Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.36

АППРОКСИМАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

А. С. Миркина, К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Рассматриваются системы в стандартной форме и квазилинейные системы со многими быстрыми переменными. Показано, что в случае, когда неустановившиеся медленные движения равномерно экспоненциально устойчивы, приближенные решения при асимптотическом разделении движений аппроксимируют точные на бесконечном интервале времени. Найдено соотношение между размером области устойчивости, порядком показателя в оценке разрешающей матрицы уравнений в вариациях и числом приближений, обеспечивающим аппроксимацию.

1. Асимптотическая аппроксимация неквазистационарных решений систем в стандартной форме на бесконечном интервале времени. Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве $x_1, \ldots, x_n$ систему в стандартной форме

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon) \tag{1.1}$$

где x — вектор-столбец, а вектор-функция X при $t \geqslant t_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и x из некоторой области G непрерывна по t и равномерно ограничена вместе с $m+1$ производной по x и m производными по ε.

Рассмотрим улучшенное m-е приближение к решению системы (1.1), построенное по методу осреднения

$$x^{(m)} = \xi_m + \varepsilon u_1(t, \xi_m) + \ldots + \varepsilon^m u_m(t, \xi_m) \tag{1.2}$$

где ξ_m удовлетворяет уравнению

$$d\xi_m / dt = \varepsilon \Xi_0(\xi_m) + \ldots + \varepsilon^m \Xi_{m-1}(\xi_m) = \varepsilon \Xi^{(m-1)}(\xi_m, \varepsilon) \tag{1.3}$$

Будем считать, что $u_j(t_0, \xi_m) = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Тогда ξ_m следует определять при начальном условии $\xi_m(t_0) = \xi_{m0} = x^{(m)}(t_0) = x(t_0)$. Предполагается, что в области G существуют и равномерно ограничены вместе с первыми производными по ξ_m все средние вида

$$\Xi_j = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} U_j(t, \xi_m)\, dt \tag{1.4}$$

встречающиеся при вычислениях по методу осреднения, а функции u_j, $\partial u_j / \partial \xi_m$ равномерно ограничены при $t \geqslant t_0$, $\xi_m \in G$.

Доказано [1], что для решений вида (1.2), независимо от свойств эволюционных составляющих $\xi_m(t)$, на интервале порядка $T/|\varepsilon|$ справедлива оценка $|x-x^{(m)}|\leqslant C_m\cdot|\varepsilon|^m$. Для квазистационарных решений $\xi_m=\mathrm{const}$ та же оценка возможна на интервалах большего порядка [2], а для устойчивых квазистационарных решений — на бесконечном интервале (теорема Боголюбова). Далее указываются некоторые другие случаи существования равномерной аппроксимации нестационарных движений на бесконечном интервале как для систем в стандартной форме, так и для систем более общего вида.

Обозначим через $\xi_m(t, t_0, a)$ решение уравнения (1.3) с начальным условием $\xi_m(t_0)=\xi_{m0}=a$, а через $U_m(t, s, t_0, a)$ — решение матричного уравнения

$$\frac{dU_m}{dt}=\varepsilon\left[\frac{d}{d\xi_m}\Xi^{(m-1)}(\xi_m, \varepsilon)\big|_{\xi_m=\xi_m(t,\,t_0,\,a)}\right]U_m \tag{1.5}$$

с начальным условием $U_m(s, s, t_0, a)=E$, где E — единичная матрица; $U_m(t, s, t_0, a)$ есть разрешающая матрица уравнения в вариациях системы (1.3) на решении $\xi_m(t, t_0, a)$. Далее рассматривается случай, когда решение $\xi_m(t, t_0, a)$ равномерно экспоненциально устойчиво по линейному приближению, т. е. когда при всех $t\geqslant s\geqslant t_0$

$$\|U_m(t, s;\, t_0, a)\|\leqslant N_m e^{-\nu_m(t-s)} \tag{1.6}$$

Теорема 1. Пусть решение $\xi_m(t, t_0, a)$ вместе с его ρ-окрестностью, где ρ не зависит от t, ε, при всех $t\geqslant t_0$ и достаточно малых $|\varepsilon|$ остается в G. Пусть справедливо соотношение (1.6) и пусть экспоненциальная устойчивость впервые обнаруживается в членах k-го порядка по ε, т. е. $\nu_m=|\varepsilon|^k\nu_{mk}$ и ν_{mk}, N_m не зависят от ε.

