

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШЕРОХОВАТЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

И. Г. Горячева

(Москва)

Исследуются плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатого слоя в нелинейной постановке. В частном случае очень толстого слоя главный член рассматриваемого при этом ядра нелинейного интегрального уравнения совпадает с ядром, рассмотренным в работах [1, 2]. Решение задач сводится к исследованию нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, для которых применим метод последовательных приближений. Приводятся численные результаты, показывающие изменение характера распределения давления под штампом при учете шероховатости основания.

Контактные задачи теории упругости для шероховатых тел в линейной постановке рассматривались в работах [3-5]. И. Я. Штаерманом впервые было получено уравнение плоской контактной задачи для упругого шероховатого тела на основании предположения о пропорциональности дополнительных локальных перемещений за счет смятия неровностей в зоне контакта нормальному давлению. Однако, как показывают результаты ряда экспериментальных исследований [6, 7], сближение контактирующих шероховатых тел за счет деформации микровыступов пропорционально давлению в степени α ($\alpha \leq 1$). В такой постановке некоторые плоские контактные задачи были рассмотрены в работах [1, 2, 8]. Приближенное решение осесимметричной задачи приведено в работе [9].

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу для упругой шероховатой полосы $|x| < \infty$, $0 < y < h$. В верхнюю границу полосы силой P вдавливается жесткий штамп, форма поверхности которого задана уравнением $y = g(x)$ ($g(0) = 0$). Вне участка контакта $(-a, a)$ верхняя граница полосы не нагружена. Исследуются параллельно два случая закрепления полосы:

1) Полоса лежит на жестком основании без сил трения; в этом случае граничные условия имеют вид (δ — осадка штампа)

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty \\ \tau_{xy}(x, h) = 0, \quad \sigma_y(x, h) = 0, \quad a < |x| < \infty \\ \tau_{xy}(x, h) = 0, \quad v(x, h) = g(x) + \delta, \quad |x| < a \end{aligned}$$

2) полоса жестко закреплена по основанию; тогда в (1.1) изменятся условия на линии раздела $y = 0$, которые примут вид

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0$$

Будем считать, что нормальные перемещения границы упругой полосы $v(x, h)$ складываются из перемещений v_1 за счет деформации микровыступов

пов, которые определяются следующим образом:

$$(1.2) \quad v_1 = A [p(x)]^\alpha, \quad A \geq 0$$

Здесь $p(x)$ — функция распределения контактных давлений, A — коэффициент, характеризующий деформационные свойства шероховатого слоя, α — показатель, который находится на основании кривой опорной поверхности ($\alpha \leq 1$). Кроме того, имеют место упругие перемещения полосы v_2 , которые на основании граничных условий [определяются согласно [10]

$$(1.3) \quad v_2 = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a k\left(\frac{\xi-x}{h}\right) p(\xi) d\xi$$

Функция $k(t)$ имеет вид

$$(1.4) \quad k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut du$$

Конкретный вид функции $L(u)$ зависит от граничных условий.

Для задачи 1

$$(1.5) \quad L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$$

Для задачи 2

$$(1.6) \quad L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

Запишем условие контакта штампа с полосой и условие равновесия в безразмерных координатах. Для этого введем обозначения

$$(1.7) \quad x_1 = \frac{x+a}{2a}, \quad \eta = \frac{\delta}{2a}, \quad \lambda = \frac{2a}{h}$$

$$g_1(x_1) = \frac{1}{2a} g[a(2x_1 - 1)], \quad A_1 = \frac{A}{2a} \left[\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \right]^{-\alpha}$$

$$p_1(x_1) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} p[a(2x_1 - 1)], \quad P_1 = \frac{1-\nu^2}{\pi E a} P$$

Тогда получим

$$(1.8) \quad \int_0^1 k[\lambda(t-x_1)] p_1(t) dt + A_1 [p_1(x_1)]^\alpha = g_1(x_1) + \eta$$

$$(1.9) \quad P_1 = \int_0^1 p_1(x_1) dx_1$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению нелинейного интегрального уравнения (1.8) при условии (1.9), в результате чего определяются давление под штампом и осадка штампа.

