

ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ ИЗ КАНАЛА С ГИБКИМ ОГРАЖДЕНИЕМ

И. Л. Галина

(Москва)

Рассматривается истечение струи из канала, ограниченного на выходе гибкой надувной оболочкой. Задача решается отображением области течения на полукруг изменения вспомогательного переменного с учетом уравнения равновесия на гибком контуре. При построении функций, определяющих течение, получается нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. Определяется область существования и единственности решения этого уравнения, которое строится методом последовательных приближений. Полученное решение позволяет определить форму надувной оболочки и выразить изменение давления вблизи зазора истечения.

В современных аппаратах на воздушной подушке широко применяются эластичные гибкие ограждения по периметру аппарата, позволяющие удерживать большой объем воздуха и свободно деформироваться при преодолении препятствий на пути движения. К таким конструкциям можно отнести эластичные ограждения, представляющие собой надувной мешок, прикрепляемый к днищу аппарата и сообщающийся воздухопроводом с воздушной подушкой.

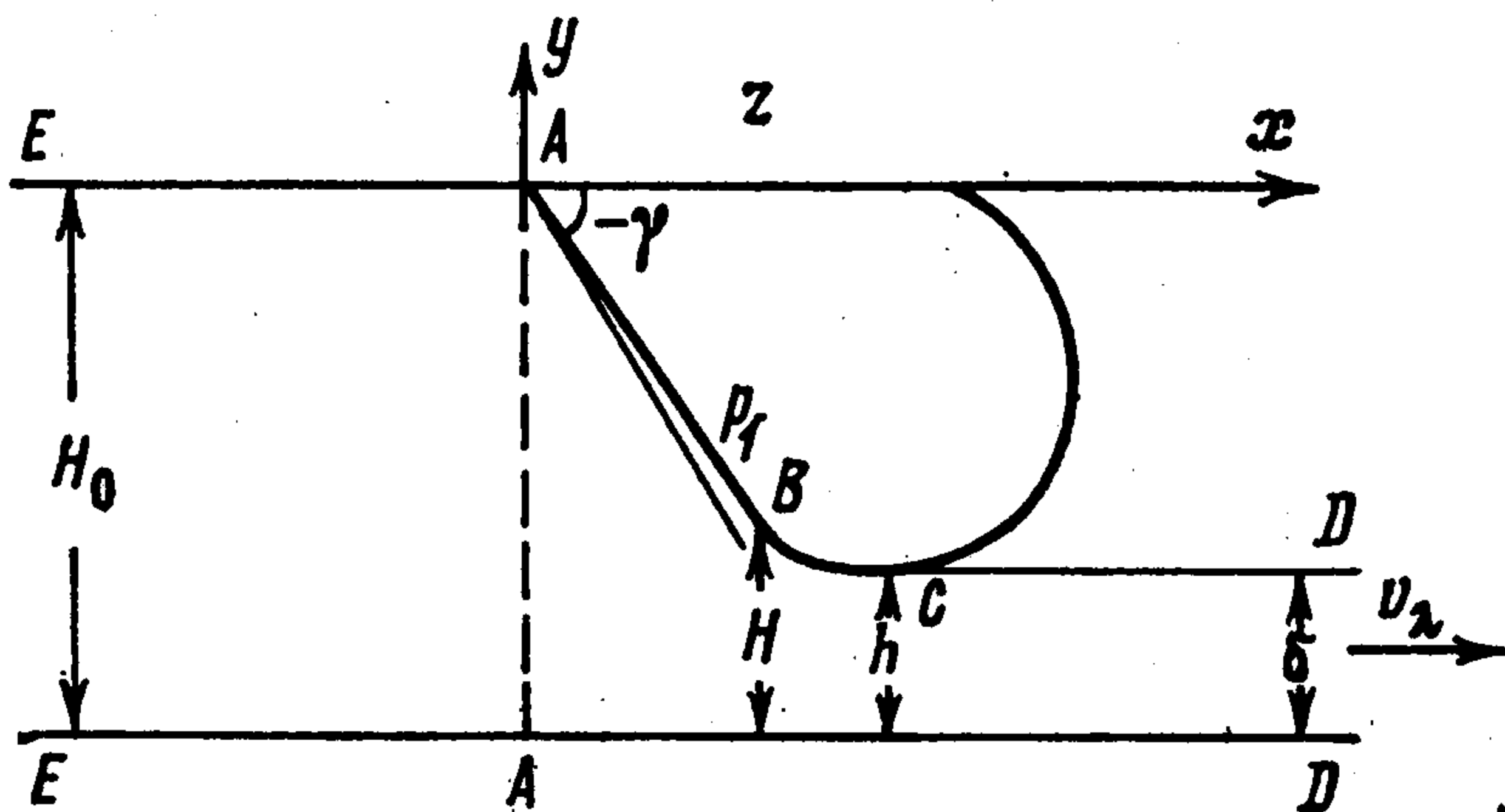
Рассматривается плоское установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости из бесконечного канала (см. фиг. 1), одна сторона которого $ABCK$ представляет собой гибкую пологую оболочку, заполненную изнутри воздухом под давлением p_1 . В точке A оболочка прикрепляется к корпусу аппарата на воздушной подушке. Поскольку зазор истечения h мал и оболочка сообщается воздухопроводом с воздушной подушкой, на большей части длины оболочки AB , примыкающей к точке крепления A , давление внутри оболочки равно давлению внутри воздушной подушки и часть оболочки AB представляет собой прямую линию, наклоненную к горизонтали под углом $(-\gamma)$. В конечной точке C искривленного участка оболочки BC происходит отрыв потока. В точке B наклон прямой AB и искривленной части контура BC совпадают.

