Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ УБЕГАНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ ИНФОРМАЦИИ

П. Б. Гусятников, Ю. С. Ледяев, А. В. Мезенцев

(Москва)

Рассматриваются нелинейные дифференциальные игры убегания с геометрическими и интегральными ограничениями на управления в предположении, что в каждый момент t убегающий для построения своего управляющего воздействия использует значения фазового вектора $z(s)$ и управления противника $u(s)$ для всех s, таких, что $s \leqslant t - \tau(z(t))$, где $\tau(z) = \rho(z) / c(z)$. Функция $\rho(z)$ стремится к нулю, если расстояние между z и терминальным множеством стремится к нулю, $c(z)$ — положительная «скорость» распространения информации». Получены оценки снизу функции $c(z)$, для которых выполнение условий убегания работ [1–3] гарантирует существование стратегии убегания для любой начальной позиции.

Движение вектора z в n-мерном евклидовом пространстве R^n описывается уравнением

$$dz/dt = f(t, z, u, v), \quad t \in R^1 = (-\infty, +\infty) \tag{1}$$
$$z \in R^n, \; u \in P, \; v \in Q$$

где u, v — управляющие параметры, P, Q — множества в R^n, $f(t, z, u, v)$ — непрерывная на $Y = R^1 \times R^n \times P \times Q$ функция.

Значения параметра u определяются игроком U, а значения параметра v — игроком V. Допустимые управления игроков U и V — измеримые вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$, которые удовлетворяют геометрическим или интегральным ограничениям. Управления $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют геометрическим ограничениям, если $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, $t \in R^1$, P и Q — компакты в R^n; управления $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют интегральным ограничениям, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \leqslant \rho^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt \leqslant \sigma^2, \quad u(t) \in P, \; v(t) \in Q, \; t \in R^1$$

Множество $M = \{z \mid \varphi(z) = 0, \; \Phi(z) = 0\}$, где $\varphi(z)$, $\Phi(z)$ — скалярные непрерывно дифференцируемые функции, называется терминальным множеством.

Говорят, что перечисленными данными описана дифференциальная игра, которую будем называть игрой (1.1) в случае геометрических ограничений на управления или игрой (1.2) в случае интегральных ограничений на управления игроков.

Предполагается, что в игре (1.2) множество Q содержит нуль-вектор R^n.

Обозначим $R(u, v) = 1 + |u| + |v|$, $P(r) = \{u | u \in P, \ |u| \leqslant r\}$, $Q(r) = \{v | v \in Q, \ |v| \leqslant r\}$, $r_0 = \inf \{r | P(r) = P, \ Q(r) = Q\}$; если P и Q — компакты, то $r_0 < +\infty$.

Пусть функция $f(t, z, u, v)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для любого $r > 0$ существует $N(r) < +\infty$, такое, что для всех $(t, z_i, u, v) \in Y$, $|z_i| \leqslant r$, $i = 1, 2$

$$|f(t, z_1, u, v) - f(t, z_2, u, v)| \leqslant N(r) R(u, v) | z_1 - z_2 |;$$

2) существует постоянная $B \geqslant 1$, такая, что для всех $(t, z, u, v) \in Y$

$$|f(t, z, u, v)| \leqslant BR(u, v)(1 + |z|)$$

Тогда для любой начальной позиции $(t_0, z_0) \in R^1 \times R^n$ и любых допустимых управлений $u(t)$ и $v(t)$, отвечающих геометрическим или интегральным ограничениям, существует единственное решение $z(t)$ уравнения (1) в смысле Каратеодори, которое называется движением.

Из 2) следует, что для любого движения $z(t)$ в игре (1.1), всех $t \in J(t_0) = [t_0 - 1, \ t_0 + 1]$

$$(2) \qquad |z(t) - z(t_0)| \leqslant |t - t_0| S_1(z(t_0))$$

для любого движения $z(t)$ в игре (1.2), всех $t \in J(t_0)$

$$(3) \qquad |z(t) - z(t_0)| \leqslant |t - t_0|^{1/2} S_2(z(t_0))$$

где $S_i(z) = B_i(1 + |z|)$, $B_1 = B(1 + 2r_0) \exp [B(1 + 2r_0)]$ для игры (1.1), $B_2 = B(1 + \rho + \sigma) \exp [B(1 + \rho + \sigma)]$ для игры (1.2).