Пусть решение $\xi_m(t, t_0, a)$ принадлежит семейству равномерно экспоненциально устойчивых решений следующего вида: при всех $t_1\geqslant t_0$ существует шар радиуса δ, не зависящего от t_1, с центром в точке $\xi_m(t_1, t_0, a)$, такой, что каждое решение $\xi_m(t, t_1, \xi_{m1})$, попавшее при $t=t_1$ в точку ξ_{m1} этого шара, остается вместе с $\rho(\xi_{m1})$-окрестностью в G, и этому решению соответствует разрешающая матрица $U_m(t, s;\, t_1, \xi_{m1})$, удовлетворяющая при $t\geqslant s\geqslant t_1$ условию (1.6) с теми же постоянными N_m, ν_m.

Пусть радиус шара порядка r, т. е. $\delta=|\varepsilon|^r\delta_r$, где δ_r не зависит от ε. Пусть $m>k+r-1$. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ решение $x(t)$ исходной системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=a$ при всех $t\geqslant t_0$ остается в G и аппроксимируется m-м приближением (1.2) на всем интервале времени $t_0\leqslant t<\infty$ с точностью $|\varepsilon|^{m-k+1}$, т. е. при всех $t\geqslant t_0$

$$|x(t)-x^{(m)}(t)|<C_m|\varepsilon|^{m-k+1} \tag{1.7}$$

где C_m не зависит от t, ε.

Доказательство. Введем в (1.1) новую переменную ξ соотношением

$$x=\xi+\varepsilon u_1(t, \xi)+\ldots+\varepsilon^m u_m(t, \xi) \tag{1.8}$$

Для решения с начальным условием $x(t_0)=a$ имеем $\xi(t_0)=a$. Так как $a\in G-\rho$, то существует такой интервал времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$, когда $\xi \in G$. Поскольку при $\xi \in G$ производные $\partial u_i / \partial \xi$ равномерно ограничены, существует такое число $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ матрица $E + \varepsilon\, \partial u_1 / \partial \xi + \ldots + \varepsilon^m \partial u_m / \partial \xi$ имеет обратную. При этих условиях ξ удовлетворяет уравнению

$$(1.9) \qquad d\xi / dt = \varepsilon \Xi^{(m-1)}(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} R_m(\xi, t, \varepsilon)$$

При $\xi \in G$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ и $t \geqslant t_0$ функция R_m равномерно ограничена, т. е. справедлива оценка $|R_m(\xi, t, \varepsilon)| \leqslant r_m$, где r_m не зависит от ξ, t, ε.

Уравнение (1.9) эквивалентно [3] интегральному уравнению

$$(1.10) \qquad \xi(t, t_0, a) = \xi_m(t, t_0, a) + \varepsilon^{m+1} \int_{t_0}^{t} U_m(t, s, s, \xi(s, t_0, a)) R_m(\xi, s, \varepsilon)\, ds$$

Из условия $\xi - \xi_m = 0$ при $t = t_0$ и предположения $\xi_m(t, t_0, a) \in G - \rho$ следует, что существует такой интервал времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1$, когда $|\xi - \xi_m| < \delta$. По определению величин ρ и δ справедливо соотношение $\delta < \rho$, следовательно, $\xi(t) \in G$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1$. В этом интервале, согласно формулировке теоремы, справедлива оценка (1.6) для матрицы U_m под знаком интеграла в (1.10). Поэтому

$$(1.11) \qquad |\xi - \xi_m| \leqslant |\varepsilon|^{m+1} \int_{t_0}^{t} N_m e^{-\nu_m (t-s)} r_m\, ds < D_m |\varepsilon|^{m-k+1}$$

$$D_m = r_m N_m / \nu_{mk}$$

Соотношение (1.11) справедливо при тех t, когда $|\xi - \xi_m| \leqslant \delta = \delta_r |\varepsilon|^r$. Если $m > k + r - 1$, то неравенство $D_m |\varepsilon|^{m-k+1} < \delta$ выполняется при достаточно малых $|\varepsilon|$ независимо от значений постоянных N_m, r_m, ν_{mk}. При этом равенства $|\xi - \xi_m| = \delta$ и $|\xi - \xi_m| = \rho$ невозможны, и соотношение (1.11) справедливо при всех $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим соотношение (1.8). Из равномерной ограниченности функций $u_j(t, \xi)$ при $t_0 \leqslant t < \infty$, $\xi \in G$ следует, что

$$(1.12) \qquad |x - \xi| \leqslant |\varepsilon| c_1 + \ldots + |\varepsilon|^m c_m$$