Впервые задача о струйном обтекании гибкого профиля с закрепленными концами была рассмотрена в работе [1]. Эта модель была использована в [2] для определения формы, коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления паруса при различных углах атаки. Ниже будем следовать методам решения струйных задач, разработанным в [1, 3].

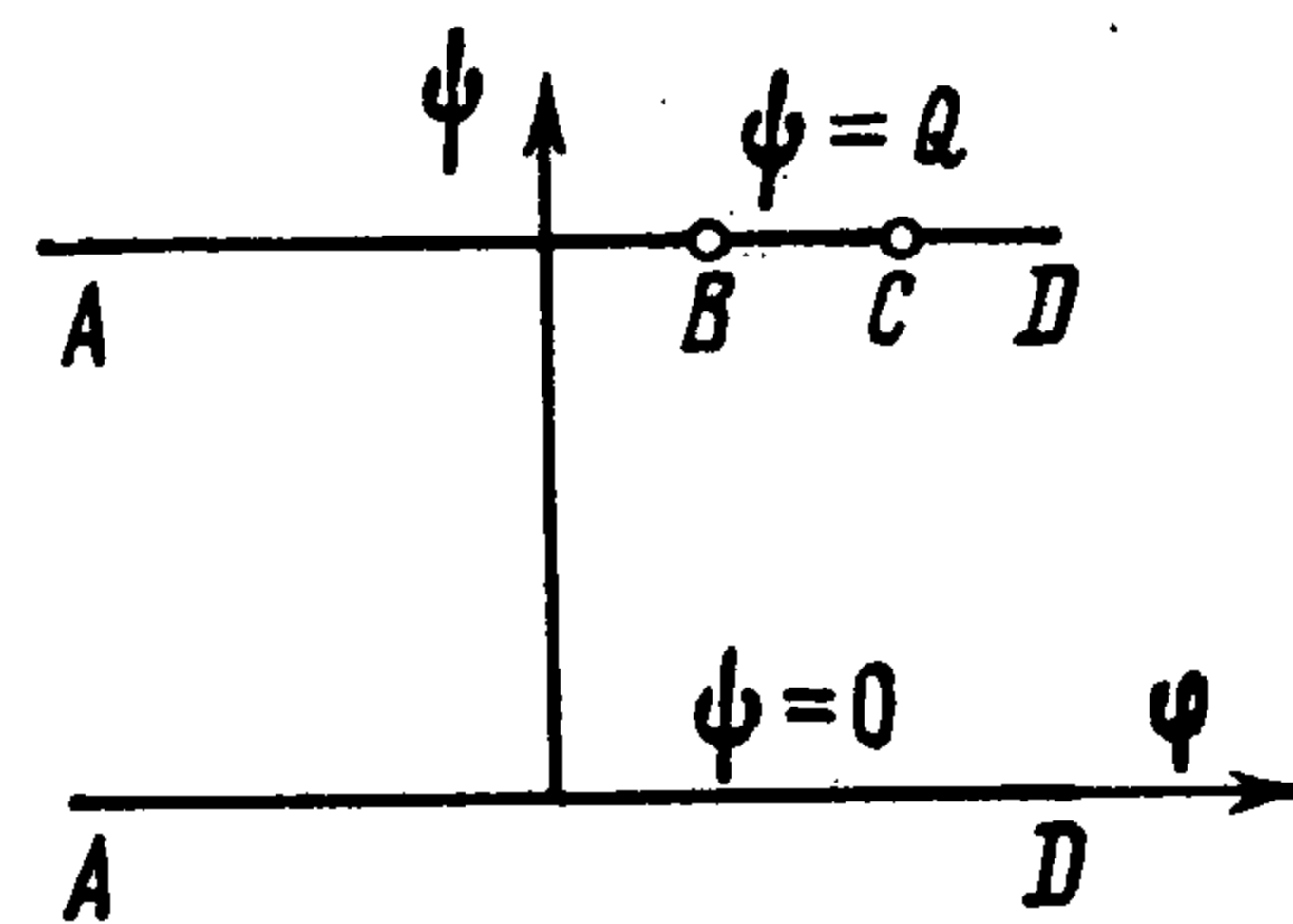
Высота воздушной подушки H_0 значительно превосходит величину зазора истечения h (фиг. 1). Поэтому можно считать сечение AA (фиг. 1) удаленным вверх по течению на бесконечность и задача сводится к рассмотрению истечения струи из бесконечного сосуда. Одна его стенка гори-

горизонтальна, другая наклонена под углом $(-\gamma)$ к горизонтали и искривлена: вблизи зазора истечения вследствие разности давлений, действующих на гибкую оболочку. Скорость на бесконечности в сечении AA идеализированного течения принимаем равной нулю. В точке D , бесконечно удаленной вниз по течению, поток имеет равномерную по всей ширине скорость V_λ .

Отобразим конформно область течения в плоскости z (фиг. 1) на область изменения вспомогательного параметрического переменного — полукруг ζ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Точкам A, D, C потока соответствуют точки $(i\pi/2, -1, 1)$ на границе единичного полукруга. Задание этих трех граничных точек определяет единственность конформного отображения, а изменение положения точки B , соответствующей на окружности параметру $\zeta = e^{i\sigma_0}$, позволяет получить различные геометрические и кинетические характеристики течения, изображенного на фиг. 1. Свободная поверхность λ переходит в диаметр полукруга. Прямолинейным участкам AD и AB соответствуют дуги окружности DA и AB , искривленной гибкой части контура BC — соответствующая дуга окружности.