Если $X_i(z) = \{y \mid |y - z| \leqslant S_i(z)\}$, $i = 1, 2$, то для любого движения $z(t)$ при всех $t \in J(t_0)$ имеем $z(t) \in X_i(z(t_0))$.

Игра начинается из начальной позиции $(t_0, z_0) \in R = R^1 \times R^n$, где $z_0 \notin M$; движение $z(t)$ уже определено на полуинтервале $(-\infty, \ t_0]$ и

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 - \int_{-\infty}^{t} |v(t)|^2 dt, \qquad \rho^2(t) = \rho^2 - \int_{-\infty}^{t} |u(t)|^2 dt$$

Условие информированности. В каждый момент t игрок V строит свое управление $v(t)$ с использованием информации о значениях $z(s)$ и $u(s)$ для всех $s \leqslant t - \tau(z(t))$, где $\tau(z)$ — положительная на $R^n \setminus M$ функция.

Если для данной начальной позиции можно указать такой способ построения допустимого управления $v(t)$ в соответствии с условием информированности, что $z(t) \notin M$ для всех $t \geqslant t_0$ при любом допустимом управлении $u(t)$, то говорят, что для начальной позиции (t_0, z_0) существует стратегия убегания игрока V.

Пусть каждой дифференцируемой функции $h(t, z)$ оператор D ставит в соответствие функцию

$$Dh(t, z, u, v) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, z) + (\mathrm{grad}_z h(t, z) \cdot f(t, z, u, v))$$

(аргумент (t, z) будем обозначать символом $(\cdot)$, аргумент (t, z, u, v) — символом $[\cdot]$).

Условие 1. Существуют натуральные k, l $(k \leqslant l)$, скалярные непрерывно дифференцируемые по (t, z) функции $h_i(\cdot)$, $g_i[\cdot]$, $i = 0, \ldots, k$, $H_i(\cdot)$,

$G_i [\cdot]$, $i = 0, \ldots, l$, такие, что

$$h_0(\cdot) \equiv \varphi(z), \quad H_0(\cdot) \equiv \Phi(z), \quad g_0[\cdot] \equiv G_0[\cdot] \equiv 0$$
$$g_k[\cdot] = g^1(v) + g^2(t, z, u), \quad G_l[\cdot] = G^1(v) + G^2(t, z, u)$$
$$Dh_i[\cdot] = h_{i+1}(\cdot) + g_{i+1}[\cdot], \ i = 0, \ldots, k-1$$
$$DH_i[\cdot] = H_{i+1}(\cdot) + G_{i+1}[\cdot], \ i = 0, \ldots, l-1$$

Обозначим через L двумерное евклидово пространство вектор-строк $a = [a^1, a^2]$, где $a^i \in R^1$, $i = 1, 2$; через S_r обозначим шар радиуса r в $L: S_r = \{a | a \in L, \ |a| = ((a^1)^2 + (a^2)^2)^{1/2} \leqslant r\}$; через πz обозначим вектор $[\varphi(z), \Phi(z)]$.

Пусть $l(\cdot) = [l^1(\cdot), l^2(\cdot)]$, $\Delta(\cdot) = [\Delta^1(\cdot), \Delta^2(\cdot)]$, $\lambda(z)$ — скалярная функция. Обозначим

$$F[\cdot] = [g_k[\cdot] / k!, \ G_l[\cdot] / l!]$$
$$W_{\varepsilon, r}(\cdot) = \bigcap_{u \in P(r)} \Big(\bigcup_{v \in Q(r + \varepsilon\lambda(z))} F(t, z, u, v) - l(t, z) \Big)$$
$$I_\varepsilon(\cdot) = \bigcup_{\tau \in [-1, 1]} \varepsilon\tau\Delta(\cdot), \quad \mu(z) = \min_{y \in X_2(z)} \lambda(y)$$

Условие 2. 1. Существуют непрерывно дифференцируемые по (t, z) скалярная функция $\gamma(t, z)$ и вектор-функции $l(t, z)$, $\Delta(t, z)$, положительная непрерывная на R^n функция $\Gamma(z)$, такие, что для всех $(t, z) \in R$

