Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 62—50

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ О ВСТРЕЧЕ С m ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

М. С. Габриелян, А. И. Субботин

(Ереван, Свердловск)

Рассматривается дифференциальная игра сближения — уклонения для нескольких целевых множеств. Определены кусочно-позиционные стратегии игроков, установлено, что в классе этих стратегий существует ситуация ε-равновесия. Материал данной работы примыкает к исследованиям [1,2].

1. Пусть движение управляемой системы описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad f : [t_0, \infty) \times R^n \times P \times Q \to R^n \tag{1.1}$$

где f — непрерывная функция, $P \subset R^p$, $Q \subset R^q$ — компакты. Предполагается, что

$$|x' f(t, x, u, v)| \leqslant \varkappa (1 + \|x\|^2), \quad (t, x, u, v) \in [t_0, \infty) \times R^n \times P \times Q$$

$$\| f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leqslant \lambda_G \| x^{(1)} - x^{(2)} \|$$

$$(t, x^{(i)}, u, v) \in G \times P \times Q, \quad i = 1, 2$$

где $x'f$ — скалярное произведение векторов x и f, $\|x\|^2 = x'x$, $\varkappa$ — постоянное число, G — любая ограниченная область из $[t_0, \infty) \times R^n$.

Предполагается также, что выполняется условие

$$\min_{u\in P} \max_{v\in Q} s'f(t, x, u, v) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s'f(t, x, u, v) \tag{1.2}$$

$$s \in R^n, \quad (t, x) \in [t_0, \infty) \times R^n$$

В пространстве R^{n+1} заданы компакты M_k и N, $k = 1, \ldots, m$ (M_k — целевые множества, N — фазовое ограничение). Для непрерывной функции $x[\cdot] : [t_0, \infty) \to R^n$ определим множество

$$T_k(x[\cdot]) = \{\tau : (\tau, x[\tau]) \in M_k, \ (t, x[t]) \in N, \ t_0 \leqslant t \leqslant \tau\}$$

Полагаем далее

$$\tau_k(x[\cdot]) = \begin{cases} \min T_k(x[\cdot]), & T_k(x[\cdot]) \neq \varnothing \\ \infty, & T_k(x[\cdot]) = \varnothing \end{cases}$$

Здесь символ $\min T$ обозначает наименьшее из чисел, входящих в множество T. Таким образом $\tau_k(x[\cdot])$ — момент первого попадания точки $(t, x[t])$ на множество M_k при условии, что вплоть до встречи с M_k выполнялось включение $(t, x[t]) \in N$.

Плата γ в рассматриваемой дифференциальной игре определена равенством

$$(1.3)\qquad \gamma(x[\cdot]) = \sigma(\tau_1(x[\cdot]),\ldots,\ \tau_m(x[\cdot]))$$

$$(x[\cdot] : [t_0,\ \infty) \to R^n,\ \sigma : [t_0,\ \infty]^m \to (-\infty,\ \infty])$$

Здесь $x[\cdot]$ — реализовавшееся движение системы, σ — заданная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) на множестве $[t_0,\ \infty)^m$ функция σ принимает конечные значения и непрерывна;

2) $\sigma(\tau_1,\ldots,\ \tau_m) = \infty$, если хотя бы одно $\tau_k = \infty$;

3) множество $\sigma^{-1}((-\infty,\ c])$ ограничено для любого конечного числа c;

4) неравенство

$$\sigma(\tau_1,\ldots,\ \tau_{i-1},\ \tau_i',\ \tau_{i+1},\ldots,\ \tau_m) \leqslant \sigma(\tau_1,\ldots,\ \tau_{i-1},\ \tau_i'',\ \tau_{i+1},\ldots,\ \tau_m)$$

справедливо для любых наборов $(\tau_1,\ldots,\tau_{i-1},\tau_i',\tau_{i+1},\ldots,\ \tau_m)$ и $(\tau_1,\ldots,\ \tau_{i-1},\tau_i'',\tau_{i+1},\ldots,\ \tau_m)$, где $\tau_i' \leqslant \tau_i''$.

Указанным здесь условиям удовлетворяет, например, функция $\sigma(\tau_1,\ldots,\tau_m) = \max \tau_k$ при $k = 1,\ldots,\ m$. В этом случае $\gamma(x[\cdot]) - t_0$ — время, за которое движение $x[\cdot]$ встречается со всеми множествами M_k $(k = 1,\ldots,\ m)$ внутри N.

Предполагается, что первый игрок, которому предоставлено управление u, стремится минимизировать значение платы γ, а второй игрок, выбирающий управление v, максимизирует значение γ.