Считаем, что опорной поверхности AD соответствует линия тока $\psi = 0$, а стенке AB , гибкому контуру BC и свободной поверхности CD — линия тока $\psi = Q$. Тогда область изменения комплексного потенциала $f = \varphi + i\psi$ представляет собой бесконечную полосу $0 \leq \psi \leq Q$ (фиг. 2). Задание комплексного потенциала $f = \varphi + i\psi$ и вспомогательной функции

$$(1) \quad \omega = \vartheta + i\tau = \vartheta + i \ln(V/V_\lambda)$$

как функций переменного ζ полностью определяют течение, так как согласно (1)

$$(2) \quad df/dz = Ve^{i\vartheta} = V_\lambda e^{-i\omega} = V_\lambda e^{\tau} e^{-i\vartheta}$$

Здесь V — модуль скорости в точке C с координатой z , ϑ — угол между вектором скорости и осью Ox , V_λ — модуль скорости на свободной поверхности струи.

Отображение полосы на полукруг задается формулой

$$(3) \quad f = iQ + Q\pi^{-1} \ln [(\zeta^2 + 1)/(\zeta^2 + 2\zeta + 1)]$$

Отсюда, согласно (2), геометрические координаты течения определяются выражением

$$(4) \quad z = \frac{2Q}{\pi V_\lambda} \int e^{i\omega} \frac{(\zeta - 1)}{(\zeta^2 + 1)(\zeta + 1)} d\zeta$$

В случае, когда точка ζ лежит на полуокружности (фиг. 1), например в точках, соответствующих гибкому контуру BC , где $\zeta = e^{i\sigma}$, ее координаты будем определять по формуле

$$(5) \quad z = -\frac{Q}{\pi V_\lambda} \int e^{i\omega} \frac{\operatorname{tg} \sigma d\sigma}{1 + \cos \sigma}$$

Функция $\omega(\zeta) = \vartheta + i \ln(V/V_\lambda)$ должна быть регулярной внутри полукруга ζ в силу отсутствия особенностей внутри потока и быть действительной на его диаметре, соответствующем свободной поверхности струи, где $V = V_\lambda$. На дуге окружности в области ζ действительная часть $\omega(\zeta)$ непрерывна всюду за исключением точки A , где направление скорости меняется на угол $(-\gamma)$, который составляет с осью OX прямолинейная часть AB натянутого гибкого контура ABC .

Функцию $\omega(\zeta)$ будем искать в виде

$$(6) \quad \omega(\zeta) = \omega_0(\zeta) + \Omega(\zeta)$$

Здесь $\Omega(\zeta) = \Phi + iT$ — функция, аналитическая в полукруге, действительная на его диаметре и непрерывная на полуокружности, причем на дуге DAB ее действительная часть обращается в нуль. Функция $\omega_0(\zeta) = \vartheta_0 + i\tau_0$ обладает теми же свойствами, но в точке A на полуокружности ее действительная часть терпит разрыв. На дуге DA (при $\sigma > \pi/2$) $\omega_0(\zeta) = 0$, на дуге ABC (при $\sigma < \pi/2$) $\omega_0(\zeta) = -\gamma$. Функция $\omega_0(\zeta)$ обладает на полуокружности теми же особенностями, что и функция $\omega(\zeta)$. Решение задачи определения аналитической в полукруге и действительной на диаметре функции, действительная часть которой принимает постоянные дискретные значения на полуокружности, приведено в [3]; на полуокружности для $\zeta = e^{i\sigma}$ имеем

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma > \pi/2, \quad \vartheta_0 &= 0; \quad \sigma < \pi/2, \quad \vartheta_0 = -\gamma \\ \tau_0 &= (\gamma/\pi) \ln |\Lambda(\pi/2, \sigma)| \\ \Lambda(x, y) &= \sin[(x-y)/2] / \sin[(x+y)/2] \end{aligned}$$

Для определения второго слагаемого в выражении (6), определяющем искомую функцию $\omega(\zeta)$, необходимо учесть уравнение равновесия искривленной гибкой части оболочки BC . Уравнение равновесия гибкой части оболочки BC , связывающее перепад давления на гибком контуре и постоянную силу натяжения T_0 при условии нерастяжимости оболочки, имеет вид

$$(8) \quad \Delta p = T_0 \kappa, \quad \kappa = d\vartheta/ds$$

Здесь κ — кривизна гибкого контура в данной точке, ds — элемент дуги.

Определим перепад давления $\Delta p = p_1 - p$ между давлением в оболочке p_1 и давлением со стороны потока в точке гибкого контура BC . Поскольку

надувная оболочка сообщается с областью воздушной подушки, давление p_1 равно давлению на бесконечности вверх по течению потока.

