Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 531.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. Б. Колмановский, В. Р. Носов

(Москва)

В развитие результатов, полученных ранее [1,2], для нелинейных систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа устанавливаются общие теоремы об устойчивости, использующие знакопостоянные функционалы типа Ляпунова. Существенную роль играют понятия, связанные с устойчивостью вспомогательных разностных неравенств.

В ряде работ [1–4] изучалось применение методов Ляпунова к изучению устойчивости систем уравнений нейтрального типа [5]. В работе [1] был предложен метод изучения устойчивости систем нейтрального типа с помощью лишь знакопостоянных, но не знакоопределенных функционалов типа Ляпунова. Указанный метод был использован [2] при получении условий устойчивости нелинейных уравнений первого порядка нейтрального типа. Аналогичный метод был использован в [4] для исследования устойчивости решений уравнений нейтрального типа с линейной нейтральной частью.

1. Пусть R^n обозначает n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$. Через $C\,[a,\,b]$ обозначим пространство непрерывных на $[a,\,b]$ функций $x\,(s)$, $x : R^1 \to R^n$, с нормой

$$\|x\,(s)\| = \max_{a\leqslant s\leqslant b} |x\,(s)|$$

Пусть $h > 0$ — некоторое фиксированное число и $x\,(t) \in C\,[-h,\,T]$. Через x_t обозначим элемент пространства $C\,[-h,\,0]$ вида

$$x_t = x_t\,(\theta) = x\,(t+\theta), \quad -h \leqslant \theta \leqslant 0,\; t \in [0,\,T]$$

Обозначим через S_H шар в пространстве $C\,[-h,\,0]$

$$S_H = \{x\,(\theta) \in C\,[-h,\,0],\; \|x\,(\theta)\| \leqslant H\}$$

Пусть

$$F\,(t,\,x_t), \quad F : [0,\,\infty) \times S_H \to R^n$$

$$G\,(t,\,x_t),\; G : [0,\,\infty) \times S_H \to R^n$$

два заданных непрерывных отображения, причем для некоторого $H > 0$ будет

$$|F\,(t,\,x_t)| \leqslant M,\; t \in [0,\,\infty),\; x_t\,(\theta) \in S_H \tag{1.1}$$

Рассмотрим следующую начальную задачу для функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа

$$d/dt\,[x\,(t) - G\,(t,\,x_t)] = F\,(t,\,x_t),\; x_0\,(\theta) = \varphi\,(\theta) \tag{1.2}$$

Для любой функции $\varphi(\theta) \in C[-h, 0]$ будем называть $x(t) = x(t, \varphi)$ решением задачи (1.2) на отрезке $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, если $x(t) \in C[-h, \alpha]$, $x_0(\theta) = \varphi(\theta)$ и функция

$$Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t)$$

имеет непрерывную производную, удовлетворяющую уравнению (1.2) для каждого $t \in [0, \alpha]$.

Всюду ниже предполагается, что решение задачи (1.2) существует и единственно. Для этого кроме сформулированных условий надо наложить еще некоторые требования на $G(t, x_t)$ и $F(t, x_t)$.

Например, достаточно предположить, что $G(t, \varphi)$ удовлетворяет локальному условию Липшица с константой, меньшей единицы для всех функций $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$, таких, что при некотором $\varepsilon > 0$ $\varphi(s) \equiv \psi(s)$, $-h \leqslant s \leqslant -\varepsilon < 0$, а $F(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица в шаре S_H. Точную формулировку теоремы существования и единственности задачи (1.2) можно найти в [6].

Пусть $G(t, 0) \equiv 0$ и $F(t, 0) \equiv 0$. Тогда уравнение (1.2) имеет тривиальное решение, отвечающее начальной функции $\varphi(\theta) \equiv 0$.

Определение 1. Тривиальное решение задачи (1.2) назовем:

а) устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $t \geqslant 0$ будет $|x(t, \varphi)| \leqslant \varepsilon$, если только $\|\varphi(\theta)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$;

б) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} x(t, \varphi) = 0$$

для всех $\varphi(\theta) \in \Omega \subset C[-h, 0]$. Область Ω называется областью притяжения тривиального решения.