где $c_1, \ldots, c_m$ — постоянные, не зависящие от t, ξ, ε, такие, что $|u_j(t, \xi)| \leqslant c_j$. Но, согласно (1.11), кривая $\xi(t, t_0, a)$ остается в малой окрестности кривой $\xi_m(t, t_0, a)$ и, следовательно, остается в G вместе со своей ρ_1-окрестностью, где ρ_1 не зависит от ε. Поэтому при достаточно малых $|\varepsilon|$ кривая $x(t)$, оставаясь, согласно (1.12), в малой окрестности кривой $\xi(t)$, останется в G при $t \geqslant t_0$. Аналогично с помощью (1.2) показывается, что $x^{(m)}(t) \in G$ при $t \geqslant t_0$.

Оценим $|x - x^{(m)}|$. Имеем

$$(1.13) \qquad \begin{aligned} |x - x^{(m)}| &= |(\xi - \xi_m) + \varepsilon [u_1(t, \xi) - u_1(t, \xi_m)] + \\ &+ \ldots + \varepsilon^m [u_m(t, \xi) - u_m(t, \xi_m)]| \leqslant \\ &\leqslant |\xi - \xi_m| (1 + |\varepsilon| d_1 + \ldots + |\varepsilon|^m d_m) = \\ &= |\xi - \xi_m| (1 + |\varepsilon| d^{(m)}) \end{aligned}$$

Здесь не зависящие от t, ε постоянные $d_1, \ldots, d_m$ таковы, что $\| \partial u_j / \partial \xi \| \leqslant d_j$, $t \geqslant t_0$, $\xi \in G$. Существование таких постоянных следует из равномерной ограниченности производных $\partial u_j / \partial \xi$.

Из (1.11), (1.13) получим, что при достаточно малых $|\varepsilon|$

$$(1.14)\qquad |x - x^{(m)}| < D_m (1 + |\varepsilon| d^{(m)}) |\varepsilon|^{m-k+1} < C_m |\varepsilon|^{m-k+1}$$

где C_m — постоянная, не зависящая от t, ε.

Замечание 1. Аппроксимацию того же порядка можно получить, удержав в (1.2) только члены, содержащие ε в степени не выше $m - k$. Однако остальные вибрационные члены до степени $m - 1$ необходимы для построения функций $\Xi_{m-k+1}, \ldots, \Xi_{m-1}$.

Замечание 2. Известно соотношение

$$(1.15)\qquad U_m (t, t_0, t_0, \xi_{m0}) = \frac{\partial}{\partial \xi_{m0}} \xi_m (t, t_0, \xi_{m0})$$

Отсюда следует, что при $|\xi_{m0} - a| \leqslant \delta$

$$(1.16)\qquad |\xi_m (t, t_0, \xi_{m0}) - \xi_m (t, t_0, a)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|\xi_{m0}-a|\leqslant\delta} \| U_m (t, t_0, t_0, \xi_{m0}) \| \, |\xi_{m0} - a| \leqslant N_m e^{-\nu_m (t-t_0)} |\xi_{m0} - a|$$

т. е. функции $\xi_m (t, t_0, t_{m0})$ сближаются при $t \to \infty$. С ними сближаются также функции $\xi_m (t, t_1, \xi_{m1})$, попадающие при $t = t_1$ в шар радиуса δ с центром в точке $\xi_m (t_1, t_0, a)$. Таким образом, в каждый момент $t_1 \geqslant t_0$ величина δ является оценкой области экспоненциального притяжения решения $\xi_m (t, t_1, \xi_m (t_1, t_0, a))$ с данными значениями N_m, ν_{mk}.

Оценка вида $|\xi (t, t_0, \xi_{m0}) - \xi_m (t, t_0, \xi_{m0})| < D_m |\varepsilon|^{m-k+1}$ справедлива, очевидно, для решений с начальными условиями ξ_{m0}, $|\xi_{m0} - a| \leqslant \delta_1 = |\varepsilon|^r \delta_{1r}$, где $\delta_{1r} < \delta_r$ и δ_{1r} не зависит от ε. Поэтому функции $\xi (t, t_0, \xi_{m0})$, оставаясь в окрестности сближающихся функций, будут при больших t отличаться друг от друга на величины порядка $|\varepsilon|^{m-k+1}$; то же относится к функциям $x (t, t_0, \xi_{m0})$. Это свойство можно рассматривать как практический аналог устойчивости.