а) выполняется включение (грубый случай, $k \leqslant l$)

$$S_{\gamma(\cdot)} \subset W_{0, r_0}(\cdot)$$

или (тонкий случай, $k < l$)

$$I_1(\cdot) \subset W_{0, r_0}(\cdot);$$

б) $\Gamma(z) \leqslant \min \{\gamma(\cdot), \Delta^1(\cdot), \Delta^2(\cdot)\}$

Условие 2.2. Существуют непрерывно дифференцируемые по (t, z) скалярная функция $\gamma(t, z)$ и вектор функции $l(t, z)$, $\Delta(t, z)$, положительные непрерывные на R^n функции $\lambda(z)$, $\Gamma(z)$, такие, что для всех $(t, z) \in R^n$

а) для всех $r \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$ выполняется включение (грубый случай, $k \leqslant l$)

$$S_{\varepsilon\gamma(\cdot)} \subset W_{\varepsilon, r}(\cdot)$$

или (тонкий случай, $k < l$)

$$I_\varepsilon(\cdot) \subset W_{\varepsilon, r}(\cdot)$$

б) $\Gamma(z) \leqslant \mu(z) \times \min\{\gamma(\cdot), \Delta^1(\cdot), \Delta^2(\cdot)\}$

Условие 3. Существует непрерывная функция $m(z) \geqslant 1$, такая, что для всех $(t, z, u, v) \in Y$

$$|g_i[\cdot]| \leqslant |\pi z|^{k+1-i} R(u, v)\, m(z), \ i = 1, \ldots, k-1$$
$$|G_i[\cdot]| \leqslant |\pi z|^{l+1-i} R(u, v)\, m(z), \ i = 1, \ldots, l-1$$
$$A[\cdot] \leqslant R(u, v)\, m(z)$$
$$(A[\cdot] = |Dh_0[\cdot]| + |Dh_k[\cdot]| + |DH_0[\cdot]| +$$
$$+ |DH_l[\cdot]| + |D\gamma[\cdot]| + \sum_{i=1}^{2} (|Dl^i[\cdot]| + |D\Delta^i[\cdot]|) +$$
$$+ |g^1(v)| + |g^2(t, z, u)| + |G^1(v)| + |G^2(t, z, u)|)$$

Условие 4.1. $\tau(z) = |\pi z| / c(z)$

Условие 4.2. $\tau(z) = |\pi z|^{\alpha} / c(z)$, $\alpha > 2l + 3$.

Теорема 1. Пусть для игры (1.1) выполняются условия 1, 2.1, 3, 4.1, $c(z) \geqslant c_1(z)$, где $c_1(z)$ — положительная функция, определяемая игрой (1.1). Тогда для любой начальной позиции $(t_0, z_0) \in R$ можно построить стратегию убегания игрока V в соответствии с условием информированности.

Теорема 2. Пусть для игры (1.2) выполняются условия 1, 2.2, 3, 4.2, $c(z) \geqslant c_2(z)$, где $c_2(z)$ — положительная функция, определяемая игрой (1.2). Тогда для любой начальной позиции $(t_0, z_0) \in R$ можно построить стратегию убегания игрока V в соответствии с условием информированности, если $\sigma^2(t_0) > 4\rho^2(t_0 - {}^1/_2)$.

Пусть $\tau \in (0, {}^1/_2]$, $t^* \in R^1$, предполагаем, что движение $z(t)$ определено на $(-\infty, t^*]$, обозначим $\sigma = t - t^*$, $t_* = t^* - \tau$, $z(t_*) = z_*$, $z(t^*) = z^*$.

Из условия 1 следует, что

$$\varphi(z(t)) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\sigma+\tau)^i}{i!} h_i(t_*, z_*) + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} g_i(s, z(s), u(s), v(s))\, ds + \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} Dh_k(s, z(s), u(s), v(s))\, ds, \quad \sigma \geqslant 0 \tag{4}$$

Аналогичное выражение для $\Phi(z(t))$ получается заменой k на l, h на H, g на G.