В дальнейшем большую роль будут играть понятия, связанные с устойчивостью разностных неравенств. Рассмотрим разностное неравенство

$$|Z(t, y_t)| = |y(t) - G(t, y_t)| \leqslant f(t), \quad y_0 = \varphi \tag{1.3}$$

Здесь $f(t)$ — неотрицательная непрерывная скалярная функция, $\varphi(\theta) \in C[-h, 0]$. Обозначим через $y(t, \varphi)$ любое решение разностного неравенства (1.3) с начальным условием $y_0 = \varphi$. Напомним, что $G(t, 0) \equiv 0$.

Определение 2. Тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ разностного неравенства (1.3) назовем:

а) f-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех начальных условиях и правых частях, таких, что

$$\|\varphi(\theta)\| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad \sup_{0\leqslant t} f(t) \leqslant \delta(\varepsilon) \tag{1.4}$$

будет $|y(t, \varphi)| \leqslant \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$;

б) асимптотически f-устойчивым, если оно f-устойчиво и сверх того

$$\lim_{t\to\infty} y(t, \varphi) = 0 \tag{1.5}$$

для всех $\varphi \in \Omega \subset C[-h, 0]$ и всякой правой части $f(t)$, такой, что $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

в) f-ограниченным, если каждой ограниченной функции $f(t)$ отвечает ограниченное решение $y(t, \varphi)$.

Пусть $V(Z(t, x_t), x_t, t)$ — некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов для всех $x_t \in S_H$ и $t \in [0, \infty)$, и такой, что его производная в силу уравнения (1.2) существует. Обозначим ее через

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV(Z(t, x_t), x_t, t)}{dt}$$

Поскольку производная $dZ(t, x_t)/dt$ существует, а производной dx/dt может и не существовать, то требование существования производной dV/dt накладывает определенные ограничения на зависимость V от x_t.

Обозначим через $\omega_i(u)$, ω_i: $R^1 \to R^1$ некоторые непрерывные неубывающие функции, такие, что

$$\omega_i(0) = 0; \quad \omega_i(u) > 0, \quad u > 0 \tag{1.6}$$

Теорема 1. Пусть существует функционал $V(Z^{\cdot}(t, x_t), x_t, t)$, удовлетворяющий сформулированным выше требованиям, и такой, что

1) $\omega_1(|Z(t, x_t)|) \leqslant V(Z(t, x_t), x_t, t) \leqslant \omega_2(\|x_t(\theta)\|)$
2) $dV/dt \leqslant 0$
3) тривиальное решение разностного неравенства (1.3) f-устойчиво.

Тогда тривиальное решение уравнения (1.2) устойчиво.

Доказательство. Возьмем произвольное ε, $0 < \varepsilon < H$. В силу f-устойчивости неравенства (1.3) для этого ε можно найти такое $\delta_1 > 0$, что всякое решение неравенства

$$|Z(t, x_t)| = |x(t) - G(t, x_t)| \leqslant f(t), \quad x_0 = \varphi$$

при условиях, что $f(t) \leqslant \delta_1$, $t \geqslant 0$, $\|\varphi(\theta)\| \leqslant \delta_1$, будет удовлетворять соотношению

$$|x(t, \varphi)| \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0$$

Возьмем теперь δ_2, $0 < \delta_2 \leqslant \delta_1$, такое, что $\omega_2(\delta_2) = \omega_1(\delta_1)$. Тогда при $\|\varphi(\theta)\| \leqslant \delta_2$ в силу условий 1), 2) имеем

$$\omega_1(|Z(t, x_t)|) \leqslant V(Z(t, x_t), x_t, t) \leqslant$$
$$\leqslant V(Z(0, \varphi), \varphi, 0) \leqslant \omega_2(\delta_2) = \omega_1(\delta_1)$$

Отсюда в силу монотонности функции $\omega_1(u)$ следует, что

$$|Z(t, x_t)| = f(t) \leqslant \delta_1$$

Учитывая f-устойчивость разностного неравенства, получим, что $|x(t, \varphi)| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant 0$, для всех $\varphi(\theta)$, таких, что $\|\varphi(\theta)\| \leqslant \delta_2 \leqslant \delta_1$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть существует функционал $V(Z(t, x_t), x_t, t)$, удовлетворяющий условиям теоремы 1, и такой, что

$$dV(Z(t, x_t), x_t, t)/dt \leqslant -\omega_3(|Z(t, x_t)|) \tag{1.7}$$

Пусть тривиальное решение разностного неравенства (1.3) асимптотически f-устойчиво. Тогда тривиальное решение уравнения (1.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. В силу теоремы 1 тривиальное решение уравнения (1.2) устойчиво. Значит можно указать такое δ, что при $\varphi(\theta) \in S_\delta$ будет $x(t, \varphi) \in S_H$, $t \geqslant 0$.