Функционал γ (1.3) полунепрерывен снизу, поэтому (см. [1], стр. 425) в рассматриваемой игре существует ситуация ε-равновесия в классе чистых стратегий $U \div u(x[\cdot;\ t_0,\ t])$ и $V \div v(x[\cdot;\ t_0,\ t])$ с полной памятью. Ниже установлено, что ситуация ε-равновесия сохраняется, если игроки используют не всю информацию о реализовавшейся к моменту времени t траектории $x[\cdot;\ t_0,\ t] = (x[\xi],\ t_0 \leqslant \xi \leqslant t)$, а лишь информацию о реализовавшейся позиции $(t,\ x[t])$ и некоторых числах t_k, определенных для этой траектории. Неформально эти числа можно определить как моменты сближения позиции $(t,\ x[t])$ с целевыми множествами M_k. В каждом промежутке между двумя такими моментами времени используются чистые позиционные стратегии $U \div u(t,\ x)$ и $V \div v(t,\ x)$. Таким образом, равновесная ситуация в рассматриваемой игре достигается в классе кусочно-позиционных стратегий.

2. Приведем формальные определения кусочно-позиционных стратегий и порожденных ими движений.

Кусочно-позиционной стратегией U первого игрока назовем набор отображений

$$(2.1)\qquad \alpha\colon (t,\ x,\ t_1,\ldots,\ t_m) \to \alpha(t,\ x,\ t_1,\ldots,\ t_m)$$

$$\varphi_k : x[\cdot;\ t_0,\ t] \to \varphi_k(x[\cdot;\ t_0,\ t])\quad (k = 1,\ldots,\ m)$$

$$t \in [t_0,\ \infty),\quad x[\cdot;\ t_0,\ t] \in C^n[t_0,\ t]$$

Здесь $C^n[t_0,\ t]$ — пространство непрерывных функций $x[\cdot;\ t_0,\ t] : [t_0,\ t] \to R^n$; функционалы φ_k определены на множестве $C_* = \{\bigcup C^n[t_0,\ t] : t_0 \leqslant$

$\leqslant t < \infty\}$ и принимают значения из $[t_0, \infty]$; функция α определена на множестве $[t_0, \infty) \times R^n \times [t_0, \infty]^m$ и принимает значения из компакта P. Каждый из функционалов φ_k удовлетворяет следующему условию. Пусть $t^* \in [t_0, \infty)$, $x^* [\cdot; t_0, t^*] \in C^n [t_0, t^*]$, $t \in [t_0, t^*]$ и $x^* [\cdot; t_0, t]$ — сужение функции $x^* [\cdot; t_0, t^*]$ на отрезок $[t_0, t]$. Тогда либо $\varphi_k (x^* [\cdot; t_0, t^*]) = \infty$ и в этом случае $\varphi_k (x^* [\cdot; t_0, t]) = \infty$ при всех $t \in [t_0, t^*]$; либо $\varphi_k (x^* [\cdot; t_0, t^*]) = t_k^* \leqslant t^*$ и в этом случае $\varphi_k (x^* [\cdot; t_0, t]) = \{\infty$ при $t_0 \leqslant t < t_k^*$, t_k^* при $t_k^* \leqslant t \leqslant t^*\}$. Таким образом, вдоль любого движения $x [\cdot]$ функционал φ_k принимает не более двух значений, причем смена одного значения на другое может произойти не более одного раза.

Аналогичным образом определяется кусочно-позиционная стратегия V второго игрока. Отображения

$$\beta : [t_0, \infty) \times R^n \times [t_0, \infty]^m \to Q \tag{2.2}$$

$$\psi_k : C_* \to [t_0, \infty] \quad (k = 1, \ldots, m)$$

определяющие V, удовлетворяют тем же условиям, что были указаны для U (2.1).

Движения, порожденные U (2.1), вводятся следующим образом. Пусть первым игроком выбрано разбиение $\Delta = \{[\tau_i, \tau_{i+1}) : i = 0,1,\ldots;$ $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$; $\tau_0 = t_0\}$. Полагаем, что при этом разбиении U(2.1) формирует кусочно-постоянное управление $u_\Delta[t]$ $(t \geqslant t_0)$ по закону

$$u_\Delta [t] = \alpha (\tau_i, x_\Delta [\tau_i; t_0, \tau_i], \varphi_1 (x_\Delta [\cdot; t_0, \tau_i]), \ldots$$
$$\varphi_m (x_\Delta [\cdot; t_0, \tau_i])) \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \quad (i = 0,1, \ldots)$$

где $x_\Delta[\cdot; t_0, \tau_i]$ — решение системы (1.1), которое реализовалось на отрезке $[t_0, \tau_i]$ и отвечает управлению $u_\Delta [t]$ и некоторому измеримому управлению $v [t] \in Q$ $(t_0 \leqslant t < \tau_i)$, выбранному вторым игроком.