Для построения маневра уклонения воспользуемся следующим представлением для $\pi z(t)$:

$$\pi z(t) = T + I + K \tag{5}$$

$$T^1 = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\sigma+\tau)^i}{i!} h_i(t_*, z_*) + \frac{\sigma^k}{k!} l^1(t_*, z_*)$$

$$I^1 = \int_{t^*}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} (g_k(s-\tau, z(s-\tau), u(s-\tau), v(s)) - l^1(s-\tau, z(s-\tau)))\, ds$$

Выражения для T^2, I^2 получаются из выражений для T^1, I^1 заменой k на l, h на H, g на G.

Из условия 3 и (2), (3) следует, что для любого движения $z(t)$ при $t \in J(t_0)$

$$|\pi z(t) - \pi z(t_0)| \leqslant |t - t_0| P_1(z(t_0)) \text{ для игры (1.1)} \tag{6}$$

$$|\pi z(t) - \pi z(t_0)| \leqslant |t - t_0|^{1/2} P_2(z(t_0)) \text{ для игры (1.2)}$$

$(P_i(z) = B_i \max\limits_{y \in X_i(z)} m(y)$, $i = 1, 2$, $P_i(z)$ — непрерывные на R^n функции).

Обозначим через $z[t]$ вектор $z(t-\tau(z(t)))$, который в соответствии с условием информированности известен игроку V в момент t. Предполагая, что для игры (1.i) выполнено условие (4.i), $i = 1, 2$ и $c(z) \geqslant \max\{2|\pi z|, 2P_1(z)\}$ в игре (1.1) или $c(z) \geqslant \max\{2|\pi z|^\alpha, (2|\pi z|^{2\alpha-1}P_2(z))^{1/2}\}$ в игре (1.2), используя (6), получаем, что $\tau(z(t)) \leqslant 1/2$, $1/2|\pi z(t)| \leqslant |\pi z[t]| \leqslant \leqslant 3/2\, |\pi z(t)|$ для любого движения $z(t)$.

Доказательство теоремы 1. Для любых $\delta \in (0, 1/2]$, $w \in S_1$, $t_* \in R^1$ обозначим через $V_1(\omega)$ $(\omega = (t_*, \delta, w))$ оператор V_1: $[t_*, t_* + \delta] \times R^n \times \times P \to Q$, который каждой тройке (t, z, u) ставит в соответствие лексикографический минимум векторов v из множества $\Omega_1(\omega; t, z, u)$, таких, что $F(t, z, u, v) = \gamma(t, z)\, w$ в грубом случае, $F(t, z, u, v) = (w^1 + w^2(t - - t_*)/\delta)\,\Delta(t, z)$ в тонком случае. Из условия 2.1 следует, что при $t \in [t_*, t_* + \delta]$ множество $\Omega_1(\omega; t, z, u)$ непусто; для любой абсолютно непрерывной функции $z(t)$ и допустимого управления $u(t)$ управление $v(t) = = V_1(\omega; t, z(t), u(t))$ является допустимым.

Обозначим (c_1, N_1 — некоторые постоянные)

$$n(z) = \min\{1, |\pi z|\}, \quad m_1(z) = N_1 S_1(z) P_1(z)\,(1 + P_1^{l+1}(z))$$

$$\theta_1(z) = c_1 \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\Gamma(z)}{m_1(z)}\right\}, \quad \theta_{1*}(z) = \min_{y \in X_1(z)} \theta_1(y)$$

$$P_{1*}(z) = \max_{y \in X_2(z)} P_1(y)$$

Лемма 1. Если для игры (1.1) выполняются условия 1, 2.1, 3, то существуют постоянные $c_1 \in (0,1]$, $N_1 \geqslant 1$, такие, что для любого движения $z(t)$, определенного на $(-\infty, t^*]$, любого $\sigma^* \in (0, \theta_{1*}(z^*)]$, любого $\tau \in \in [0, \theta_1(z_*)\sigma^*]$ существует вектор $w_* \in S_1$, зависящий от z_*, τ, такой, что управление $v(t) = V_1(\omega_*; t-\tau, z(t-\tau), u(t-\tau))$, $t \in [t^*, t^* + + \theta_1(z_*)]$ $(\omega_* = (t_*, \theta_1(z_*), w_*))$ обеспечивает выполнение следующей оценки:

(7) $$|\pi z(t)| \geqslant c_1 \Gamma(z_*)\,(t - t^*)^{l+1}, \quad t \in [t^* + \sigma^*, t^* + \theta_1(z_*)]$$