Покажем, что при этом

(1.8) $$|Z(t, x_t)| \to 0, \quad t \to \infty$$

Пусть это не так. Тогда существовало бы число γ, $0 < \gamma < H$, и последовательность точек $t_i \to \infty$, такие, что

$$|Z(t_i, x_{t_i})| \geqslant \gamma$$

В силу уравнения (1.2) и условия (1.1) при $\varphi \in S_\delta$ имеем

$$|dZ(t, x_t) / dt| = |F(t, x_t)| \leqslant M$$

Значит, для $\tau \in [t_i - \gamma(2M)^{-1}, t_i + \gamma(2M)^{-1}]$ будет

$$|Z(\tau, x_\tau)| \geqslant \gamma / 2$$

Обозначим через $n(t)$ число точек $t_i \in [0, t]$. Тогда в силу (1.7) имеем

$$V(Z(t, x_t), x_t, t) - V(Z(0, \varphi), \varphi, 0) = \int_0^t \frac{dV}{ds} ds \leqslant$$

$$\leqslant -\int_0^t \omega_3(|Z(s, x_s)|) ds \leqslant -\frac{\gamma}{M} \omega_3\left(\frac{\gamma}{2}\right) n(t) \to -\infty, \quad t \to \infty$$

Это, однако, противоречит тому, что в силу условия 1) разность $V(Z(t, x_t), x_t, t) - V(Z(0, \varphi), \varphi, 0)$ ограничена. Значит, доказано, что при $\varphi(\theta) \in S_\delta$ справедливо соотношение (1.8).

Отсюда в силу асимптотической f-устойчивости неравенства (1.3) следует асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения (1.2). Теорема 2 доказана.

В качестве следствия из теоремы 2 установим следующее утверждение. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

(1.9) $$x^{\cdot}(t) = F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geqslant 0$$

Здесь F: $[0, \infty) \times R^n \to R^n$ — непрерывная по совокупности аргументов функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по второму аргументу, $F(t, 0) \equiv 0$.

Наряду с уравнением (1.9) рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа вида

(1.10) $$dZ(t, x_t) / dt = F(t, Z(t, x_t)), \quad x_0 = \varphi$$
$$Z(t, x_t) = x(t) - G(t, x_t)$$

где $G(t, x_t)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям.

Теорема 3. Пусть тривиальное решение уравнения (1.9) равномерно асимптотически устойчиво по начальному моменту t_0 и координате x_0. Пусть далее тривиальное решение разностного неравенства (1.3) асимптотически f-устойчиво. Тогда тривиальное решение уравнения (1.10) асимптотически устойчиво.

Доказательство. В силу теоремы обращения [7] для уравнения (1.9) существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $W(t, x)$, такая, что

$$\omega_1(|x|) \leqslant W(t, x) \leqslant \omega_2(|x|)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \leqslant -\omega_3(|x(t)|)$$

Рассмотрим теперь функционал $W(t, Z(t, x_t))$. Нетрудно видеть, что при $x_t \in S_H$ будет

$$\omega_1(|Z(t, x_t)|) \leqslant W(t, Z(t, x_t)) \leqslant \omega_2(|Z(t, x_t)|) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_4(\|x_t\|)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial Z_i} \frac{dZ_i}{dt} \leqslant -\omega_3(|Z(t, x_t)|)$$

Поэтому функционал $W(t, Z(t, x_t))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Учитывая, что тривиальное решение разностного неравенства (1.3) предполагается асимптотически f-устойчивым, получим, что тривиальное решение уравнения нейтрального типа (1.10) будет также асимптотически устойчивым. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть отображение $G(t, x_t)$ удовлетворяет условию Липшица вида

(1.11) $$|G(t, x_t) - G(t, y_t)| \leqslant \alpha \|x_t - y_t\|, \quad 0 < \alpha < 1$$
$$\forall x_t, y_t \in S_H, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Пусть существует функционал $V(Z(t, x_t), x_t, t)$, удовлетворяющий условию 1) теоремы 1 и такой, что

(1.12) $$dV / dt \leqslant -\omega_5(|x(t)|)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1.2) асимптотически устойчиво:

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 1, доказанной ниже, тривиальное решение уравнения (1.2) устойчиво. Поэтому $x(t, \varphi) \in S_H$ для $\varphi(\theta) \in S_\delta$. Покажем, что $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, и докажем тем самым асимптотическую устойчивость.