Величины δ и ν_m являются, вообще говоря, независимыми характеристиками устойчивости движения $\xi_m (t, t_0, a)$, что позволило принять для них независимые оценки. Но можно получить неравенство (1.11), не делая предположений о величине δ.

Теорема 2. Пусть функция $\xi_m (t, t_0, a)$ и матрица $U_m (t, s, t_0, a)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть функция $\Xi^{(m-1)}$ имеет в G равномерно ограниченные вторые производные. Пусть $m > 2k - 2$. Тогда справедлива оценка (1.7).

При доказательстве приведем только формальные оценки, не доказывая, что рассматриваемые функции лежат в G. Оценим разность $Z_m = \xi - \xi_m$, составив нелинейное уравнение, аналогичное уравнению Риккати (см. [3], ч. 2)

$$(1.17)\qquad dZ_m / dt = \varepsilon [\Xi^{(m-1)} (\xi_m + Z_m) - \Xi^{(m-1)} (\xi_m)] +$$
$$+ \varepsilon^{m+1} R_m (Z_m, \xi_m, t, \varepsilon)$$

и начальному условию $Z_m (t_0) = 0$. Перепишем (1.17) в виде

$$(1.18)\qquad \frac{dZ_m}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial \Xi^{(m-1)}}{\partial \xi_m} \right) Z_m + \varepsilon F_m (\xi_m, Z_m) + \varepsilon^{m+1} R_m$$

Здесь производная вычисляется при $\xi_m = \xi_m (t, t_0, a)$. Из равномерной ограниченности вторых производных функции $\Xi^{(m-1)}$ в G следует оценка нелинейного члена $|F_m| \leqslant M_m |Z_m|^2$.

Уравнение (1.18) вместе с начальным условием эквивалентно интегральному уравнению

$$(1.19)\qquad Z_m = \varepsilon \int_{t_0}^{t} U_m(t, s, t_0, a)\,[F_m + \varepsilon^m R_m]\,ds$$

Используя указанные выше оценки, получим интегральное неравенство

$$(1.20)\qquad |Z_m(t)| \leqslant |\varepsilon|\, I(Z_m)$$

$$I(Z_m) = \int_{t_0}^{t} N_m e^{-\nu_m(t-s)}\,[M_m |Z_m(s)|^2 + |\varepsilon|^m r_m]\,ds$$

Пусть z_m — решение интегрального уравнения

$$(1.21)\qquad z_m(t) = |\varepsilon|\, I(z_m)$$

Тогда $|Z_m| \leqslant z_m$ (см., например, [4] гл. 1, неравенство (1.25); чтобы воспользоваться этим неравенством, надо умножить обе части (1.20), (1.21) на $\exp \nu_m t$).

Функция z_m удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1.22)\qquad dz_m / dt = -\nu_m z_m + |\varepsilon|\, N_m M_m z_m^2 + |\varepsilon|^{m+1} N_m r_m$$

с начальным условием $z_m(t_0) = 0$. Функция z_m останется ограниченной при всех t, если выполняется неравенство

$$(1.23)\qquad \nu_m^2 - 4N_m^2 M_m r_m\, |\varepsilon|^{m+2} > 0$$

Так как $\nu_m = \nu_{mk} |\varepsilon|^k$, то при $m > 2k - 2$ неравенство (1.23) будет выполнено при достаточно малых $|\varepsilon|$ независимо от значений ν_{mk}, N_m и т. д. Решая уравнение (1.22) при условии (1.23), получим

$$(1.24)\qquad z_m(t) < \frac{\nu_{mk} |\varepsilon|^{k-1}}{2M_m N_m} - \left(\frac{\nu_{mk}^2 |\varepsilon|^{2k-2}}{4N_m^2 M_m^2} - \frac{r_m |\varepsilon|^m}{M_m}\right)^{1/2}$$

Следовательно, существует такая не зависящая от t, ε постоянная D_m, что справедлива оценка (1.11). Доказательство того, что ξ, $x \in G$ и доказательство оценки (1.7) проводятся, как в теореме 1.