При указанном выборе управления $v(t)$ имеет место следующее представление:

(8) $$\pi z(t)\, A(\sigma) = T A(\sigma) + w + dA(\sigma)$$

где $A(\sigma)$ — матрица, обратная матрице $\operatorname{diag}\{a\sigma^k, a\sigma^l\}$ в грубом случае, или матрице

$$\begin{Vmatrix} a_1\sigma^k & a_1\alpha_k\sigma^{k+1} \\ a_2\sigma^l & a_2\alpha_l\sigma^{l+1} \end{Vmatrix}$$

в тонком случае, причем $a = \gamma(t_*, z_*)$, $a_i = \Delta^i(t_*, z_*)$, $i = 1, 2$, $\alpha_k = k/(k+1)\,\theta_1(z_*)$.

Для компонент вектора $d = [d^1, d^2]$ с помощью (2) и условия 3 получаем следующие оценки:

(9) $$|d^1| \leqslant R_1(k, \sigma, \tau)\, m_1(z_*), \quad |d^2| \leqslant R_1(l, \sigma, \tau)\, m_1(z_*)$$

$$\sigma \in [\sigma^*, \theta_1(z_*)], \quad \tau \in [0, \theta_1(z_*)\,\sigma^*]$$

$$R_1(k, \sigma, \tau) = \sigma^{k+1} + \sigma^{k-1}\tau + \tau^k$$

Из леммы Л. С. Понтрягина [1], представления (8) и оценок (9) следует справедливость утверждения леммы 1.

Опишем стратегию убегания игрока V из начальной позиции $(t_0, z_0) \in \in R$.

Положим

$$\delta_1(z) = \min\{1, {}^1/_2 c_1 \min_{y \in X_1(z)} \Gamma(y)\theta_1^{l+1}(y)\}$$

$$\sigma_1(z) = \frac{\delta_1(z)}{4P_{1*}(z)}$$

$$\chi_1(z) = \min_{y \in X_1(z)} \min\{{}^1/_2\delta_1(y), c_1\Gamma(y)\sigma_1^{l+1}(y)\}$$

Определим последовательность моментов $t_i < t_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$

$$|\pi z[t_i]| = n(z^\circ)\ \delta_1(z[t_i])$$

$$|\pi z[t]| > n(z^\circ)\ \delta_1(z[t]),\ t \in [t_{i-1}^*, t_i)$$

$$t_i^* = \min\ \{t_i + \theta_1(z(t_i - \tau_i)), t_i'\}$$

$$|\pi z[t_i']| = 6n(z^\circ),\ |\pi z[t]| < 6n(z^\circ),\ t \in [t_i, t_i')$$

$$t_0^* = t_0,\quad z^\circ = z[t_0]$$

На отрезке $[t_i, t_i^*]$ игрок V применяет специальное управление

$$v(t) = V_1(\omega_i;\ t - \tau_i,\ z(t - \tau_i),\ u(t - \tau_i))$$

$$(\tau_i = n(z^\circ)\ \theta_{1*}(z[t_i])\ \sigma_1(z[t_i])$$

$$\omega_i \doteq (t_i - \tau_i,\ \theta_1(z(t_i - \tau_i)),\ w_i)$$

$$z^i = z(t_i - \tau_i)$$

которое в соответствии с леммой 1 обеспечивает оценку

$$|\pi z(t)| \geqslant c_1\Gamma(z^i)(t - t_i)^{l+1},\ t \in [t_i + n(z^\circ)\ \sigma_1(z[t_i]),\ t_i^*] \tag{10}$$

Используя первую оценку (6) и (10), получаем

$$|\pi z(t)| \geqslant {}^1/_4\ |\pi z[t_i]|,\ t \in [t_i,\ t_i + n(z^\circ)\ \sigma_1(z[t_i])]$$

$$|\pi z(t)| \geqslant c_1\Gamma(z^i)(n(z^\circ)\ \sigma_1(z[t_i]))^{l+1},\quad t \in [t_i + n(z^\circ)\sigma_1(z[t_i]),\ t_i^*]$$

Поскольку

$$|\pi z[t_i^*]| > \min\{4n(z^\circ),\ {}^1/_2 c_1\Gamma(z^i)\ \theta_1^{l+1}(z^i)\} > n(z^\circ)\ \delta_1(z[t_i^*])$$

то $t_i^* < t_{i+1}$ для всех $i \geqslant 1$.