Уравнение (1.8) является уравнением типа Гаммерштейна. Приведем его к канонической форме. Для этого введем новую функцию

$$(1.10) \quad \psi(x_1) = A_1 [p_1(x_1)]^\alpha - g_1(x_1) - \eta$$

Тогда

$$(1.11) \quad A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 k[\lambda(t-x_1)] [\psi(t) + g_1(t) + \eta]^{1/\alpha} dt + \psi(x_1) = 0$$

$$P_1 = A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 [\psi(x_1) + g_1(x_1) + \eta]^{1/\alpha} dx_1$$

Для решения уравнения типа Гаммерштейна (1.11) можно применить метод последовательных приближений. Например, положить $\psi_0(x_1) \equiv 0$ и последовательно

$$\psi_{n+1}(x_1) = -A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 k[\lambda(t-x_1)] [\psi_n(t) + g_1(t) + \eta]^{1/\alpha} dt$$

Докажем выполнимость достаточных условий сходимости этого метода для уравнения (1.11).

1) Ядро $k(t)$ интегрального уравнения (1.11), принимая во внимание (1.4) — (1.6), можно представить в виде

$$k(t) = -\ln|t| + F(t), \quad 0 \leq |t| < \infty$$

где $F(t)$ — непрерывная функция. Очевидно, что ядро $k(t)$ принадлежит классу L_2 .

2) Функция $f(t, u) = A_1^{-1/\alpha} [u + g_1(t) + \eta]^{1/\alpha}$ равномерно удовлетворяет условию Липшица вида

$$(1.12) \quad |f(t, u_1) - f(t, u_2)| < c(t) |u_1 - u_2|$$

в интервале изменения функции $u = \psi(x_1)$. Действительно, так как нормальное давление $p_1(x_1)$ неотрицательно, то из (1.10) и свойств ядра в уравнении (1.11) следует

$$-g_1(x_1) - \eta \leq u \leq 0$$

Производная $\partial f(t, u) / \partial u = \alpha^{-1} A_1^{-1/\alpha} [u + g_1(t) + \eta]^{1/\alpha-1}$ в интервале изменения аргумента u ограничена значением $\alpha^{-1} A_1^{-1/\alpha} [g_1(t) + \eta]^{1/\alpha-1}$ ($0 < \alpha \leq 1$). Поэтому выполняется условие Липшица (1.12), в котором

$$c(t) = \frac{1}{\alpha} A_1^{-1/\alpha} [g_1(t) + \eta]^{1/\alpha-1}$$

3) Функция $f(t, 0) = A_1^{-1/\alpha} [g_1(t) + \eta]^{1/\alpha}$, очевидно, принадлежит классу L_2 .

При выполнении условий 1) — 3) метод последовательных приближений сходится [11], если только параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$(1.13) \quad \alpha^{-2} A_1^{-2/\alpha} \int_0^1 [g_1(x) + \eta]^{2/\alpha-2} \left\{ \int_0^1 k^2[\lambda(t-x)] dt \right\} dx < 1$$

При выполнении условия (1.13) последовательность функций $\{\psi_n(x_1)\}$ имеет предел, который и будет единственным решением уравнения (1.11).

Докажем, что это решение единственно. Допустим противное, т. е. что существует два решения уравнения (1.11), $\psi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_1)$. Тогда должно существовать нетривиальное решение уравнения

$$(1.14) \quad \Psi(x_1) + A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 k[\lambda(t-x_1)] \varphi[t, \Psi(t)] dt = 0$$

$$(\Psi(x_1) = \psi_1(x_1) - \psi_2(x_1), \varphi[t, \Psi(t)] = [\psi_2(t) + \Psi(t) + g_1(t) + \eta]^{1/\alpha} - [\psi_2(t) + g_1(t) + \eta]^{1/\alpha})$$

Умножим уравнение (1.14) на функцию $\varphi[x_1, \Psi(x_1)]$ и проинтегрируем на отрезке $(0, 1)$. Получим

$$(1.15) \quad A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 \int_0^1 k[\lambda(t-x_1)] \varphi[t, \Psi(t)] \varphi[x_1, \Psi(x_1)] dt dx_1 =$$

$$= - \int_0^1 \Psi(x_1) \varphi[x_1, \Psi(x_1)] dx_1$$

Функция $\varphi[x_1, \Psi(x_1)]$ положительна при $\Psi(x_1) > 0$ и отрицательна при $\Psi(x_1) < 0$. Следовательно

$$\int_0^1 \Psi(x_1) \varphi[x_1, \Psi(x_1)] dx_1 > 0, \quad \Psi(x_1) \not\equiv 0$$

Ядро $k[\lambda(t-x)]$ неотрицательно, т. е. для любой непрерывной функции $\omega(x)$, не равной тождественно нулю на интервале $(0,1)$, имеет место неравенство

$$J(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 k[\lambda(t-x)] \omega(t) \omega(x) dt dx \geq 0$$