При условии $m > 2k - 2$ можно показать, что решение $x(t, t_0, a)$ экспоненциально устойчиво при начальных возмущениях $|x_0 - a| = O(\varepsilon^{k-1})$. То же относится к решениям $\xi_m(t, t_0, a)$ и $\xi(t, t_0, a)$ уравнений (1.3) и (1.9). Таким образом, при $t = t_0$ существует область экспоненциального притяжения радиуса $\delta = O(\varepsilon^r)$, где $r = k - 1$.

Если $k = 1$, то из теорем 1 и 2 следует одна и та же аппроксимация порядка m при всех $m \geqslant 1$. Из теоремы 2 следует также, что решение $x(t, t_0, a)$ экспоненциально устойчиво.

Из уравнения (1.22) при $k \leqslant m \leqslant 2k - 2$ можно получить аппроксимацию на конечных интервалах времени порядка, большего чем $1/\varepsilon$.

Используя (1.10), (1.11), результаты теорем 1,2 можно распространить на случай, когда вместо условия экспоненциальной устойчивости (1.6) разрешающая матрица удовлетворяет условию

$$\| U_m (t, s, t_0, a) \| \leqslant P_\lambda (\varepsilon t)\, e^{-\nu_m (t-s)} \tag{1.25}$$

где $P_\lambda (\varepsilon t)$ — полином степени λ от εt.

В частности, при $\lambda = 1$ (в случае, характерном для затухающих колебаний систем с малым трением) оценка (1.7) примет вид

$$| x (t) - x^{(m)} (t) | < C_m | \varepsilon |^{m-2k+1}, \quad m > 2k + r - 1$$

2. Аппроксимация решений линейных уравнений на бесконечном интервале времени. Рассмотрим линейное уравнение

$$y^{\cdot} = A (x)\, y + f (x, t) \tag{2.1}$$

где y — вектор-столбец с компонентами $y_1, \ldots, y_p$, а известный n-мерный вектор $x (t, \varepsilon)$ имеет производную $x^{\cdot} = \varepsilon X (t)$, пропорциональную малому параметру ε.

Возможна следующая процедура построения асимптотических приближений к решению задачи Коши для уравнения (2.1) с начальным условием $y (t_0) = b$. Ищем приближение $y^{(j)} (t)$ в виде

$$y^{(j)} = \varphi_0 (t, x) + \varepsilon \varphi_1 (t, x) + \ldots + \varepsilon^{(j)} \varphi_j (t, x) \tag{2.2}$$

где $\varphi_0 (t, x)$ — решение уравнения

$$\varphi_0^{\cdot} = A (x)\, \varphi_0 + f (x, t)$$

в котором x считается не зависящим от t параметром. Следующие члены в выражении (2.2) определяются последовательно из уравнений, получающихся после подстановки (2.2) в (2.1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε. Придем к уравнениям

$$\varphi_i^{\cdot} = A (x)\, \varphi_i - \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial x} X$$

которые интегрируются в предположении, что x — параметр, не зависящий от t. Можно положить для определенности $\varphi_0 (x (t_0) t_0) = b$, $\varphi_i (x (t_0), t_0) = 0$.

Функция φ_i определяется с точностью до произвольной достаточное число раз дифференцируемой функции от x, принимающей при $x = x (t_0)$ заданное значение. Такая ситуация обычна для асимптотических методов.

Теорема 3. Пусть при всех $t \geqslant t_0$ вектор $x (t)$ остается в области G пространства $x_1, \ldots, x_n$. Пусть при $x \in G$ и при всех $t \geqslant t_0$ функции $A (x)$, $f (x, t)$, $X (t)$ равномерно ограничены, $f (x, t)$, $X (t)$ непрерывны по t, а $A (x)$ и $f (x, t)$ имеют m равномерно ограниченных производных по x. Пусть при $x \in G$ собственные числа $\lambda_\rho (x)$ ($\rho = 1, \ldots, p$) матрицы $A (x)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_\rho (x) < -\mu < 0$, где μ не зависит от x, ε. Тогда при достаточно малых $| \varepsilon |$ решение $y (t)$ аппроксимируется приближением $y^{(j)} (t)$ на всем интервале времени с точностью $| \varepsilon |^{j+1}$, т. е. при всех $t \geqslant t_0$

$$| y (t) - y^{(j)} (t) | \leqslant K_j | \varepsilon |^{j+1} \tag{2.3}$$

где K_j не зависит от t, ε.

