nu 1}, \ldots, p_{\nu q})$$

$$|P_\nu| = \sum_{j=1}^{q} |p_{\nu j}| = k, \quad \sum_{j=1}^{q} \Big| \sum_{\nu=1}^{\mu} \varkappa_\nu p_{\nu j} \Big| > k, \quad k = m + 1 \geqslant 3$$

Здесь P_ν — вектор размерности q ($q \leqslant n$) с целочисленными взаимно простыми компонентами; $\varkappa_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, \mu$) — произвольные целые постоянные, среди которых две, по крайней мере, отличны от нуля; k — нечетное число.

Случай одновременного наличия нескольких резонансных соотношений рассматривался ранее [1-5].

Известно [6], что с помощью невырожденного комплексного линейного преобразования систему (1.1) можно представить в виде

$$(1.3) \qquad x^{\cdot} = i\omega x + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}(x, y), \quad y^{\cdot} = -i\omega y + \sum_{l=m\geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}(x, y)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \; \omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

где x, y — комплексно-сопряженные векторы; ω — диагональная матрица; $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$ — комплексно-сопряженные вектор-функции, компоненты которых $X_s^{(l)}$, $Y_s^{(l)}$ $(s = 1, \ldots, n)$ — формы l-го порядка от x, y.

Применяя к системе (1.3) последовательно ряд преобразований, описанных в [7] с учетом (1.2) получим [5] следующую нормальную форму системы (1.3) в полярных координатах r_s, φ_s $(s = 1, \ldots, n)$ с точностью до первых нелинейных членов:

$$(1.4) \qquad r_j^{\cdot} = 2\sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu Q_{\nu j}(\theta_\nu) + O(\| r \|^{(k+1)/2})$$

$$\theta_\nu^{\cdot} = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{q} \frac{|p_{\nu j}|}{r_j} R_i Q_{ij}'(\theta_i) + O(\| r \|^{(k-1)/2})$$

$$r_\alpha^{\cdot} = O(\| r \|^{(k+1)/2}), \quad \varphi_\alpha^{\cdot} = O(\| r \|^{(k-1)/2})$$

$$j = 1, \ldots, q; \quad \nu = 1, \ldots, \mu; \quad \alpha = q + 1, \ldots, n$$

$$R_\nu^2 = \prod_{l=1}^{q} r_l^{|p_{\nu l}|}, \quad \theta_\nu = \sum_{j=1}^{q} |p_{\nu j}| \varphi_j, \quad r = (r_1, \ldots, r_n)$$

$$Q_{\nu j}(\theta_\nu) = a_{\nu j}\cos\theta_\nu + b_{\nu j}\sin\theta_\nu, \quad Q_{\nu j}' = dQ_{\nu j} \mid d\theta_\nu$$

$$(Q_{\nu j}(\theta_\nu) \equiv 0, \text{ если } p_{\nu j} = 0)$$

Рассмотрим класс модельных систем (получаемых из (1.4) отбрасыванием невыписанных членов), для которых

$$a_{\nu j} = 0, \; b_{\nu j} \neq 0, \text{ если } p_{\nu j} \neq 0, \; \nu = 1, \ldots, \mu; \; j = 1, \ldots, q$$

так что (выписана лишь резонансная подсистема)

$$(1.5) \qquad r_j^{\cdot} = 2\sum_{\nu=1}^{\mu} b_{\nu j} R_\nu \sin\theta_\nu, \quad \theta_\nu^{\cdot} = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{q} \frac{b_{ij}|p_{\nu j}|}{r_j} R_i \cos\theta_i$$

$$j = 1, \ldots, q; \quad \nu = 1, \ldots, \mu$$

Исследуем устойчивость положения равновесия модельной системы (1.5) при выполнении резонансных соотношений (1.2).

Теорема 1.1. Для того чтобы модельная система (1.5) имела растущее решение типа инвариантного луча

$$(1.6) \qquad r_j = k_j b(t), \quad k_j > 0, \quad j = 1, \ldots, q$$

$$\theta_\xi = \pi / 2, \; \xi = 1, \ldots, \mu_0; \; \theta_\eta = -\pi / 2, \; \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \mu$$

$$(0 \leqslant \mu_0 \leqslant \mu)$$

необходимо и достаточно, чтобы ($h_{\nu j}$ — некоторые постоянные)