Действительно, функционал $J(\omega)$ можно представить в виде

$$J(\omega) = \int_0^1 \omega(x) \left\{ \int_0^1 k[\lambda(t-x)] \omega(t) dt \right\} dx$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой, как следует из (1.3), с точностью до постоянного положительного множителя перемещение, которое будет иметь граница полосы на площадке контакта при действии распределенной нагрузки $\omega(x)$. Таким образом, функционал $J(\omega)$ с точностью до положительного множителя представляет собой суммарную работу, производимую произвольными силами давления $\omega(x)$ на соответствующих перемещениях точек площадки контакта, которая всегда неотрицательна. В силу неотрицательности ядра левая часть соотношения (1.15) неотрицательна. Таким образом, соотношение (1.15) справедливо тогда и только тогда, когда $\Psi(x_1) \equiv 0$.

Зная решение уравнения (1.11) как предел последовательности функций $\psi_n(x)$, по формуле (1.10) можно найти давление в безразмерных координатах. Осадка штампа η находится из условия (1.9).

Отметим, что давление не может обращаться в бесконечность на концах площадки контакта. Действительно, предполагая, что давление имеет интегрируемую степенную особенность вида $x_1^{-\theta}$ ($0 < \theta < 1$) в точке $x_1 = 0$, и учитывая, что ядро интегрального уравнения (1.8) имеет особенность вида $\ln x_1$, получим, что левая часть в (1.8) имеет особенность порядка $x_1^{-\alpha\theta}$, в правой же части особенностей нет, что и доказывает высказанное выше утверждение.

В случае контактирования гладкого штампа с шероховатым упругим слоем для определения неизвестных границ площадки контакта $(-a, a)$ существует дополнительное условие $p(-a) = p(a) = 0$, выражающее собой непрерывность функции для давления на границе упругого слоя.

2. Методом, изложенным в п. 1, можно решать разные плоские контактные задачи для шероховатого слоя, определяя при этом характер распределения давления на границе шероховатого слоя в зависимости от толщины слоя, параметров шероховатости, упругих характеристик слоя и т. д.

Рассмотрим в качестве примера контактную задачу о вдавливании без трения жесткого штампа с плоским основанием $g(x) = 0$ в толстый шероховатый слой. Для определения давления в этом случае имеем интегральное уравнение (1.8) и условие (1.9), в котором $g_1(x_1) = 0$, а ядро представимо в виде

$$k(t) = -\ln |t| + a_0$$

где $a_0 = -0.352$ для первой граничной задачи и $a_0 = -0.527$ для второй граничной задачи. Такое асимптотическое представление ядра (1.4) справедливо для достаточно толстых полос, когда $\lambda^2 = [2a/h]^2 = o(1)$ [10].

При этих условиях, решая уравнение (1.8) методом последовательных приближений, получим для давления на площадке контакта выражение

$$p_1(x_1) = A_1^{-1/\alpha} [\psi(x_1) + \eta]^{1/\alpha}$$

где $\psi(x_1)$ — предел последовательности функций $\{\psi_n(x_1)\}$, причем

$$\psi_{n+1}(x_1) = A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 [\ln |t - x_1| + c_0] [\psi_n(t) + \eta]^{1/\alpha} dt$$