Используем интеграл Бернулли $p + 1/2 \rho V^2 = p_1$ (предполагаем, что скорость потока в точке A — нулевая). Так как $V = V_\lambda e^\tau$, отсюда следует

$$\Delta p = \rho V_\lambda^2 e^{2\tau} / 2$$

Из уравнения равновесия (8) находим

$$(9) \quad d\vartheta / ds = \Delta p / T_0 = \rho V_\lambda^2 e^{2\tau} / (2T_0)$$

Так как, согласно (6), $\vartheta = \operatorname{Re} \omega = \vartheta_0 + \Phi$ и при значениях $\sigma < \pi/2$, соответствующих точкам гибкого контура, $\vartheta_0 = -\gamma$, вдоль гибкого контура имеем

$$(10) \quad d\vartheta = d\Phi$$

Считая для отсчета дуги гибкого контура направление от B к C положительным, имеем из (2) для элемента дуги ds выражение, связывающее геометрическую координату течения z и комплексный потенциал f :

$$(11) \quad ds = |dz| = |df| / (V_\lambda e^\tau)$$

Используя (10) и (11), из условия (9) вдоль гибкого контура получим

$$(12) \quad d\Phi / |df| = 1/2 \rho V_\lambda e^\tau / T_0$$

Вдоль гибкого контура $\zeta = e^{i\sigma}$, используя (3), находим

$$(13) \quad |df| = - (Q/\pi) \operatorname{tg} \sigma (1 + \cos \sigma)^{-1} d\sigma$$

При движении вдоль гибкого контура от точки B к C $d\sigma < 0$, поэтому последнее выражение положительно.

Из (12) и (13) для действительной части $\Omega = \Phi + iT$ вдоль гибкого контура получим

$$(14) \quad d\Phi / d\sigma = - (2\pi T_0)^{-1} Q \rho V_\lambda e^\tau \operatorname{tg} \sigma (1 + \cos \sigma)^{-1}$$

Для функции $\Omega = \Phi + iT$, непрерывной на полуокружности и действительной на диаметре, справедливо соотношение Дини, дающее связь между действительной Φ и мнимой частью T функции Ω на дуге окружности.

Поскольку для функции $\Omega(\zeta)$ при $\sigma > \sigma_0$ предполагалось $\operatorname{Re}(\Omega) = \Phi(\sigma) = 0$, выражение (14) запишем в виде

$$(15) \quad 0 < \sigma < \pi, \quad T(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma_0} \Phi'(\sigma_1) \ln |\Lambda(\sigma_1, \sigma)| d\sigma_1$$

Используя (2) и выражение τ_0 из (7), имеем

$$(16) \quad V / V_\lambda = e^{\tau(\sigma_1)} = e^{T(\sigma_1)} \Lambda^{\gamma/\pi}(\pi/2, \sigma_1)$$

Из выражений (14) — (16) получаем интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $T(\sigma)$ на гибком контуре, в виде

$$(17) \quad T(\sigma) = -\lambda \int_0^{\sigma_0} e^{T(\sigma_1)} \Lambda^{\gamma/\pi} \left(\frac{\pi}{2}, \sigma_1 \right) \ln |\Lambda(\sigma_1, \sigma)| \frac{\operatorname{tg} \sigma_1}{(1 + \cos \sigma_1)} d\sigma_1$$

$$\lambda = Q \rho V_\lambda / (2\pi^2 T_0), \quad 0 < \sigma < \sigma_0$$

Нелинейные интегральные уравнения, подобные (17), содержащие в подынтегральном выражении экспоненты от неизвестной функции, встречались ранее в работах [4-6], посвященных струйному обтеканию жестких криволинейных контуров; при решении задач такого рода использовался метод последовательных приближений.

Следует отметить, что уравнение (17) является нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна, для решения которого применим процесс последовательных приближений. Каноническая форма записи уравнения Гаммерштейна имеет вид

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) F(y, f(y)) dy = 0$$

Для существования и единственности решения этого уравнения требуется выполнение следующих трех условий, приведенных в [7, 8]

$$\kappa(x) = \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} \in L^2(a, b)$$

Функция $F(x, v)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|F(x, v_1) - F(x, v_2)| \leq |v_1 - v_2| m(x)$$

$$\left(\int_a^b [\kappa(x) m(x)]^2 dx \right)^{1/2} = c < 1$$

Для уравнения (17) функции $f(x)$, $K(x, y)$, $F(y, f(y))$, $\kappa(x)$ имеют следующий вид:

$$f(\sigma) = T(\sigma), \quad K(\sigma, \sigma_1) = -\lambda \ln |\Lambda(\sigma_1, \sigma)|$$

$$F(\sigma_1, T(\sigma_1)) = e^{T(\sigma_1)} \Lambda^{\nu/\pi}(\pi/2, \sigma_1) \operatorname{tg} \sigma_1 / (1 + \cos \sigma_1)$$

$$\kappa^2(\sigma) = \lambda^2 \int_0^{\sigma_0} (\ln |\Lambda(\sigma_1, \sigma)|)^2 d\sigma_1$$

Поскольку в области течения $V/V_\lambda \leq 1$, из (16) получаем

$$(18) \quad e^{T(\sigma_1)} \Lambda^{\nu/\pi}(\pi/2, \sigma) \leq 1$$

Выполнение условия Липшица для функции $F(\sigma, T(\sigma))$ по переменному T означает ограниченность ее производной

$$F_{T'}(\sigma, T(\sigma)) = e^{T(\sigma)} \Lambda^{\nu/\pi}(\pi/2, \sigma) \operatorname{tg} \sigma / (1 + \cos \sigma)$$

Из (18) следует

$$F_{T'}(\sigma, T(\sigma)) \leq \operatorname{tg} \sigma / (1 + \cos \sigma) = m(\sigma)$$

т. е. функция $F(\sigma, T(\sigma))$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда третье условие существования решения уравнения типа Гаммерштейна применительно к уравнению (17) принимает вид

$$(19) \quad \lambda \left(\int_0^{\sigma_0} \left\{ m^2(\sigma) \left[\int_0^{\sigma_0} (\ln |\Lambda(\sigma_1, \sigma)|)^2 d\sigma_1 \right] \right\} d\sigma \right)^{1/2} < 1$$

Это выражение позволяет для данного σ_0 оценить область изменения параметра λ , при котором процесс последовательных приближений для уравнения (17) сходится. Так, для $\sigma_0 = 86^\circ$ $\lambda < 0.147$, для $\sigma_0 = 88^\circ$ $\lambda < 0.097$.