На отрезке $[t_i^*, t_{i+1})$ игрок V применяет произвольное допустимое управление.

Обозначим

$$c_1(z) = \max\left\{2|\pi z|,\ 2P_1(z),\ \max_{y \in X_1(z)} \frac{12P_{1*}(y)}{\delta_1(y)\theta_{1*}(y)}\right\}$$

Тогда, если $c(z) \geqslant c_1(z)$, то

$$\tau(z(t)) \leqslant \frac{2|\pi z[t]|}{c(z(t))} \leqslant n(z^\circ)\theta_{1*}(z[t_i])\sigma_1(z[t_i]) = \tau_i$$

$$t \in [t_i,\ t_i^*]$$

Следовательно, управление игрока V удовлетворяет условию информированности.

Таким образом, для начальной позиции $(t_0, z_0) \in R$ построена стратегия, которая находится в соответствии с условием информированности и обеспечивает выполнение следующего неравенства

$$|\pi z(t)| \geqslant (n(z^0))^{l+1}\chi_1(z(t)),\quad t \geqslant t_0$$

Доказательство теоремы 2. Для любых $\varepsilon \in (0,1]$, $\delta \in (0, {}^1/_2]$, $w \in S_1$ обозначим через $V_2(v)$ $(\nu = (t_*, z_*, \varepsilon, \delta, \omega))$ оператор, который каждой тройке $(t, z, u) \in D(\nu) = [t_*, t_* + \delta] \times R^n \times P$ ставит в соответствие лексикографический минимум векторов v из множества $\Omega_2(\nu; t, z, u)$, таких, что $F(t, z, u, v) = \varepsilon\mu(z_*)\gamma(t, z)w$ в грубом случае, $F(t, z, u, v) = \varepsilon\mu(z_*)(w^1 + w^2(t - t_*)^{1/2}/\delta^{1/2})\Delta(t, z)$ в тонком случае, $|v| \leqslant |u| + \varepsilon$. Из условия 2.2 следует, что множество $\Omega_2(\nu; t, z, u)$ непусто для всех $(t, z, u) \in D(\nu)$ для любой абсолютно непрерывной функции $z(t)$ $(z(t_*) = z_*)$ и измеримой вектор-функции $u(t) \in P$ вектор-функция $v(t) = V_2(\nu; t, z(t), u(t))$ измерима и удовлетворяет следующему неравенству:

(11) $\qquad |v(t)| \leqslant |u(t)| + \varepsilon$

Введем обозначения (c_2, N_2 — некоторые постоянные)

$$m_2(z) = N_2 S_2(z) P_2(z)\ (1 + P_2^{l+1}(z))$$

$$\theta_2(z) = c_2 \min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma(z)}{m_2(z)}\right)^2\right\}, \quad \theta_{2*}(z) = \min_{y \in X_2(z)} \theta_2(y)$$

$$P_{2*}(z) = \max_{y \in X_2(z)} P_2(y)$$

Лемма 2. Если для игры (1.2) выполнены условия 1, 2.2, 3, то существуют такие постоянные $c_2 \in (0, 1]$, $N_2 \geqslant 1$, определяемые игрой (1.2), что для любого движения $z(t)$, заданного на $(-\infty, t^*]$, любых $\varepsilon \in (0, 1]$, $\sigma^* \in (0, \theta_{2*}(z^*)]$, любого $\tau \in (0, (\varepsilon^2\theta_2(z_*)\sigma^*)^2]$ существует вектор $w_* \in S_1$, зависящий от z_*, ε, τ, такой, что управление $v(t) = V_2(v_*; t - \tau, z(t - \tau), u(t - \tau))$, $t \in [t^*, t^* + \varepsilon^2\theta_2(z_*)]$ $(v_* = (t_*, z_*, \varepsilon, \varepsilon^2\theta_2(z_*), w_*))$ обеспечивает выполнение неравенства

(12) $\qquad |\pi z(t)| \geqslant \varepsilon c_2 \Gamma(z_*)(t - t^*)^{l+1/2}, \quad t \in [t^* + \sigma^*, \ t^* + \varepsilon^2\theta_2(z_*)]$