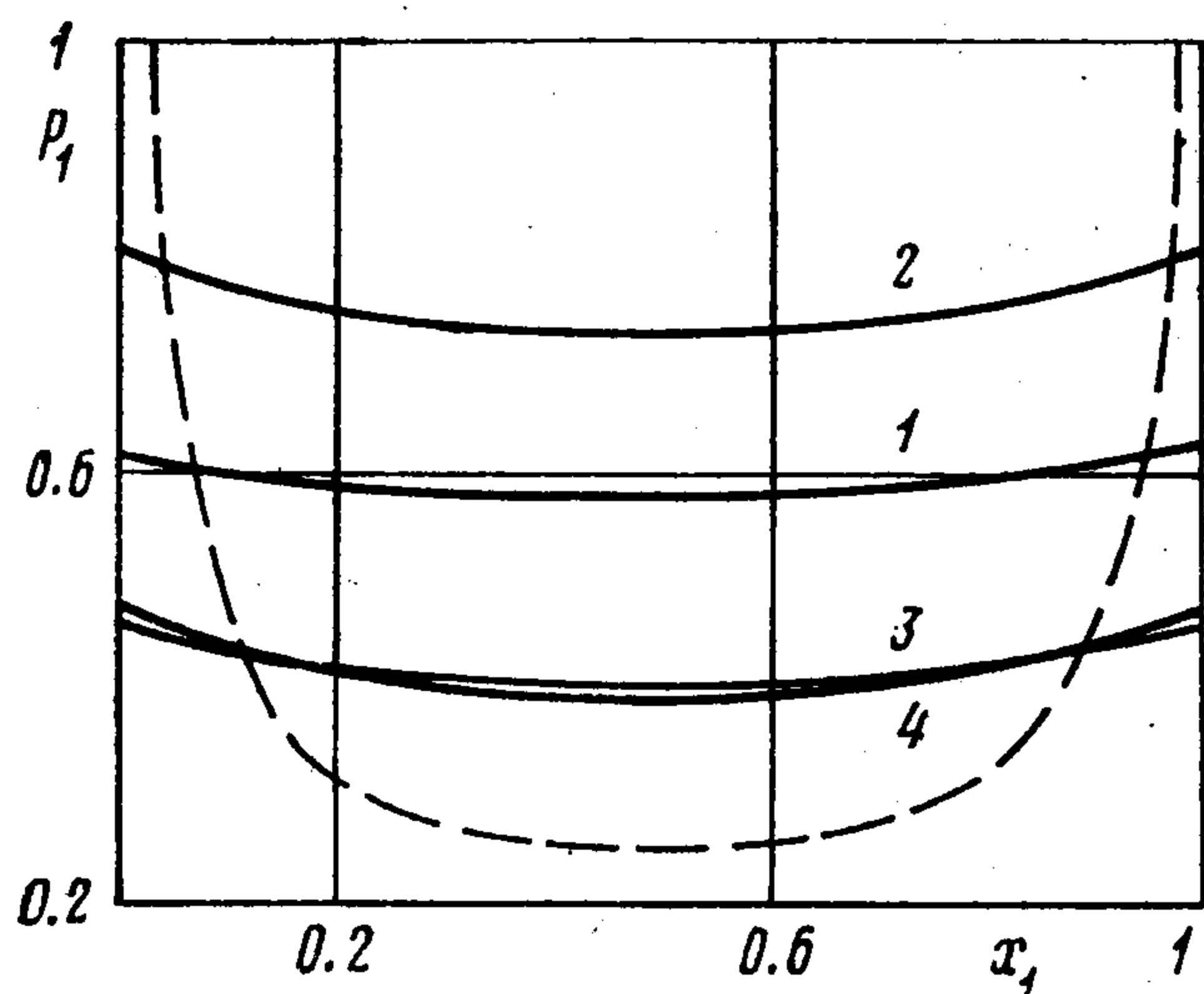
$$c_0 = \ln(2a/h) - a_0$$

Этот предел существует, если выполняется условие (1.13), которое в данном случае принимает вид