Последовательные приближения решения интегрального уравнения (17) имеют вид

$$(20) \quad T_0(\sigma) = 0, \quad T_n(\sigma) = -\lambda \int_0^{\sigma_0} \exp(T_{n-1}(\sigma_1)) \Lambda^{\gamma/\pi} \left(\frac{\pi}{2}, \sigma_1 \right) \times \\ \times \ln |\Lambda(\sigma_1, \sigma)| d\sigma_1$$

Здесь σ_0 — постоянный параметр; интервал $0 < \sigma < \sigma_0$ соответствует точкам на гибком контуре.

Метод вычисления состоит в том, что интервал $(0, \pi)$, на котором изменяется параметр σ , разбивается на узлы, разделенные равными промежутками, и в каждом из узлов по формулам (20) определяются значения функции $T_n(\sigma)$. Интегралы в (20) вычисляются по формуле Симпсона. Вычисления интегралов, определяющих геометрические координаты течения, проводятся аналогично.

Координаты гибкого контура определяются по формуле (5) и имеют следующий вид:

$$\left(\frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma_0} (n_1, n_2) e^{-T(\sigma)} \Lambda^{\gamma/\pi} \left(\frac{\pi}{2}, -\sigma \right) \frac{\operatorname{tg} \sigma}{1 + \cos \sigma} d\sigma \\ n_1 = \cos(-\gamma + \Phi(\sigma)), \quad n_2 = \sin(-\gamma + \Phi(\sigma))$$

Здесь $\delta = Q/V_\lambda$ — толщина вытекающей струи на бесконечности поверхности. На диаметре полуокружности, который соответствует свободной поверхности струи, функция $\omega(\zeta)$ действительна и определяется по значениям своей действительности части $\vartheta = \vartheta_0 + \Phi$ на полуокружности. Согласно формуле Шварца — Пуассона [4], имеем

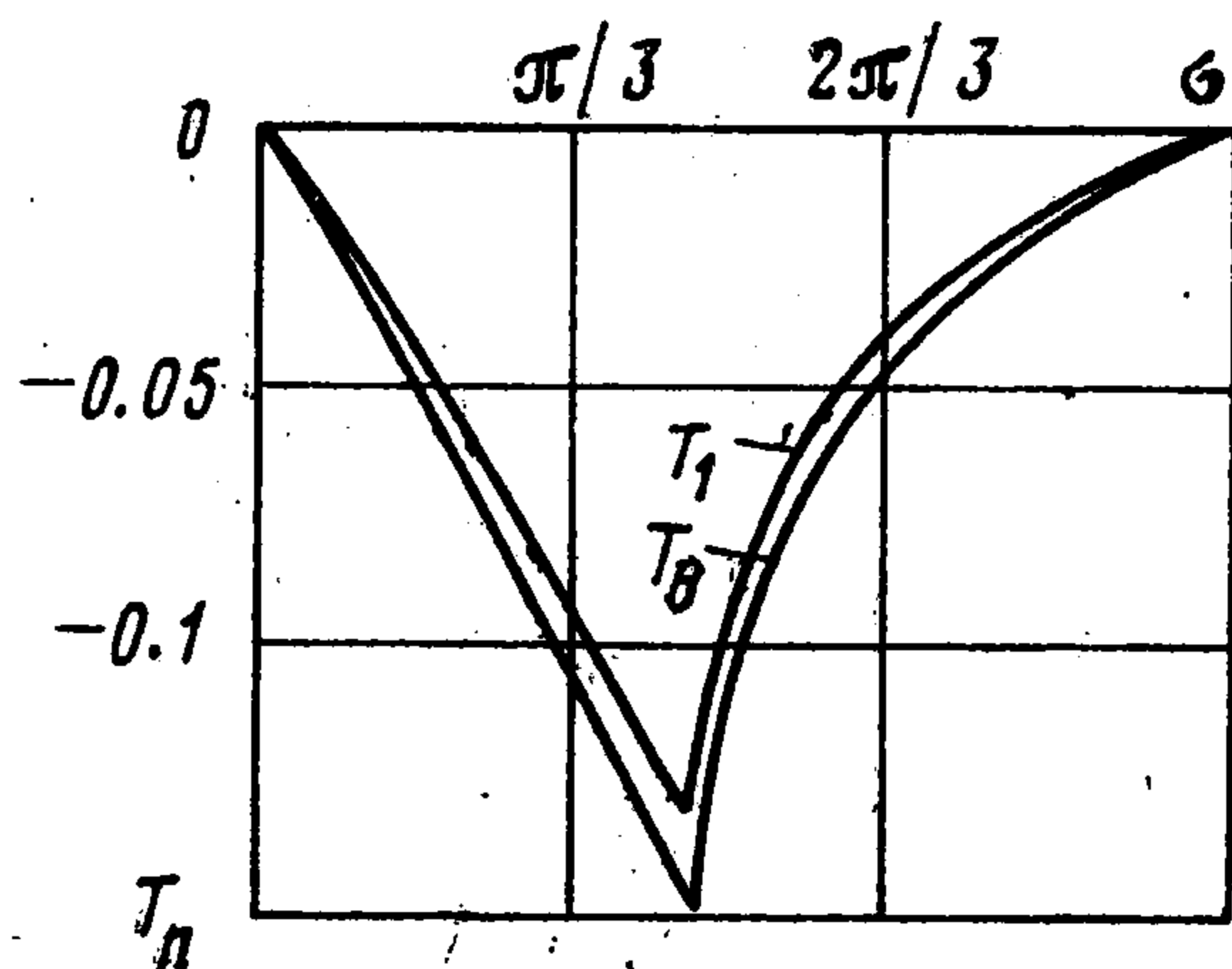
$$(21) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [-\gamma + \Phi(\sigma)] \frac{(1-x^2)}{(1-2x \cos \sigma + x^2)} d\sigma$$