Предположим противное. Тогда существует число $\gamma > 0$ и последовательность точек t_i, такие, что $|x(t_i)| > \gamma$. Из уравнения (1.2) следует, что

$$x(t) = G(t, x_t) + \int_0^t F(s, x_s)\, ds$$

Здесь принято, что $x(s) = \varphi(s)$ при $s \leqslant 0$. Тогда для $\Delta > 0$ имеем с учетом (1.11):

(1.13) $$|x(t+\Delta) - x(t)| = |G(t+\Delta, x_{t+\Delta}) - G(t, x_t) +$$
$$+ \int_t^{t+\Delta} F(s, x_s)\, dt| \leqslant \alpha \|x_{t+\Delta} - x_t\| + M\Delta$$

Обозначим

$$\rho(\eta) = \sup_{0 \leqslant t} \sup_{\Delta \leqslant \eta} |x(t+\Delta) - x(t)|$$

Из (1.13) следует, что

$$\rho(\eta) \leqslant \alpha\rho(\eta) + \alpha \max_{\eta\geqslant\Delta} \max_{-h\leqslant\theta\leqslant 0} |x(\theta+\Delta) - \varphi(\theta)| + M\eta$$

Значит

$$\rho(\eta) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{\eta\geqslant\Delta} \max_{-h\leqslant\theta\leqslant 0} |x(\theta+\Delta) - \varphi(\theta)| + \frac{M}{1-\alpha}\eta$$

Правая часть этого неравенства в силу равномерной непрерывности функции $x(\theta)$ на замкнутом отрезке $[-h, \eta]$ стремится к нулю при $\eta \to 0$. Значит, найдется $\bar{\eta} > 0$, такое, что $\rho(\eta) \leqslant \gamma/2$. При этом для $\tau \in [t_i - \bar{\eta}, t_i + \bar{\eta}]$ равномерно по всем i будет $|x(\tau)| \geqslant \gamma/2$. Из этого, так же как и в теореме 2, сразу следует противоречие. Теорема 4 доказана.

Конкретные условия устойчивости в терминах коэффициентов скалярных уравнений первого порядка с распределенными и неограниченными отклонениями аргументов, которые могут рассматриваться как непосредственное следствие теоремы 3, получены в работе [3].

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости в целом тривиального решения уравнения (1.2). Будем считать, что отображения $F(t, x_t)$ и $G(t, x_t)$ определены и непрерывны на всем пространстве $[0, \infty) \times C[-h, 0]$. Пусть, кроме того, $|F(t, x_t)| \leqslant M_H$ для всех $H > 0$, $x_t \in S_H$ и $t \geqslant 0$. Будем предполагать также, что условия теоремы существования и единственности выполняются для произвольного шара S_H.

Определение 3. Тривиальное решение уравнения (1.2) назовем асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво и для любой начальной функции $\varphi(\theta)$ справедливо равенство

(2.1) $$\lim_{t\to\infty} |x(t, \varphi)| = 0$$

Теорема 5. Пусть существует функционал $V(Z(t, x_t), x_t, t)$ определенный и непрерывный на всем пространстве $[0, \infty) \times C[-h, 0]$ и удовлетворяющий всем условиям теорем 2 или 4 на этом пространстве. Пусть, кроме того

(2.2) $$\omega_1(u) \to \infty, \quad u \to \infty$$

и тривиальное решение разностного неравенства (1.3) f-ограничено. Тогда тривиальное решение уравнения (1.2) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Очевидно, что тривиальное решение уравнения (1.2) устойчиво. Докажем, что и второе условие определения 3 выполняется. Для этого покажем прежде всего, что любое решение $x(t, \varphi)$ является ограниченным.