$$(1.7)\qquad k_j = \frac{H_{1j} - H_{2j}}{H_{11} - H_{21}} k_1, \quad H_{1j} > H_{2j}, \quad H_{1j} = \sum_{\xi=1}^{\mu_0} h_{\xi j}, \quad H_{2j} = \sum_{\eta=\mu_0+1}^{\mu} h_{\eta j}$$

$$(1.8)\qquad b_{\nu j} = h_{\nu j} / R_\nu^\circ, \quad R_\nu^\circ = R_\nu (k_1, \ldots, k_q)$$

$$j = 1, \ldots, q; \quad \nu = 1, \ldots, \mu$$

Доказательство. Подставляя решение вида (1.6) в систему (1.5), получим

$$k_j b^\cdot = 2\Sigma_j b^{k/2}, \quad \Sigma_j = \sum_{\xi=1}^{\mu_0} b_{\xi j} R_\xi^\circ - \sum_{\eta=\mu_0+1}^{\mu} b_{\eta j} R_\eta^\circ, \quad j = 1, \ldots, q$$

Видно, что решение (1.6) системы (1.5) существует, если найдутся такие $k_j > 0$, что

$$(1.9)\qquad k_j = (\Sigma_j / \Sigma_1) k_1, \quad \Sigma_j / 0, \quad j = 1, \ldots, q$$

Используя (1.8), соотношения (1.9) запишем в виде (1.7).

Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

Теорема 1.2. Для того чтобы модельная система (1.5) имела неустойчивое частное решение типа растущего луча

$$r_u = k_u b(t), \quad k_u > 0, \quad u = 1, \ldots, \bar{q}$$

$$r_v = 0, \quad v = \bar{q} + 1, \ldots, q \quad (0 < \bar{q} < q)$$

$$\theta_\xi = \pi / 2, \ \xi = 1, \ldots, \mu_0; \quad \theta_\eta = -\pi / 2, \quad \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \bar{\mu}$$

$$\theta_\zeta = \pm \pi/2, \ \zeta = \bar{\mu} + 1, \quad \ldots, \mu \ (0 \leqslant \mu_0 \leqslant \bar{\mu} < \mu; \ \bar{\mu} > 0)$$

необходимо и достаточно, чтобы $b_{\nu u}$ ($\nu = 1, \ldots, \bar{\mu}$; $u = 1, \ldots, \bar{q}$) удовлетворяли условиям (1.7), (1.8) и, кроме того

$$p_{\nu v} = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \bar{\mu}; \quad v = \bar{q} + 1, \ldots, q$$

$$\sum_{v=\bar{q}+1}^{q} |p_{\zeta v}| > 1, \quad \zeta = \bar{\mu} + 1, \ldots, \mu$$

Доказательство в связи с его простотой опускаем.

Полученные результаты с некоторыми очевидными изменениями можно перенести на класс модельных систем (1.4), для которых

$$a_{\nu j} \neq 0, \quad b_{\nu j} = 0, \text{ если } p_{\nu j} \neq 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu; \ j = 1, \ldots, q$$

2. Рассмотрим более подробно задачу об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы

$$(2.1)\qquad x_s^\cdot = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y_s}, \quad y_s^\cdot = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x_s}, \quad s = 1, \ldots, n$$

в случае, когда эта задача не решается в линейном приближении и имеют место резонансные соотношения (1.2).

Предположим, что гамильтониан системы (2.1) имеет вид

$$(2.2)\qquad H(x, y) = H_2(x, y) + H_k(x, y) + H_{k+1}(x, y) + \ldots$$

$$H_2(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{\delta_s} (x_s^2 + \omega_s^2 y_s^2)$$

где δ_s принимают значения один или два (см., например, [8]); $H_l(x, y)$ — однородный полином степени l.

Введем обозначения

$$\lambda_s = (-1)^{\delta_s}\omega_s, \quad s = 1, \ldots, n$$

$$p_{\nu j}^* = (-1)^{\delta_s} p_{\nu j}, \quad \nu = 1, \ldots, \mu; \; j = 1, \ldots, q$$

Полиномиальным каноническим преобразованием с учетом (1.2) гамильтониан (2.2) можно привести к нормальной форме до k-го порядка. Отбрасывая члены выше k-го порядка, гамильтониан модельной системы в полярных канонических переменных запишем в следующем виде:

$$\Gamma = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s r_s + 2 \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu \Big(\prod_{l=1}^{q} r_l^{|p_{\nu l}^*|}\Big)^{1/2} \cos\Big(\sum_{j=1}^{q} p_{\nu j}^* \varphi_j\Big) \tag{2.3}$$