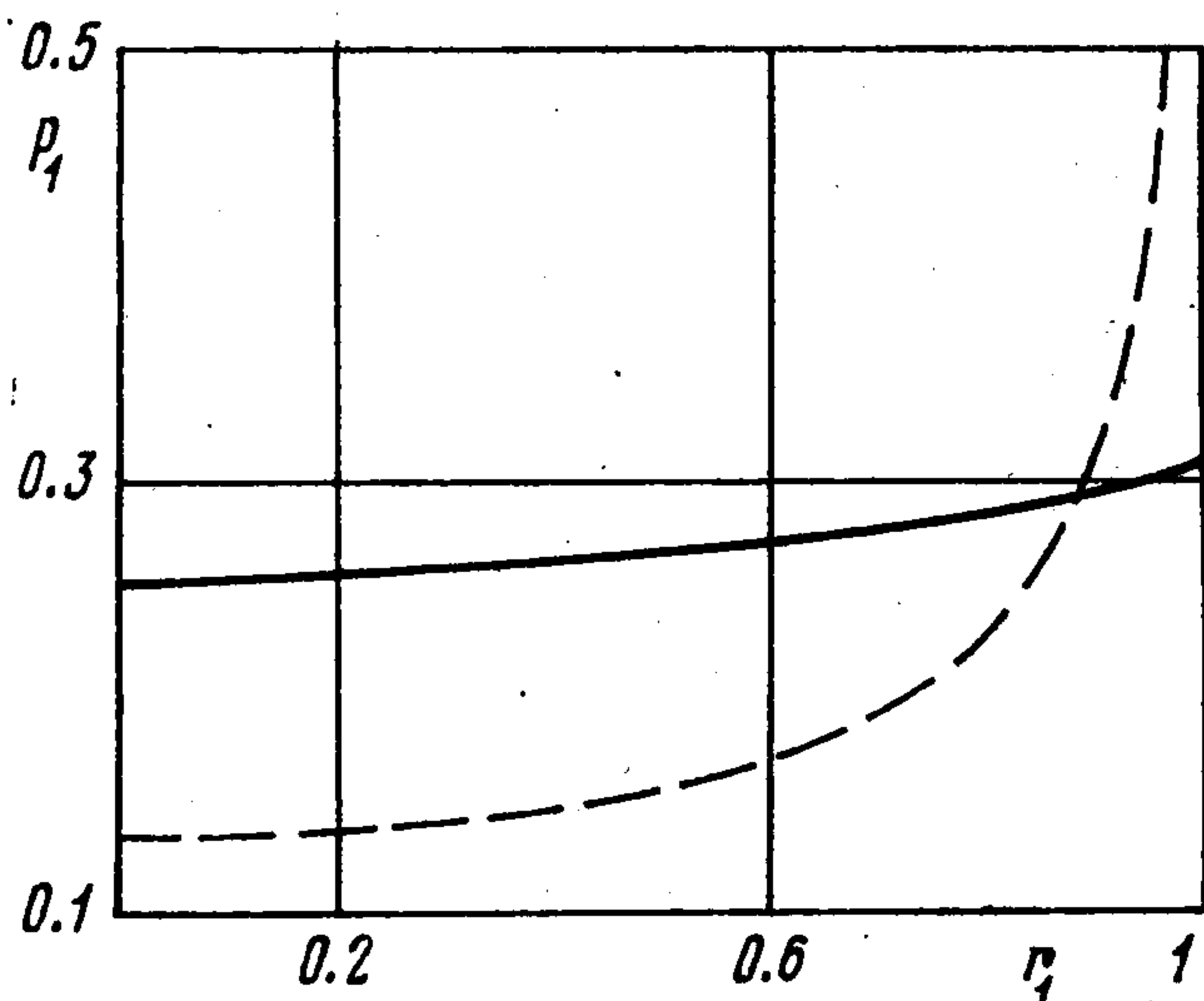
$$\alpha^{-2} A_1^{-2/\alpha} \eta^{2/\alpha-2} (c_0^2 - 3c_0 + 3.5) < 1$$

На основании результатов экспериментальных исследований [6, 7] для численных расчетов были взяты следующие значения безразмерных параметров: $\alpha = 0.4$, $A_1 = 1$, $c_0 = -3$. Графики распределения давления в случае действия на штамп безразмерных нагрузок $P_1^{(1)} = 0.6 \cdot 10^{-2}$, $P_1^{(2)} = 0.75 \cdot 10^{-2}$ представлены на фиг. 1 кривыми 1 и 2 соответственно. Значения P_1 связаны с истинными значениями нагрузок последней формулой в (1.7). Углубления, соответствующие нагрузкам $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$, равны $\eta^{(1)} = 0.15$, $\eta^{(2)} = 0.17$, где $\eta = \delta / (2a)$. Как видно из графика, при действии большей нагрузки давление возрастает, особенно на концах площадки контакта. При действии одинаковых нагрузок, равных $0.41 \cdot 10^{-2}$, как показали расчеты, углубление штампа и давление под ним меняются в зависимости от чистоты обработки поверхности, которая характеризуется безразмерными параметрами α и A_1 . При $\alpha = 0.4$ и $A_1 = 0.75$ штамп углубится на величину $\eta = 0.1$, а при $\alpha = 0.4$ и $A_1 = 0.35$ (более чистая обработка) штамп углубится на меньшую величину, $\eta = 0.06$. Графики распределения давления в этих двух случаях показаны на фиг. 1 кривыми 3 и 4 соответственно; штриховой линией приведен график распределения давления без учета шероховатости. Расчеты показали удовлетворительную сходимость метода последовательных приближений и его эффективность. С точностью до 10^{-5} оказалось достаточно вычислить 15—20 приближений функции $\psi(x)$. Процесс сходится практически для всех разумных значений параметров шероховатости и упругих характеристик материала.