Здесь учтено, что на полуокружности для значений аргумента $\sigma > \pi/2$, соответствующих горизонтальной опорной поверхности AD (фиг. 1), $\operatorname{Re} \omega = \vartheta = \vartheta_0 + \Phi(\sigma) = 0$. Функция $\Phi(\sigma)$ на дуге $(0, \sigma_0)$, соответствующей гибкому контуру, вычисляется интегрированием выражения (14) и согласно указанному выше условию для функции $\Omega(\zeta) = \Phi + iT$

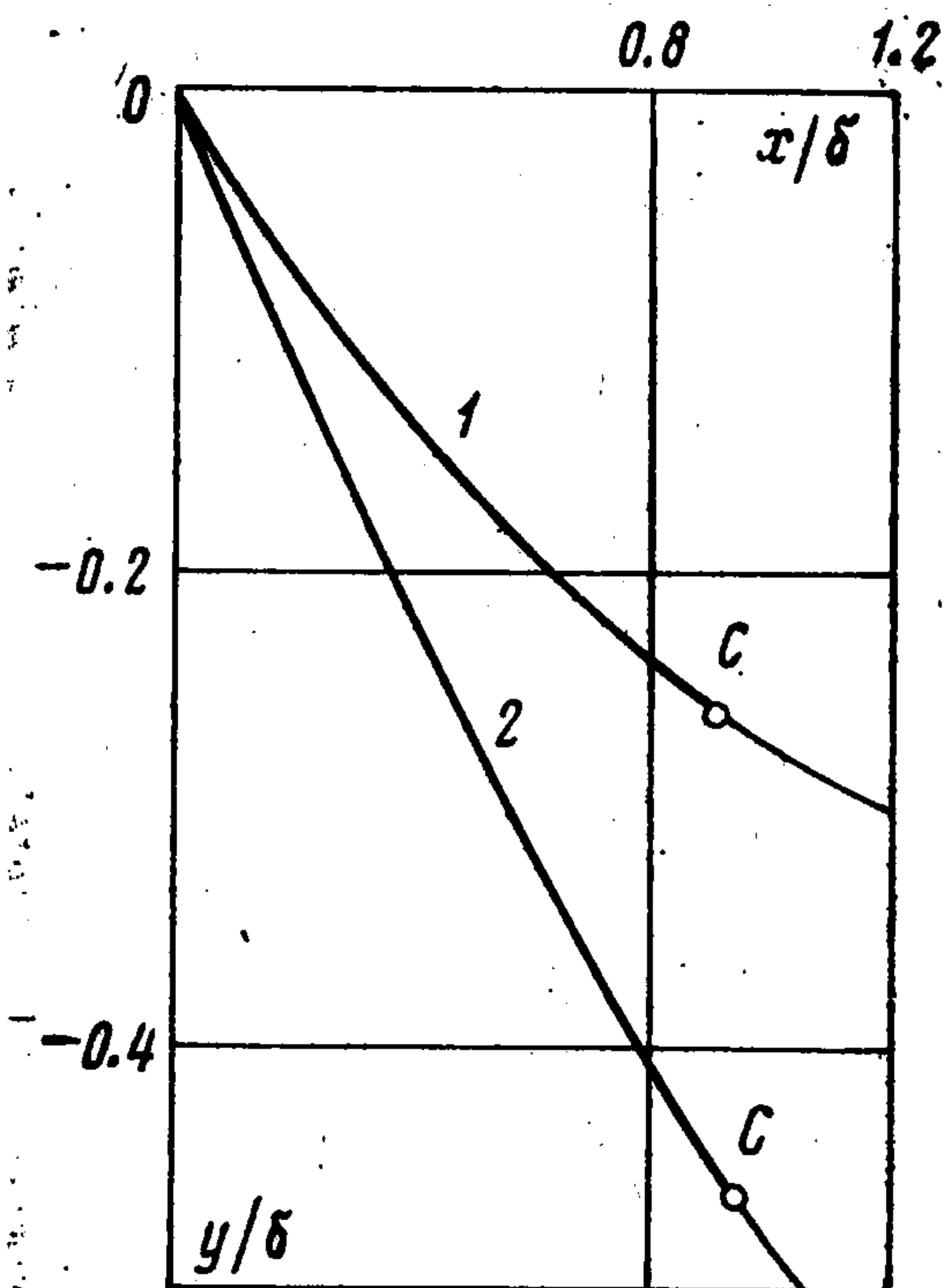
$$(22) \quad \Phi(\sigma) = \pi \lambda \int_0^{\sigma_0} e^{T(\sigma_1)} \Lambda^{\gamma/\pi} \left(\frac{\pi}{2}, \sigma_1 \right) \frac{\operatorname{tg} \sigma_1}{(1 + \cos \sigma_1)} d\sigma_1$$

На фиг. 3 представлены первое и шестое приближения решения уравнения (17) при $\gamma = 30^\circ$, $\sigma_0 = 86^\circ$, $\lambda = 0.036$. Отметим, что, начиная с третьего приближения, функции $T_n(\sigma)$ практически совпадают.