Пусть $\|\varphi(\theta)\| = K$. В силу (2.2) найдется такое $R \geqslant K > 0$, что

$$\omega_1(R) = \omega_2(K), \quad \omega_1(u) > \omega_2(K) \quad \text{при } u > R$$

При этом будет

(2.3) $$|Z(t, x_t(t+\theta, \varphi)| \leqslant R, \quad t \geqslant 0$$

В противном случае, т. е. при существовании $s \geqslant 0$, такого, что $|Z(s, x_s)| > R$, имели бы противоречивое соотношение

$$\omega_2(K) = \omega_1(R) < \omega_1(|Z(s, x_s)|) \leqslant V(Z(s, x_s), x_s, s) \leqslant$$
$$\leqslant V(Z(0, \varphi), \varphi, 0) \leqslant \omega_2(K)$$

Значит, неравенство (2.3) установлено. В силу предположения об f-ограниченности решений неравенства (2.3) получаем, что найдется $q > 0$, такое, то

$$| x (t, \varphi) | \leqslant q, \quad t \geqslant 0$$

В шаре S_q выполняются все условия теорем 2 или 4 и поэтому будет справедливо соотношение 2.1.

Теорема 5 установлена.

3. Установим некоторые достаточные признаки f-устойчивости тривиального решения разностного неравенства (1.3).

Лемма 1. Пусть отображение $G(t, y_t)$ удовлетворяет условию Липшица (1.11). Тогда тривиальное решение неравенства (1.3) f-устойчиво и f-ограничено.

Доказательство. Из неравенства (1.3) следует

$$| y (t) | \leqslant | G (t, y_t) | + f (t) \leqslant \alpha \| y_t (\theta) \| + f (t)$$

Обозначим через

$$m (t) = | \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \| y (s) \|)$$

Тогда получаем, что

$$m (t) \leqslant \alpha\, m (t) + \alpha \| \varphi (\theta) \| + \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} f (s)$$

Отсюда следует, что

$$m (t) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \| \varphi (\theta) \| + \frac{1}{1-\alpha} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} f (s) \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) означает, что тривиальное решение (1.3) f-устойчиво и f-ограничено.

Лемма 2. Пусть

$$G (t, y_t) \equiv g (t, y (t - h))$$

где g есть функция из $R^1 \times R^n$ в R^n и $h > 0$ — некоторое число. Тогда, если

$$| g (t, y (t - h)) | \leqslant \gamma | y (t - h) |, \quad 0 < \gamma < 1 \tag{3.2}$$

то тривиальное решение неравенства

$$| y (t) - g (t, y (t - h)) | \leqslant f (t) \tag{3.3}$$

асимптотически f-устойчиво.

Доказательство. Из (3.2) и (3.3) следует для $-h \leqslant s \leqslant 0$, что

$$| y (s + h) | \leqslant | g (s, y (s))| + f (s + h) \leqslant \gamma | y (s) | + f (s + h) \tag{3.4}$$

Аналогично получаем

$$| y (s + nh) | \leqslant \gamma | y (s + (n - 1) h) | + f (s + (n - 1) h) \leqslant \gamma^n | y (s) | + f (s + (n - 1) h) + \gamma f (s + (n - 2) h) + \ldots + \gamma^{n-1} f (s + h)$$

В силу f-устойчивости тривиального решения (3.3), очевидно, найдется такое N, что

$$\gamma^n | y (s) | \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{при } n \geqslant N \tag{3.5}$$

Далее, поскольку $f(t)$ — ограниченная и стремящаяся к нулю функция, то существует такое число m, что при $n \geqslant m$ будет

$$f(s+nh) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}(1-\gamma), \quad \frac{\gamma^m}{1-\gamma} \max_{t \geqslant 0} f(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Но тогда при $n \geqslant 2m$ имеем:

$$\begin{gathered}f(s+nh)+\ldots+\gamma^{n-1}f(s+h)=f(s+nh)+\gamma f(s+(n-1)h)+\\ \ldots+\gamma^{n-m+1}f(s+mh)+\gamma^{n-m}[f(s+(m-1)h)+\ldots\\ \ldots+\gamma^{m-1}f(s+h)]\max_{t\geqslant 0}f(t)\leqslant\\ \leqslant\frac{\varepsilon}{(1-\gamma)3}(1-\gamma)+\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\max_{t\geqslant 0}f(t)\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon\end{gathered} \tag{3.6}$$

При $n \geqslant \max\{N, 2m\}$ будут одновременно выполняться неравенства (3.5) и (3.6), т. е. будет

$$|y(s+nh)| \leqslant \varepsilon, \quad -h \leqslant s \leqslant 0$$

Значит, $\| y_{nh}(\theta) \| \leqslant \varepsilon$.