При указанном в лемме выборе управления $v(t)$ имеет место представление (8), где матрица $A(\sigma)$ — обратная матрице $\mathrm{diag}\{b\sigma^k, b\sigma^l\}$ или матрице

$$\begin{Vmatrix} b_1\sigma^k & b_1\beta_k\sigma^{k+1/2} \\ b_2\sigma^l & b_2\beta_l\sigma^{l+1/2} \end{Vmatrix}$$

в тонком случае, причем

$$b = \varepsilon\mu(z_*)\gamma(t_*, z_*), \ b_i = \varepsilon\mu(z_*)\Delta^i(t_*, z_*), \ i = 1,2$$

$$\beta_k = k(\theta_2(z_*))^{-1/2}\int_0^1 (1 - s)^{k-1}s^{1/2}\,ds$$

Для компонент вектора $d = [d^1, d^2]$ получаем с помощью (3) и условия 3 следующие оценки:

(13) $\qquad |d^1| \leqslant R_2(k, \sigma, \tau)\, m_2(z_*), \ |d^2| \leqslant R_2(l, \sigma, \tau)\, m_2(z_*)$

$$\sigma \in (\sigma^*, \varepsilon^2\theta_2(z_*)], \ \tau \in (0, (\varepsilon^2\theta_2(z_*)\sigma^*)^2]$$

$$R_2(k, \sigma, \tau) = \sigma^{k+1/2} + \sigma^{k-1}\tau^{1/2} + \sigma^{k-3/2} + \tau^{k-1/2}$$

Утверждение леммы 2 следует из представления (8), оценок (13) и леммы Л. С. Понтрягина [1].

Обозначим

$$\delta_2(z) = \min\{1, {}^1/_2 c_2 \min_{y\in X_2(z)} \Gamma(y)\theta_2^{l+1/2}(y)\}$$

$$\sigma_2(z) = \left(\frac{\delta_2(z)}{4P_2(z)}\right)^2$$

$$\chi_2(z) = \min_{y\in X_2(z)} \min\{{}^1/_2\delta_2(y), c_2\Gamma(y)\sigma_2^{l+1/2}(y)\}$$

Положим

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 i^{-\beta}, \quad i = 1, 2, \ldots, \zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-s}$$

$$\varepsilon_0 = \min\left\{1, \left(\frac{\sigma^2(t_0) - 4\rho^2(t_0 - 1/2)}{2\zeta(4\beta)}\right)^{1/4}\right\}, \quad \beta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{4(2l+3)}\right\}$$

Из условия 4.2 следует, что $4\beta > 1$, т. е. $\zeta(4\beta) < +\infty$.

Определим отрезки активного $[t_i, t_i^*]$ и пассивного $[t_i^*, t_{i+1})$ поведения игрока V.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ момент t_i определяется следующим образом:

$$|\pi z[t_i]| = \varepsilon_i^{2(l+1)} n(z^\circ)\, \delta_2(z[t_i])$$

$$|\pi z[t]| > \varepsilon_i^{2(l+1)} n(z^\circ)\, \delta_2(z[t]), \ t \in [t_{i-1}^*, t_i)$$

а момент $t_i^* = \min\{t_i + \varepsilon_i^2\theta_2(z(t_i - \tau_i)), t_i'\}$, где τ_i будет определено ниже, t_i' таково, что

$$|\pi z[t_i']| = {}^9/_2\, \varepsilon_i^{1/(2\beta)} (n(z^\circ))^{2/\alpha}$$

$$|\pi z[t]| < {}^9/_2\, \varepsilon_i^{1/(2\beta)} (n(z^\circ))^{2/\alpha}, \ t \in [t_i, t_i')$$

Из определения моментов t_i, t_i^* и второй оценки (6) следует, что

$$t_i^* - t_i \geqslant \varepsilon_i^{1/\beta} (n(z^\circ))^2\, \sigma_2(z[t_i]) \tag{14}$$