Определенные указанным образом движения $x_\Delta[t] (t \geqslant t_0)$ называются аппроксимационными и обозначаются символом $x_\Delta [\cdot; t_0, x_0, U, v [\cdot]]$, где $x_0 = x_\Delta [t_0]$ — начальное состояние, $v [\cdot]$ — реализация управления второго игрока.

Обозначим символом $X (t_0, x_0, U)$ совокупность функций $x [\cdot]$: $[t_0, \infty) \to R^n$, для каждой из которых существует последовательность аппроксимационных движений $x_{\Delta_j}[\cdot; t_0, x_{0,j}, U, v_j [\cdot]]$, сходящаяся равномерно на всяком конечном отрезке $[t_0, t_*]$ к функции $x [\cdot]$ и удовлетворяющая условиям $x_{0,j} \to x_0$, $\sup_i (\tau_{i+1,j} - \tau_{i,j}) \to 0$ при $j \to \infty$. Элементы множества $X (t_0, x_0, U)$ называются движениями системы, порожденными кусочно-позиционной стратегией U первого игрока. Аналогичным образом вводятся движения $x [\cdot] \in X (t_0, x_0, V)$, порожденные кусочно-позиционной стратегией V второго игрока. Отметим, что любую пару U и V можно одновременно реализовать в дифференциальной игре, поскольку всегда можно определить движения $x [\cdot] \in X (t_0, x_0, U) \cap X (t_0, x_0, V)$, порожденные такой парой (U, V).

Теорема. Пусть выполнено условие (1.2). Тогда в классе кусочно-позиционных стратегий U и V вида (2.1), (2.2) существует ситуация

ε-равновесия, т. е. существует кусочно-позиционная стратегия U° первого игрока и для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-позиционная стратегия V^ε второго игрока, такие, что

$$\sup \gamma (X (t_0, x_0, U^\circ)) = \min_U \sup \gamma (X (t_0, x_0, U)) = \gamma_0$$

$$\inf \gamma (X(t_0, x_0, V^\varepsilon)) + \varepsilon \geqslant \sup_V \inf \gamma (X (t_0, x_0, V)) = \gamma_0$$

Эта теорема доказывается по схеме из [1]. Стратегии U° и V^ε можно определить как экстремальные к соответствующим мостам.

Приведем описание экстремальной стратегии U°. В этой стратегии функционалы φ_k° функции $x [\cdot; t_0, t]$ ставят в соответствие либо число t_k ($t_k \leqslant t$), которое неформально можно определить как момент времени, когда впервые точка $(\xi, x [\xi])$ сблизилась с множеством M_k, либо несобственное число ∞, если этого сближения на отрезке $[t_0, t]$ не произошло. Функция α° определяется следующим образом. В пространстве позиций (t, x) определен u-стабильный мост W_0 и определены также u-стабильные мосты $W_j (t_{k_1}, \ldots, t_{k_j})$, отвечающие наборам параметров $t_{k_1} \leqslant t_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_j} < \infty$ $(1 \leqslant j \leqslant m - 1)$. Для набора $t_k = \infty$, $k = 1, \ldots, m$ функция

$$\alpha^\circ (\cdot, t_1, \ldots, t_m): (t, x) \to \alpha^\circ (t, x, t_1, \ldots, t_m) \tag{2.3}$$

определена как позиционная стратегия, экстремальная к мосту W_0. Для набора $(t_1, \ldots, t_m)$, где $t_{k_1} \leqslant t_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{k_j} < \infty$, а остальные $t_k = \infty$, функция $\alpha^\circ (\cdot; t_1, \ldots, t_m)$ (2.3) является позиционной стратегией, экстремальной к мосту $W_j (t_{k_1}, \ldots, t_{k_j})$. Для набора $(t_1, \ldots, t_m)$, где $t_k < \infty$, $k = 1, \ldots, m$, функция $\alpha^\circ (\cdot, t_1, \ldots, t_m)$ (2.3) выбирается произвольно.