Система уравнений, соответствующая (2.3), имеет вид

$$r_j^{\boldsymbol{\cdot}} = -2 \sum_{\nu=1}^{\mu} A_\nu p_{\nu j}^* R_\nu \sin\theta_\nu^*, \quad j = 1, \ldots, q \tag{2.4}$$

$$\theta_\nu^{*\boldsymbol{\cdot}} = -\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{q} A_i \frac{p_{\nu j}^* | p_{ij}^* |}{r_j} R_i \cos\theta_i^*, \quad \nu = 1, \ldots, \mu$$

$$\theta_\nu^* = \sum_{j=1}^{q} p_{\nu j}^* \varphi_j$$

В дальнейшем будем предполагать, что $A_\nu \neq 0$ $(\nu = 1, \ldots, \mu)$.

Теорема 2.1. Для того чтобы гамильтонова система (2.4) имела растущее решение типа инвариантного луча

$$r_j = k_j b(t), \quad k_j > 0, \quad j = 1, \ldots, q$$

$$\theta_\xi^* = (\pi / 2) \operatorname{sign} A_\xi, \quad \xi = 1, \ldots, \mu_0$$

$$\theta_\eta^* = -(\pi / 2) \operatorname{sign} A_\eta, \quad \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \mu \quad (0 \leqslant \mu_0 \leqslant \mu)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$k_j = \frac{\langle P_{1j}^*, G_1\rangle - \langle P_{2j}^*, G_2\rangle}{\langle P_{11}^*, G_1\rangle - \langle P_{21}^*, G_2\rangle} k_1 \tag{2.5}$$

$$\langle P_{2j}^*, G_2\rangle - \langle P_{1j}^*, G_1\rangle > 0, \quad j = 1, \ldots, q$$

$$| A_\nu | = g_\nu / R_\nu^\circ, \quad \nu = 1, \ldots, \mu \tag{2.6}$$

$$P_{1j}^* = (p_{1j}^*, \ldots, p_{\mu_0 j}^*), \quad P_{2j}^* = (p_{\mu_0+1, j}^*, \ldots, p_{\mu j}^*)$$

$$G_1 = (g_1, \ldots, g_{\mu_0}), \quad G_2 = (g_{\mu_0+1}, \ldots, g_\mu), \quad g_\nu > 0$$

где $P_{\varepsilon j}^*$, G_ε $(\varepsilon = 1,2)$ — векторы размерности μ_0 при $\varepsilon = 1$, $\mu - \mu_0$ — при $\varepsilon = 2$; g_ν — некоторые постоянные.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.

Теорема 2.2. Для того чтобы гамильтонова система (2.4) имела неустойчивое частное решение типа растущего луча

$$r_u = k_u b(t), \quad k_u > 0, \quad u = 1, \ldots, \bar q$$

$$r_v = 0, \quad v = \bar q + 1, \ldots, q \; (0 < \bar q < q)$$

$$\theta_\xi{}^* = (\pi / 2) \operatorname{sign} A_\xi, \quad \xi = 1, \ldots, \mu_0$$
$$\theta_\eta{}^* = -(\pi / 2) \operatorname{sign} A_\eta, \quad \eta = \mu_0 + 1, \ldots, \bar\mu$$
$$\theta_\zeta{}^* = \pm \pi / 2, \quad \zeta = \bar\mu + 1, \ldots, \mu \ (0 \leqslant \mu_0 \leqslant \bar\mu < \mu;\ \bar\mu > 0)$$

необходимо и достаточно, чтобы $p_{\nu u}{}^*$, A_ν ($\nu = 1, \ldots, \bar\mu$; $u = 1, \ldots, \bar q$) удовлетворяли условиям (2.5), (2.6) соответственно и, кроме того

$$p_{\nu v}{}^* = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \bar\mu;\ v = \bar q + 1, \ldots, q$$

$$\sum_{v=\bar q+1}^{q} |p^*_{\zeta v}| > 1, \quad \zeta = \bar\mu + 1, \ldots, \mu$$

Обозначим

$$P^* = \| p_{\nu j}{}^* \|, \quad \nu = 1, \ldots, \mu; \quad j = 1, \ldots, q$$
$$C_{q_0} = \operatorname{col} \{c_1, \ldots, c_{q_0}, 0, \ldots, 0\}$$

(C_{q_0} — произвольный постоянный вектор-столбец размерности q, $q_0 \leqslant q$).