3. Рассмотрим осесимметричную задачу о вдавливании кругового в плане штампа в шероховатое упругое полупространство ($y < 0$). Форма контактирующей поверхности штампа задана уравнением $y = g(\rho)$



Фиг. 1



Фиг. 2

($g(0) = 0$). Штамп прижимается к полупространству силой P . Площадка контакта имеет форму круга радиуса a . Нормальные перемещения границы упругого полупространства в области контакта, определяемые формой штампа и его осадкой δ , складываются из упругих перемещений точек границы полупространства v_2 , которые на основании граничных условий определяются согласно [10]

$$v_2 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{p(r) r d r d \varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}}$$

($p(r)$ — функция распределения контактных давлений), и перемещений v_1 за счет деформации микровыступов, которые определяются формулой (1.2).

Запишем условие контакта штампа с границей полупространства и условие равновесия в безразмерных координатах в канонической форме. Для этого введем обозначения

$$r_1 = \frac{r}{a}, \quad p_1(r_1) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} p(r_1 a), \quad g_1(r_1) = g \frac{(r_1 a)}{a}$$

$$\eta = \frac{\delta}{a}, \quad A_1 = \frac{A}{a} \left[\frac{\pi E}{1 - \nu^2} \right]^\alpha, \quad P_1 = \frac{1 - \nu^2}{\pi E a^2} P$$

$$\psi(\rho_1) = A_1 [p_1(\rho_1)]^\alpha - g_1(\rho_1) - \eta$$

Тогда получим

$$(3.1) \quad A_1^{-1/\alpha} \int_0^1 k(r_1, \rho_1) r_1 [\psi(r_1) + g_1(r_1) + \eta]^{1/\alpha} dr_1 + \psi(\rho_1) = 0$$

$$k(r_1, \rho_1) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \cos \varphi}}$$

$$P_1 = 2\pi \int_0^1 p_1(r_1) r_1 dr_1$$

Уравнение типа Гаммерштейна (первое уравнение в (3.1)), как и в п. 1, будем решать методом последовательных приближений. Очевидно, что ядро $k(r_1, \rho_1)$ интегрального уравнения (3.1) принадлежит классу L_2 .

Можно проверить также, что функция

$$f(r, u) = A_1^{-1/\alpha} r [u + g_1(r) + \eta]^{1/\alpha}, \quad u \leq 0$$

равномерно удовлетворяет условию Липшица

$$|f(r, u_1) - f(r, u_2)| < c(r) |u_1 - u_2|$$

$$c(r) = \alpha A_1^{-1/\alpha} r [g_1(r) + \eta]^{1/\alpha - 1}$$

и что функция $f(r, 0) = A_1^{-1/\alpha} r [g_1(r) + \eta]^{1/\alpha}$ принадлежит классу L_2 . Поэтому при выполнении неравенства

$$\alpha^{-2} A_1^{-2/\alpha} \int_0^1 \int_0^1 \rho^2 [g_1(\rho) + \eta]^{2/\alpha - 2} k^2(r, \rho) dr d\rho < 1$$

последовательность функций $\{\psi_n(\rho_1)\}$ сходится почти всюду к решению уравнения (3.1) [11]. Доказательство единственности решения уравнения (3.1) проводится аналогично тому, как это было сделано в п. 1.

Рассмотрим в качестве примера численное решение задачи о вдавлении кругового цилиндрического штампа с плоским основанием $g(\rho) = 0$ в шероховатое упругое полупространство. Были взяты следующие численные значения безразмерных параметров: $\alpha = 0.4$, $A_1 = 0.9$, $\eta = 0.1$. С точностью решения до 10^{-5} оказалось достаточным вычислить 12 приближений функции $\psi(x)$. Полученный график функции $p_1(r_1)$, представляющей собой безразмерное давление, приведен на фиг. 2. Штриховой линией дан график распределения давления под штампом, когда не учитывается шероховатость основания. В обоих случаях на штамп действует нагрузка $P = 0.8625 \cdot 10^{-2}$.

Поступила 10 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович А. С. Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
2. Рабинович А. С. Плоская контактная задача о давлении штампа с прямолинейным основанием на шероховатую упругую полуплоскость. Изв. АН АрмССР. Механика, 1974, т. 27, № 4.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. Попов Г. Я., Савчук В. В. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 3.
5. Митрофанов Б. П. Плоская контактная задача для упругого тела с учетом влияния поверхностного слоя. Изв. Томск. политехн. ин-та, 1970, т. 157.
6. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
7. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М., «Машиностроение», 1977.
8. Мхитарян С. М., Шекян Л. А. Плоская контактная задача для двух шероховатых упругих твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Изв. АН АрмССР. Механика, 1977, т. 30, № 3.
9. Рабинович А. С. Осесимметричная контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4.
10. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
11. Трикоми Ф. Дж. Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.