Для доказательства рассмотрим разность $v_j = y - y^{(j)}$. Она удовлетворяет уравнению с начальным условием

$$v_j^{\cdot} = A (x)\, v_j - \varepsilon^{j+1} \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x} X, \quad v_j (t_0) = 0$$

В силу теоремы Коппеля (см., например, [5], гл. VI, § 5) разрешающая матрица $L (t, t_0)$ соответствующего однородного уравнения удовлетворяет условиям

$$\| L (t, t_0) \| \leqslant Q e^{-\gamma (t-t_0)}$$

где Q, γ не зависят от t, ε. Поэтому

$$|v_j| = |\varepsilon|^{j+1} \left| \int_{t_0}^{t} L(t, s) \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x} X ds \right| \leqslant |\varepsilon|^{j+1} Q \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \left| \frac{\partial \varphi_{j-1}}{\partial x} X \right| ds \tag{2.4}$$

Вследствие ограниченности $f(x, t)$ и условия $\operatorname{Re} \lambda_\rho < 0$ функция φ_0 будет ограниченной функцией t. Из ограниченности производных $f(x, t)$ и $A(x)$ по x следует, что ограниченной будет функция $(\partial \varphi_0 / \partial x) X$. Поэтому функция φ_1 также будет ограниченной и т. д. Наконец, ограниченной будет функция $(\partial \varphi_{j-1} / \partial x) X$, стоящая под знаком интеграла в (2.4). Отсюда следует оценка (2.3).

В выражения для производных $\partial \varphi_i / \partial x$ входят вековые члены, содержащие произведения функций вида $t^k \exp \lambda_\rho t$ на ограниченные функции времени. В случаях, когда $X(t)$, $f(x, t)$ — периодические по t с не зависящим от x периодом или конечные суммы вида

$$\sum_\nu a_\nu(x) \cos \omega_\nu t + b_\nu(x) \sin \omega_\nu t$$

где не зависящие от x частóты ω_ν взаимно иррациональны, а λ_ρ — вещественные величины, можно указать алгоритм построения асимптотических приближений, содержащих только экспоненты и периодические или квазипериодические функции. Для этого следует отдельно строить периодическое или квазипериодическое решение неоднородного уравнения и частные решения однородного уравнения примерно так же, как в случае $x = \tau = \varepsilon t$ (см., например, [6]).

3. Асимптотическое разделение движений на бесконечном интервале времени в квазилинейных системах со многими быстрыми переменными. Рассмотрим квазилинейную систему

$$x^\cdot = \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon), \quad y^\cdot = A(x) y + f(x, t) \tag{3.1}$$

Система (3.1) — частный случай систем со многими быстрыми переменными, изученных в работе [7]. Однако для асимптотического интегрирования систем типа (3.1) удобнее применять не общий метод В. М. Волосова, а более простой метод, предложенный в [8] специально для квазилинейных систем. Используя результаты, полученные в [8], покажем, что точное решение системы (3.1) можно аппроксимировать приближенным на бесконечном интервале времени.

Согласно [8], приближенное решение системы (3.1) строится следующим образом. Пусть даны начальные условия $x(t_0) = a$, $y(t_0) = b$. Ищем $y^{(j)}$ в виде

$$y^{(j)} = \varphi_0(t, x) + \varepsilon \varphi_1(t, x) + \ldots + \varepsilon^j \varphi_j(t, x) \tag{3.2}$$

Здесь φ_0 — решение уравнения

$$\varphi_0^\cdot = A(x) \varphi_0 + f(x, t) \tag{3.3}$$

найденное в предположении, что в этом уравнении x — не зависящий от времени параметр. Для определенности предполагается, что $\varphi_0(t_0, x(t_0)) = \varphi_0(t_0, a) = b$. Тогда $\varphi_i(t_0, a) = 0$, $i = 1, \ldots, j$.