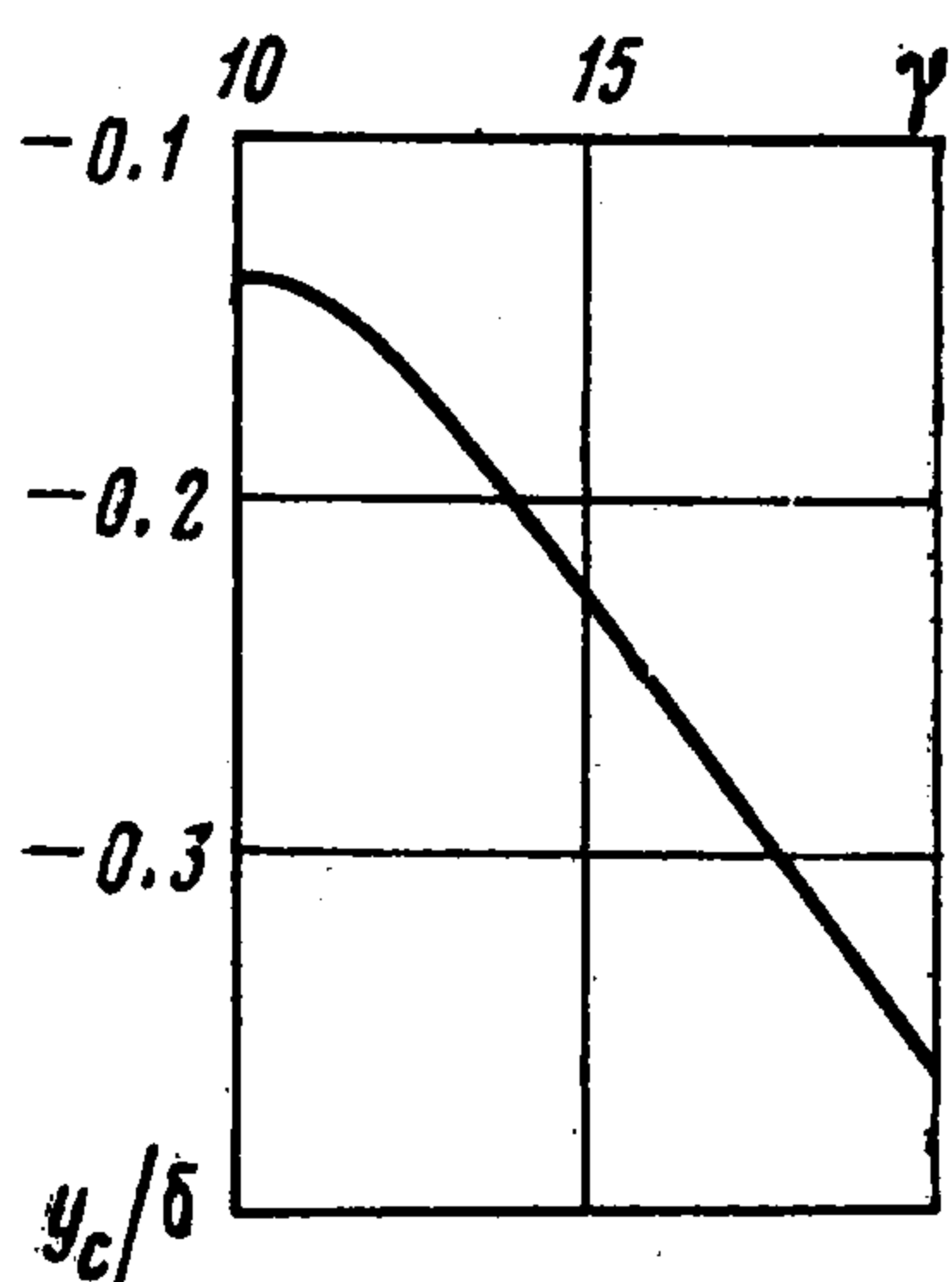
Фиг. 4 иллюстрирует форму гибкого контура при различных γ и одних и тех же значениях σ_0 и λ . Кривая 1 на фиг. 4 соответствует значениям