Для формулировки леммы 3 приведем некоторые понятия, связанные с теорией почти-периодических функций [8]. Спектр почти-периодической функции $\varphi(t)$ есть множество

$$\Lambda(\varphi) = \{\lambda \in R^1 \colon M[e^{i\lambda t}\varphi(t)] \neq 0\}$$

$$M[\psi] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,dt$$

Модулем почти-периодической функции называют множество

$$\mathrm{Mod}(\varphi) = \left\{\sum_{i=1}^{K} m_i\lambda_i,\ \lambda_i \in \Lambda(\varphi),\ m_i \text{ — целые},\ K \text{ — натуральное}\right\}$$

Лемма 3. Пусть

$$G(t, y_t) \equiv g(t, y(t-h)), \qquad g\colon R^1 \times R^n \to R^n,\ h > 0$$
$$|g(t, y(t-h))| \leqslant \gamma(t)\,|y(t-h)|, \quad \gamma(t) > 0.$$

Пусть функция $\gamma(t)$ либо почти-периодическая и удовлетворяет условиям

$$\forall(\lambda : \lambda \in \mathrm{Mod}(\gamma),\ \lambda \neq 0)\ [h\lambda \neq 0 \pmod{2\pi}]$$
$$M(\ln\gamma(t)) < 0$$

либо функция $\gamma(t)$ — ω-периодична, h несоизмеримо с ω и справедливо неравенство

$$\int_0^\omega \ln\gamma(t)\,dt < 0$$

Тогда тривиальное решение неравенства (3.3) асимптотически f-устойчиво и f-ограничено.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$(Ay)(t) = \gamma(t)\,y(t-h)$$

Как показано в [9], при выполнении условий леммы 3 спектральный радиус $r(A)$ оператора A будет меньше единицы,

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} (\| A^n \|)^{1/n} < 1$$

Значит, для достаточно большого l будет

$$\gamma_1 = \| A^l \| < 1$$

Но тогда

$$\begin{aligned} &| y(s+lh) | \leqslant \gamma(s+lh) \, | y(s+(l-1)h) | + f(s+lh) = \\ &= (Ay)(s+lh) + f(s+lh) \leqslant \ldots \leqslant (A^l y)(s+lh) + f(s+lh) + \\ &+ (Af)(s+lh) + (A^2 f)(s+lh) + \ldots + (A^{l-1}y)(s+lh) = \\ &= (A^l y)(s+lh) + F_1(s+lh) \leqslant \gamma_1 | y(s) | + F_1(s+lh) \end{aligned}$$

Здесь положено

$$F_1(s+lh) = f(s+lh) + (Af)(s+lh) + \ldots + (A^{l-1}f)(s+lh)$$

причем очевидно, что $F_1(t)$, так же как и $f(t)$, — ограниченная и стремящаяся к нулю при $t \to \infty$ функция. Обозначая $lh = h_1$, получим неравенство

$$| y(s+h_1) | \leqslant \gamma_1 | y(s) | + F_1(s+h_1), \quad 0 < \gamma_1 < 1$$

полностью аналогичное неравенству (3.4). Повторяя теперь окончание доказательства лемм 1 и 2, получим утверждение леммы 3.

Пусть теперь отображение $G(t, y_t)$ не зависит от значений функции $y_t(\theta)$ при $\theta \in [t-\Delta, t]$. Здесь Δ, $0 < \Delta < h$ — заданное число. Отметим, что в этом случае для решения разностного неравенства (1.3) применим метод шагов.

Лемма 4. Пусть $G(t, y_t)$ не зависит от значений $y_t(\theta)$, $\theta \in [t-\Delta, t]$ и удовлетворяет условию Липшица (1.11). Пусть далее

$$\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^N = \gamma_3 < 1 \tag{3.7}$$

Здесь N — наименьшее натуральное число, такое, что $N\Delta \geqslant h$. Тогда тривиальное решение неравенства (1.3) асимптотически f-устойчиво.