Внося (3.2) в первое уравнение (3.1) и разлагая функцию $x(x, y^{(j)}, t, \varepsilon)$ по степеням ε, имеем

$$x^\cdot = \varepsilon X_0(x, \varphi_0, t) + \varepsilon^2 \left[X_1(x, \varphi_0, t) + \frac{\partial X_0(x, \varphi_0, t)}{\partial \varphi_0} \varphi_1 \right] + \ldots \tag{3.4}$$

Подставляя $y^{(j)}$ вместо y во второе уравнение (3.1) и заменяя $x^{\cdot}$ выражением (3.4), из сравнения коэффициентов при степенях ε получим уравнения для последовательного определения функций $\varphi_1(t, x), \ldots$ $\ldots, \varphi_j(t, x)$

$$\varphi_1^{\cdot} = A(x)\varphi_1 - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} X_0(x, \varphi_0, t) \tag{3.5}$$

$$\varphi_2^{\cdot} = A(x)\varphi_2 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} X_0(x, \varphi_0, t) - \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\left[X_1(x, \varphi_0, t) + \frac{\partial X_0}{\partial\varphi_0}\varphi_1\right]$$

и т. д. Уравнения (3.5) интегрируются при условии, что $x = \text{const}$. Внеся найденную таким образом функцию $y^{(j)}(t, x)$ вместо y в первое уравнение (3.1), придем к системе в стандартной форме

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(x, y^{(j)}(t, x, \varepsilon), t, \varepsilon) \tag{3.6}$$

к которой можно применить метод осреднения. Как будет видно из последующего, при определении m-го приближения к решению системы (3.1 имеет смысл рассматривать систему (3.6) только при $j = m - 1$.

Теорема 4. Пусть при $x \in G$, $y \in G_1$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $t \geqslant t_0$ функции $f(x, t)$, $A(x)$, $X(x, y, t, \varepsilon)$ удовлетворяют по переменным x, t, ε тем же требованиям, что и в п. 1, 2. Пусть функция X имеет $m + 1$ равномерно ограниченных производных по y. Пусть при $j = m - 1$ улучшенное m-е приближение к решению системы (3.6) и полученное из (3.6) уравнение медленных движений обладают теми же свойствами, что и в теореме 1, пусть $y^{(m-1)}(t, x^{(m)}, \varepsilon)$ остается в $G_1 - \alpha$, где α не зависит от t, ε. Тогда решение системы (3.1) с начальными условиями

$$x(t_0) = x^{(m)}(t_0) = \xi_m(t_0) = a, \quad y(t_0) = y^{(m-1)}(t_0, a) = b$$

при достаточно малых $|\varepsilon|$ и $m > k + r - 1$ при всех $t \geqslant t_0$ остается в $G \times G_1$ и аппроксимируется функциями $x^{(m)}, y^{(m-1)}(t, x^{(m)})$ с точностью $|\varepsilon|^{m-k+1}$, т. е.

$$|x - x^{(m)}| < C_m |\varepsilon|^{m-k+1}, \tag{3.7}$$

$$|y - y^{(m-1)}(t, x^{(m)})| < C_{1m} |\varepsilon|^{m-k+1}$$

Доказательство. Предполагаем, что x, y и все рассматриваемые приближения к ним остаются в G, G_1. Введем в (3.1) новую переменную ψ соотношением

$$\psi = y - y^{(m-1)}(t, x) \quad (\psi(t_0) = 0) \tag{3.8}$$

Придем к системе

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(x, y^{(m-1)}, t, \varepsilon) + \varepsilon P_m(x, \psi, t, \varepsilon)\psi \tag{3.9}$$

$$\psi^{\cdot} = A(x)\psi - \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \ldots + \varepsilon^{m-1}\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x}\right)P_m\psi + \varepsilon^m\Psi_m$$

Здесь $P_m\psi$ — остаточный член в представлении $X(x, y^{(m-1)} + \psi, t, \varepsilon)$ по формуле Лагранжа, а Ψ_m состоит из членов порядка ε^m и старше в выражении $\varepsilon(\partial y^{(m-1)} / \partial x)X(x, y^{(m-1)}, t, \varepsilon)$, если представить X в виде разложения по степеням ε с остаточным членом порядка $m - 1$.

В силу условия теоремы функции P_m, Ψ_m, $\partial\varphi_0 / dx, \ldots, \partial\varphi_{m-1} / \partial x$ равномерно ограничены. Поэтому при достаточно малых $|\varepsilon|$ вещественные части собственных чисел матрицы

$$A(x) - \varepsilon(\partial\varphi_0/\partial x + \ldots + \varepsilon^{m-1}\partial\varphi_{m-1}/\partial x)P_m$$

будут меньше постоянной $-\mu' = -\mu + |\varepsilon\mu_1|$. Это позволяет применить ко второму уравнению (3.9) теорему Коппеля и аналогично п. 2 получить оценку $|\psi| \leqslant c|\varepsilon|^m$, где c не зависит от t, ε. Таким образом, для члена $\varepsilon P_m\psi$ получается оценка $|\varepsilon P_m\psi| \leqslant p_{1m}|\varepsilon|^{m+1}$.