На отрезке $[t_i, t_i^*]$ игрок V применяет специальное управление

$$v(t) = V_2(\nu_i;\ t - \tau_i,\ z(t - \tau_i),\ u(t - \tau_i))$$

$$\tau_i = \varepsilon_i^{4l+6} (n(z^\circ)\, \theta_{2*}(z[t_i])\, \sigma_2(z[t_i]))^2 K(z[t_i])$$

$$\nu_i = (t_i - \tau_i, z^i, \varepsilon_i, \varepsilon_i^2\theta_2(z^i), w_i)$$

$$K(z) = \min\{1, \min_{y\in X_2(z)} \sigma_2(y)\}$$

Из второй оценки (6) и утверждения леммы 2 следует существование вектора $w_i \in S_1$, такого, что управление $v(t)$ обеспечивает выполнение следующих оценок:

$$|\pi z(t)| \geqslant {}^1/_4 |\pi z[t_i]|, \quad t \in [t_i, t_i + (n(z^\circ))^2 \sigma_2(z[t_i])]$$

$$|\pi z(t)| \geqslant \varepsilon_i c_2 \Gamma(z^i)\ (t - t_i)^{l+1/2}, \ t \in [t_i + (n(z^\circ))^2\sigma_2(z[t_i]),\ t_i^*]$$

Отсюда получаем, что

$$|\pi z(t)| \geqslant \varepsilon_i^{2(l+1)^2} (n(z^0))^{2l+1} \chi_2(z(t)), \ t \in [t_i, t_i^*] \tag{15}$$

причем

$$|\pi z[t_i^*]| > \varepsilon_{i+1}^{2(l+1)} n(z^\circ)\, \delta_2(z[t_i^*])$$

т. е. $t_i^* < t_{i+1}$, $i \geqslant 1$.

На отрезке $[t_i^*, t_{j+1})$ управление игрока V полагаем тождественно равным нулю.

Пусть $c(z) \geqslant c_2(z)$

$$c_2(z) = \max\left\{2\,|\pi z|^{\alpha},\quad (2\,|\pi z|^{2\alpha-1} P_2(z))^{1/2},\right.$$
$$\left.\max_{y \in X_2(z)} \frac{6^{\alpha+1} P_{2*}(y)}{K(y)\,(\delta_2(y)\,\theta_{2*}(y))^2}\right\}$$

Тогда $\tau(z(t)) \leqslant \tau_i$, $t \in [t_i, t^*_{i+1}]$.

Следовательно, построенное управление $v(t)$ на отрезке $[t_i, t^*_i]$ удовлетворяет условию информированности. Из оценки (11) следует, что

$$\int_{t_i}^{t_i^*} |v(t)|^2\,dt \leqslant 2 \int_{t_i}^{t_i^*} |u(t-\tau_i)|^2 + 2\varepsilon_i^4$$

Для всех $i = 2,3,\ldots$ имеем $t_{i-1} \leqslant t_i - \tau_i$, поскольку, если $t_i - t_{i-1} \leqslant 1/2$, то

$$\tau_i \leqslant \varepsilon_i^{4t+6}(n(z^\circ))^2\ K(z\ [t_i]) \leqslant \varepsilon_{i-1}^{1/\beta}(n(z^\circ))^2\ \sigma_2\ (z\,[t_{i-1}])$$

следовательно, $\tau_i \leqslant t^*_{i-1} - t_{i-1} \leqslant t_i - t_{i-1}$; так как $\tau_i \leqslant 1/2$, то $t_{i-1} \leqslant t_i - \tau_i$ для всех $i \geqslant 2$.

Отсюда

$$\int_{t_0}^{\infty} |v(t)|^2\,dt \leqslant 2\left(\sum_{i=2}^{\infty} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |u(t)|^2 dt + \int_{t_1-\tau_1}^{t_1^*-\tau_1} |u(t)|^2 dt\right) + 2\varepsilon_0^4 \zeta(4\beta) \leqslant \sigma^2(t_0)$$

Выше было показано, что $t_i > t^*_{i-1}$ для всех $i \geqslant 1$, из (14) следует, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Построенная в соответствии с условием информированности стратегия убегания гарантирует оценку (15) для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \geqslant 1$.

Теорема 2 доказана.

Поступила 6 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1971, т. 112.
2. *Гусятников П. Б.* Убегание и l-убегание в дифференциальной игре многих лиц. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 3.
3. *Гусятников П. Б., Мезенцев А. В.* Дифференциальная игра убегания с интегральными ограничениями на управления игроков. Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 4.