Теорема 2.3. Для существования у гамильтоновой системы (2.4) интеграла вида

$$\sum_{\gamma=1}^{q_0} c_\gamma r_\gamma + \sum_{\alpha=q+1}^{n} r_\alpha = \mathrm{const} \tag{2.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$P^* C_{q_0} = 0 \tag{2.8}$$

Доказательство. Приравнивая нулю производную от (2.7) в силу модельной системы (2.4), получим систему уравнений, которой должны удовлетворять постоянные c_γ

$$\sum_{\gamma=1}^{q_0} p^*_{\nu\gamma} c_\gamma = 0, \quad \nu = 1, \ldots, \mu$$

Завершение доказательства очевидно.

Аналогичная теорема имеет место и для модельной системы (1.5). При этом равенство (2.8) заменится на равенство (см. [9], гл. 1, § 6)

$$B C_{q_0} = 0, \quad B = \| b_{\nu j} \|$$

Следствия. 1°. Если существует вектор C_{q_0} с положительными компонентами $c_j > 0$, удовлетворяющий равенству (2.8), то положение равновесия модельной гамильтоновой системы (2.4) устойчиво относительно переменных $r_1, \ldots, r_{q_0}, r_{q+1}, \ldots, r_n$ [10].

2°. Если модельная гамильтонова система (2.4) имеет два слабых резонанса (см. [5]) третьего порядка, то положение равновесия системы (2.4) устойчиво.

3°. Если модельная гамильтонова система (2.4) имеет три слабых резонанса третьего порядка, то положение равновесия (2.4) устойчиво.

Пример. Рассмотрим задачу о колебаниях спутника около положения относительного равновесия на круговой орбите. Известно [11], что в подходящих канонических переменных гамильтониан линеаризованной системы рассматриваемой задачи приводится к виду

$$H_2 = -{}^1/_2\,(\xi^2{}_1 + \omega_1{}^2\eta_1{}^2) + {}^1/_2\,(\xi_2{}^2 + \omega_2{}^2\eta_2{}^2) + {}^1/_2\,(\xi_3{}^2 + \omega_3{}^2\eta_3{}^2)$$

и здесь может быть реализован двукратный резонанс

$$\omega_3 - 2\,\omega_1 = 0, \quad \omega_3 - \omega_2 + \omega_1 = 0$$

Соответствующая модельная система в полярных канонических координатах имеет вид (уравнения для $\theta_\nu{}^*$ не выписаны)

$$r_j{}^{\cdot} = \alpha_j A_1 \sqrt{r_1{}^2 r_3}\sin\theta_1{}^* + \beta_j A_2 \sqrt{r_1 r_2 r_3}\,\sin\,\theta_2{}^*, \qquad j = 1,2,3 \tag{2.9}$$

$$\alpha_1 = -4,\ \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -2,\ \beta_1 = \beta_2 = 2,\ \beta_3 = -2$$

$$\theta_1{}^* = 2\varphi_1 + \varphi_3, \quad \theta_2{}^* = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$$

Согласно теореме 2.1, система (2.9) имеет растущее решение вида

$$r_j = k_j b\,(t), \quad k_j > 0, \quad j = 1,2,3$$

$$\theta_\nu{}^* = (-1)^\nu\,(\pi / 2)\ \mathrm{sign}\ A_\nu, \quad \nu = 1,2$$

если

$$k_2 = \frac{g_2}{2g_1 + g_2}\,k_1, \quad k_3 = \frac{g_1 - g_2}{2g_1 + g_2}\,k_1, \quad g_1 > g_2$$

$$|\,A_1\,| = g_1 / \sqrt{k_1{}^2 k_3}, \qquad |\,A_2\,| = g_2 / \sqrt{k_1 k_2 k_3}$$

Полагая $|\,A_2 / A_1\,| = A$, после преобразований находим условие $0 < A < \sqrt{3}$. Следовательно, положение равновесия модельной системы (2.9) неустойчиво при выполнении этого неравенства.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара (особенно А. Л. Куницына) за обсуждение работы.

Поступила 1 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
2. *Куницын А. Л.* Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, вып. 9.
3. *Хазина Г. Г.* Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
4. *Хазина Г. Г.* К вопросу о взаимодействии резонансов. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
5. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
8. *Булгаков Б. В.* О нормальных координатах. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
9. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М., «Наука», 1968.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
11. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Изд-во МГУ, 1975.