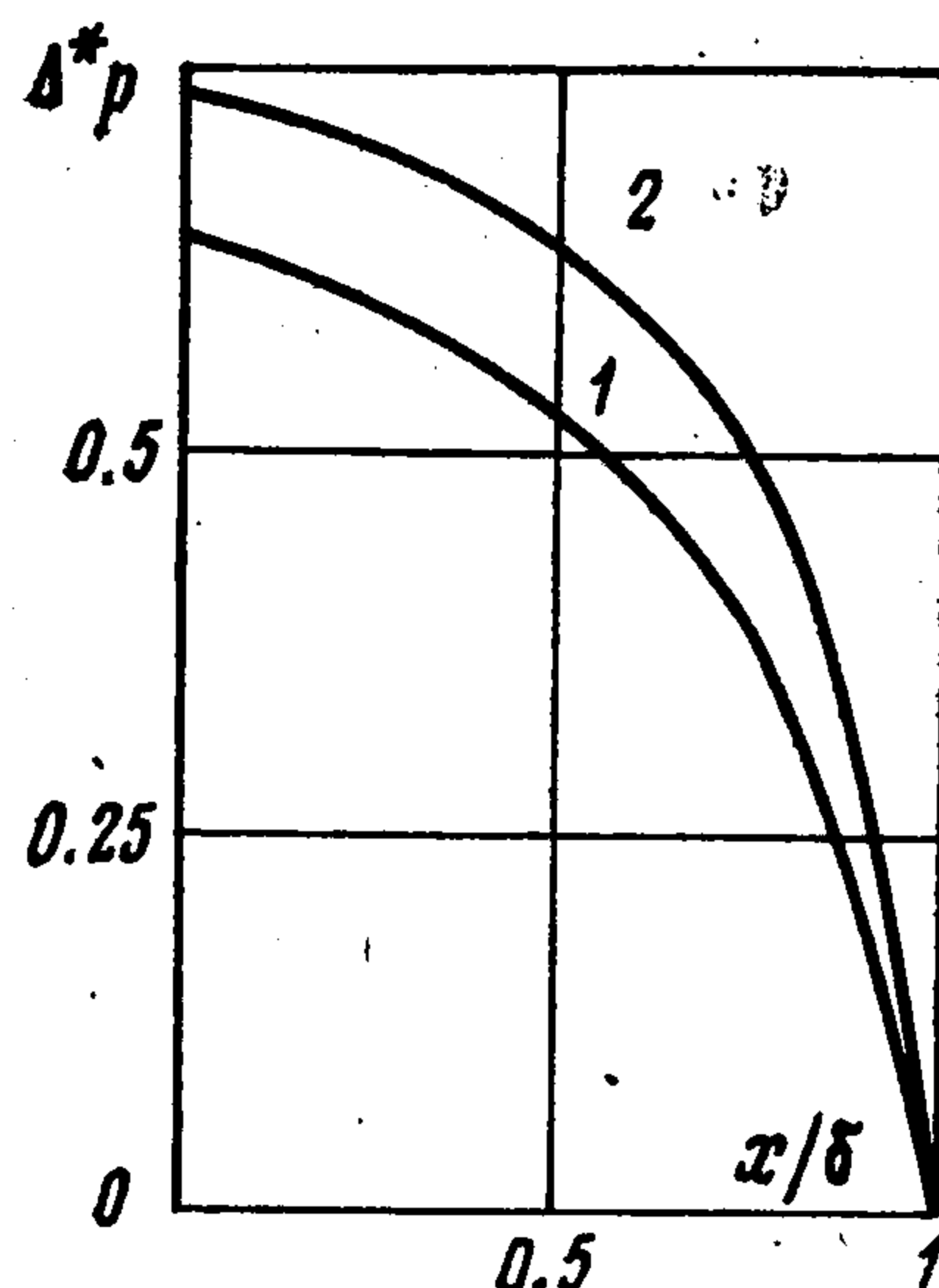
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

параметров $\gamma = 20^\circ$, $\sigma_0 = 86^\circ$, $\lambda = 0.036$; значения параметров, соответствующих кривой 2 на фиг. 4, те же, что и для фиг. 3.

Координаты точек свободной поверхности вычисляются согласно (5) в виде

$$(23) \quad \left(\frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}\right) = \left(\frac{x_c}{\delta}, \frac{y_c}{\delta}\right) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 (k_1, k_2) \frac{1-x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

$$k_1 = \cos \Phi(x), \quad k_2 = \sin \Phi(x)$$

Здесь x_c, y_c — координаты конечной точки гибкого профиля C , в которой происходит отрыв струи; δ — толщина струи на бесконечности вниз по течению.

Как следует из фиг. 4, на которой представлена форма гибкого контура вблизи зазора истечения, кривизна дуги контура мала и ее форма незначительно отличается от прямой. Последнее объясняется тем, что величина параметра λ , при которой сходится процесс последовательных приближений, мала. Обратная пропорциональная зависимость величины λ от силы натяжения T_0 означает, что гибкий контур сильно натянут.

На фиг. 5 показана зависимость безразмерной координаты y_c / δ в точке отрыва потока от гибкого контура от угла наклона γ при значениях параметров $\lambda = 0.03$, $\sigma_0 = 88^\circ$.

Используя интеграл Бернулли $p + \rho V^2 / 2 = p_a + \rho V_\lambda^2 / 2$, где p_a — атмосферное давление, p — давление на гибком контуре, и формулу (16), дающую отношение V / V_λ , определим изменение давления $\Delta^* p = (p - p_a) / (\rho V_\lambda^2 / 2)$ вблизи зазора истечения искривленной части гибкого контура. Зависимость, приведенная на фиг. 6, соответствует картине течения, изображенной на фиг. 4.

Поступила 23 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cisotti U.* Motto con scia di un profilo flessibile Nota I, II. Rend. della Reala Accademia nazionale dei Lincei, 1932, vol. 15, p. 166—173, 253—257.
2. *Dugan J. P.* A free-streamline model of the two-dimensional sail. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, pt 3.
3. *Cisotti U.* Idromecanica piana, vol. 1, Milano, Tamburini, 1921.
4. *Некрасов А. И.* О непрерывном течении жидкости и двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. Изв. Иваново-Вознесенск. политехн. ин-та, 1922, № 5.
5. *Слезкин Н. А.* К вопросу о плоском движении газа. Уч. зап. МГУ, 1937, вып. 7.
6. *Секерж-Зенькович Я. И.* К теории обтекания криволинейной дуги с отрывом струи. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 299.
7. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. *Piskorek A.* Równania całkowe. Warszawa, Wydawn. naukowo-techn., 1971.