Доказательство. Из соотношений (1.3) и (1.11) вытекает оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\Delta} | y(t) | \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant\Delta} \{| G(t, y_t) | + f(t)\} \leqslant \alpha \| \varphi(\theta) \| + \max_{0\leqslant t\leqslant\Delta} f(t)$$

Далее

$$\begin{aligned} &\max_{0\leqslant t\leqslant 2\Delta} | y(t) | \leqslant \alpha \{\max_{0\leqslant t\leqslant\Delta} | y(t) | + \| \varphi(\theta) \|\} + \max_{0\leqslant t\leqslant 2\Delta} f(t) \leqslant (\alpha + \\ &+ \alpha^2) \| \varphi(\theta) \| + \alpha \max_{0\leqslant t\leqslant\Delta} f(t) + \max_{0\leqslant t\leqslant 2\Delta} f(t) \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant h} | y(t) | = \| y_h(\theta) \| \leqslant (\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^N) \| \varphi(\theta) \| + F_2(h) \tag{3.8}$$

$$F_2(t) = \max_{t-h\leqslant s\leqslant t} f(s) + \alpha \max_{t-h+\Delta\leqslant s\leqslant t} f(s) + \ldots +$$

$$+ \alpha^N \max_{t-h+(N-1)\Delta\leqslant s\leqslant t} f(s)$$

Функция $F_2(t)$, так же как и $f(t)$, является ограниченной и стремится к нулю при $t \to \infty$. Отметим, что неравенство (3.8) подобно неравенству (3.4). Повторяя теперь окончание доказательства леммы 2, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 4.

Замечание. Условие (3.7), фигурирующее в формулировке леммы 4, выполнено, если, например, $\alpha < 1/2$.

4. *Примеры.*

1°. Рассмотрим уравнение

$$(4.1)\qquad x^{\cdot\cdot}(t) + cx^{\cdot\cdot}(t-h) + g(x(t) + cx(t-h)) = 0,\ h > 0$$

При условиях, что

$$ug(u) > 0,\ u \neq 0,\ |c| < 1$$

тривиальное решение (4.1) будет устойчиво. Запишем (4.1) в виде

$$Z(t, x_t) = x(t) + cx(t-h)$$

$$Z^{\cdot} = \omega,\ \dot{\omega} = -g(Z)$$

и рассмотрим функционал

$$(4.2)\qquad V(Z(t, x_t), \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \int_0^Z g(u)\,du$$

Производная функционала (4.2) на решениях уравнения (4.1) равна $dV/dt = \omega\dot{\omega} + Zg^{\cdot}(Z) = 0$.

В силу теоремы 1 и леммы 1, все условия которых выполнены, тривиальное решение уравнения (4.1) устойчиво.

2°. Рассмотрим уравнения

$$(4.3)\qquad x^{\cdot\cdot}(t) + \varphi(x(t))\,x^{\cdot}(t) + f(x) = 0$$

$$(4.4)\qquad Z^{\cdot\cdot}(t, x_t) + \varphi(Z(t, x_t))\,Z^{\cdot}(t, x_t) + f(Z(t, x_t))$$

$$Z(t, x_t) = x(t) + {}^1/_2 \exp(\sin t)\, x(t-1)$$

Тривиальное решение уравнения (4.3) при условиях, что

$$x f(x) > 0,\qquad x \neq 0,\quad \varphi(x) > 0$$

равномерно асимптотически устойчиво [10].

В силу теоремы 3 и леммы 3 тривиальное решение уравнения (4.4) также асимптотически устойчиво. Если к тому же

$$\int_0^x f(s)\,ds \to \infty,\ |x| \to \infty$$

то тривиальное решение (4.4) будет асимптотически устойчиво в целом.

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Об устойчивости нелинейных колебательных систем, описываемых уравнениями нейтрального типа. Тр. 5-й междунар. конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1969, т. 2. Киев, Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1970.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Об устойчивости нелинейных уравнений нейтрального типа первого порядка. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
3. *Мисник А. Ф., Носов В. Р.* К вопросу об устойчивости дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. В кн.: Сб. научных работ аспирантов Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы. М., 1968, вып. 1.
4. *Cruz M. A., Hale J. K.* Stability of functional differential equations of neutral type. J. Different. Equat., 1970, vol. 7, No. 2, p. 334—355.
5. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., «Наука», 1964.
6. *Hale J. K., Cruz M. A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems. Ann. matem. pura ed appl. 1970. No. 85, p. 63—81.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
8. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.
9. *Мухамадиев Э., Садовский Б. Н.* Об оценке спектрального радиуса одного оператора, связанного с уравнениями нейтрального типа. Матем. заметки, 1973, т. 13, № 1.
10. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М., «Наука», 1970.