Таким образом, на промежутке времени $[t_0, t_{k_1})$ управление $u [t]$ формируется позиционной стратегией, экстремальной к мосту W_0; здесь t_{k_1} — момент времени, когда впервые происходит сближение с одним из множеств M_k (с множеством M_{k_1}). Затем на следующем участке $[t_{k_1}, t_{k_2})$ до сближения со следующим множеством (с множеством M_{k_2}) управление $u [t]$ назначается позиционной стратегией, экстремальной к мосту $W_1 (t_{k_1})$, и так далее.

Отметим, что построение используемых здесь мостов проводится последовательно, начиная с определения мостов $W_{m-1} (t_{k_1}, \ldots, t_{k_{m-1}})$, обрывающихся на целевом множества M_{k_m} не позже, чем в момент времени t_{k_m}. Причем указанные здесь параметры $(t_1, \ldots, t_m)$ таковы, что $\sigma (t_1, \ldots, t_m) \leqslant c$, где c — некоторое заданное число,— результат, гарантированный первому игроку при использовании экстремальной стратегии U°. Затем последовательно определяются всевозможные мосты $W_{m-2} (t_{k_1}, \ldots, t_{k_{m-2}}), \ldots, W_1 (t_{k_1})$ и W_0. Эти мосты таковы, что по каждому из мостов W_j экстремальная стратегия U° переводит систему (1.1) на один из мостов W_{j+1} и одновременно на одно из оставшихся целевых множеств M_k, тем самым стратегия U° обеспечивает решение задачи, стоящей перед первым игроком.

3. Рассмотрим случай, когда не предполагается выполнение условия (1.2). Определим стратегию U^v как набор, состоящий из m функционалов

φ_k указанного выше вида и функции $\alpha^v : [t_0, \infty) \times R^n \times Q \times [t_0, \infty]^m \to P$. Предполагается, что эта функция измерима по Борелю по переменной $v \in Q$. Отметим, что при фиксированных значениях $t_1, \ldots, t_m$ функция $\alpha^v(\cdot, t_1, \ldots, t_m) : [t_0, \infty) \times R^n \times Q \to P$ является контрстратегией (см. [1], стр. 356). При определении аппроксимационных движений $x_\Delta[\cdot; t_0, x_0, U^v, v[\cdot]]$ полагаем, что при выбранном разбиении $\Delta = \{[\tau_i, \tau_{i+1}): i = 0,1, \ldots\}$ стратегия U^v формирует управление первого игрока по закону

$$u_\Delta[t] = \alpha^v(\tau_i, x_\Delta[\tau_i; t_0, \tau_i], v[t], \varphi_1(x_\Delta[\cdot; t_0, \tau_i])_1, \ldots \varphi_m(x_\Delta[\cdot; t_0, \tau_i])), \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

где $v[t]$ $(t \geqslant t_0)$ — измеримая реализация управления второго игрока. Далее, как и в случае кусочно-позиционной стратегии U, определяется множество движений $X(t_0, x_0, U^v)$, порожденных стратегией U^v. Стратегию U^v можно реализовать в паре с V. Для дифференциальной игры (1.1), (1.3), рассматриваемой в классе указанных здесь стратегий U^v первого игрока и в классе кусочно-позиционных стратегий V второго игрока, будет справедлива теорема о существовании ситуации ε-равновесия. Ситуация ε-равновесия также имеет место для класса кусочно-позиционных стратегий U первого игрока и стратегий V^u второго игрока. Определение этих стратегий V^u получается из определения V при замене в (2.2) функции β на функцию $\beta^u : [t_0, \infty) \times R^n \times P \times [t_0, \infty]^m \to Q$. Теорема о существовании ситуации ε-равновесия в дифференциальной игре (1.1), (1.3) справедлива и для класса смешанных кусочно-позиционных стратегий $\bar{U}$ и $\bar{V}$ обоих игроков. Для определения этих стратегий следует заменить в (2.1) и (2.2) функции α и β функциями $\bar{\alpha} : [t_0, \infty) \times R^n \times [t_0, \infty]^m \mapsto \bar{P}$ и $\bar{\beta} : [t_0, \infty) \times R^n \times [t_0, \infty]^m \to \bar{Q}$, где $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ — множества вероятностных мер, нормированных на компактах P и Q соответственно. В промежутках времени, где ни один из функционалов φ_k (или ψ_k) не меняет своих значений, стратегия $\bar{U}$ (или $\bar{V}$) формирует движения системы как смешанная позиционная стратегия (см. [1], стр. 284).

Авторы благодарят Н. Н. Красовского за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 26 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Габриелян М. С.* Задача о сближении групповых управляемых объектов. Изв. АН АрмССР. Механика, 1976, № 3.