Пусть для системы (3.6) при $j = m - 1$ построено улучшенное m-е приближение вида (1.2) и уравнение (1.3). Введем в (3.9) новую переменную ξ соотношением (1.8). Вместо первого уравнения (3.9) получим уравнение, аналогичное (1.9)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\Xi^{(m-1)}(\xi) + \varepsilon^{m+1}[R_m(\xi, t, \varepsilon) + R_{1m}(\xi, \psi, t, \varepsilon)] \tag{3.10}$$

где функция R_{1m} равномерно ограничена. Теперь можно повторить доказательство теоремы 1, заменив R_m на $R_m + R_{1m}$. Отсюда следует первая из оценок (3.7).

Рассмотрим выражение $y^{(m-1)}(t, x^{(m)}(t), \varepsilon)$. Получим

$$\begin{aligned} &|y - y^{(m-1)}(t, x^{(m)}, \varepsilon)| = |[y - y^{(m-1)}(t, x, \varepsilon)] + \\ &+ [y^{(m-1)}(t, x, \varepsilon) - y^{(m-1)}(t, x^{(m)}, \varepsilon)]| \leqslant \\ &\leqslant c|\varepsilon|^m + h|x - x^{(m)}| \leqslant c|\varepsilon|^m + hC_m|\varepsilon|^{m-k+1} \end{aligned}$$

Здесь постоянная h, не зависящая от t, ε, существует в силу ограниченности производной $\partial y^{(m-1)}/\partial x$. Из (3.10) получается вторая оценка (3.7).

Имея приведенные выше оценки, можно показать, аналогично п. 1, что из условия $\xi_m(t) \in G$, $y^{(m-1)}(t, x^{(m)}) \in G_1 - \alpha$ следует, что при достаточно малых $|\varepsilon|$ функции $\xi(t)$, $x(t) \in G$, $y(t) \in G_1$.

Если для уравнений медленных движений (3.6) при $j = m - 1$ справедливы условия теоремы 2, то можно доказать аппроксимацию вида (3.7) при $m > 2k - 2$. При этом оказывается, что решение $x(t)$ экспоненциально устойчиво, а область притяжения при $t = t_0$ имеет размеры $O(|\varepsilon|^{k-1})$ по x и размеры, не зависящие от ε — по y.

Возможен другой вариант исключения быстрых переменных в системе (3.1). При этом x ищется в виде (1.2), а y — в виде

$$y^{(m-1)} = \varphi_0(t, \xi_m) + \varepsilon\varphi_1(t, \xi_m) + \ldots + \varepsilon^{m-1}\varphi_{m-1}(t, \xi_m)$$

Для ξ_m строится уравнение вида (1.3). Внося указанные выражения в уравнения (3.1), заменяя $\xi^{\cdot}$, согласно (1.3), и приравнивая члены при степенях ε, получим для φ_0 уравнение

$$\varphi_0^{\cdot} = A(\xi_m)\varphi_0 + f(\xi_m, t), \quad \xi_m = \text{const}$$

После этого функция Ξ_0 находится как среднее от X при $y = \varphi_0$ и т. д. Иначе говоря, в этом варианте осреднение системы (3.6) и представление быстрых переменных через медленные выполняется одновременно. Для второго варианта также можно доказать аппроксимацию типа (3.7), только следует одновременно оценивать функции $Z_m = \xi - \xi_m$, $\psi = y - y^{(m-1)}$.

Поступила 28 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Забрейко П. П., Ледовская И. Б.* К обоснованию метода Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 2.
2. *Миркина А. С.* Об одной модификации метода усреднения и оценке старших приближений. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
3. *Алексеев В. М.* Об одной оценке возмущений решений обыкновенных дифференциальных уравнений. I. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1961, № 2.
4. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.
5. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., «Наука», 1973.
6. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1966.
7. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 6.
8. *Реймерс Н. А., Ходжаев К. Ш.* Усреднение квазилинейных систем со многими быстрыми переменными. Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 8.