

**СХЕМА СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ УПРУГИХ ПЛАСТИН
В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ И ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Н. В. Баничук, А. А. Миронов

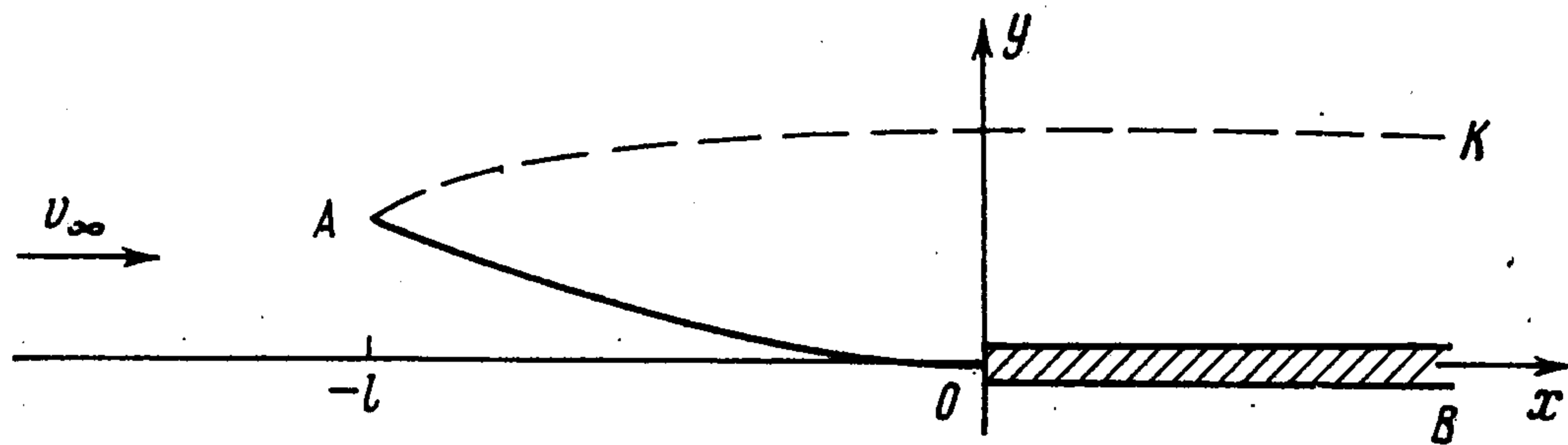
(Москва)

Рассматриваются задачи отыскания нетривиальных равновесных форм тонких упругих пластинок, обтекаемых идеальной жидкостью. При определении гидродинамических сил, действующих на искривленную пластинку, используется схема струйного обтекания с бесконечной каверной (схема Кирхгофа). Изучается возникающая краевая задача и доказывается, что оператор задачи является самосопряженным и положительно-определенным. Дается аналитическое решение внешней гидродинамической задачи и определяется реакция жидкости на пластинку.

Отыскание равновесных искривленных форм сводится к решению краевой задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения. Первое собственное значение (критическая величина скорости набегающего потока) и соответствующая собственная функция (равновесная искривленная форма пластинки) находятся итерационным методом. Далее формулируется оптимизационная задача об отыскании распределения толщины в пластинке, для которого нетривиальная равновесная форма возникает при максимально большом значении скорости набегающего потока. Выводятся условия оптимальности. Приводится аналитическое решение задачи оптимизации для тонкой трехслойной панели и показывается, что в этом случае условие оптимальности является не только необходимым, но и достаточным.

Ранее задачи оптимизации для упругих пластин, взаимодействующих с идеальной жидкостью, исследовались в работах [1, 2].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим задачу обтекания идеальной жидкостью упругой пластинки OA (фиг. 1). В недеформированном состоянии пластина располагается в плоскости, перпендикулярной оси y , причем передний край пластинки (точка A' на фиг. 1) свободный,



Фиг. 1

а задней кромкой ($x = 0, y = 0$) она прикреплена к абсолютно жесткой полубесконечной пластинке OB , расположенной вдоль полуоси $x > 0, y = 0$. Для исследования нетривиальных положений равновесия пластин-

ки наряду с исходной невозмущенной формой ($y = 0$) рассмотрим некоторую равновесную изогнутую форму OA . Обозначая через $u(x)$ величины прогибов ($u \ll l$), запишем уравнение равновесия пластинки и граничные условия

$$(1.1) \quad (Du_{xx})_{xx} = Q \quad (-l \leq x \leq 0)$$

$$(1.2) \quad u(0) = u_x(0) = 0, \quad (Du_{xx})_{x=-l} = [(Du_{xx})_x]_{x=-l} = 0$$

Граничные условия в точке $x = 0$ соответствуют жесткому закреплению края пластинки, а условия при $x = -l$ означают отсутствие моментов и перерезывающих сил на свободном крае.

Через D обозначена цилиндрическая жесткость, связанная с распределением толщин $h(x)$ зависимостью $D = K_m h^m$, где $K_m = \text{const}$. Значение параметра m и постоянной K_m определяется конструкцией пластинки и константами материала (модулем Юнга и коэффициентом Пуассона). При $m = 3$ эта зависимость отвечает случаю сплошных пластинок, при $m = 1$ — трехслойных. В последнем случае под h подразумевается толщина внешних армирующих слоев. Через Q обозначена реакция жидкости на пластинку.

Для определения реакции жидкости рассмотрим гидродинамическую задачу об обтекании идеальной жидкостью контура OA . Предположим, что обтекание изогнутой пластинки жидкостью происходит со срывом струи и образованием бесконечной каверны $BOAK$. Скорость жидкости обозначим через $v(x, y)$. На бесконечности вектор скорости параллелен оси x , а его модуль равен v_∞ . Движение жидкости предполагается безвихревым с потенциалом $\varphi(x, y)$ ($v = \nabla\varphi$), удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Потенциал φ представим в виде

$$\varphi = v_\infty x + \Phi$$

Функция Φ , так же как и φ , гармоническая, а на бесконечности обращается в нуль

$$(1.3) \quad \Delta\Phi = 0, \quad (\Phi)_\infty = 0$$

Функция Φ должна удовлетворять определенным граничным условиям на поверхности пластинки и на свободной поверхности жидкости (границе каверны). Выполним линеаризацию и снос краевых условий на ось x , пренебрегая членами $o(H)$, $o(U)$, где $H = \max_x h$, $U = \max_x u$. Проведем вдоль полубесконечного интервала $x \geq -l$ оси x разрез нулевой толщины. Верхний и нижний берега этого разреза, а также значения функций на берегах отмечаются индексами плюс и минус соответственно. После линеаризации и сноса на поверхность S^- условия непротекания жидкости через поверхность пластинки получим

$$(1.4) \quad (\Phi_y)^- = v_\infty u_x \quad (-l \leq x \leq 0), \quad (\Phi_y)^- = 0 \quad (x \geq 0)$$

Здесь использовано предположение, что характерная толщина пластинки много меньше характерного прогиба. Аналогично запишется кинематическое условие, снесенное со свободной поверхности на S^+

$$(1.5) \quad (\Phi_y)^+ = v_\infty f_x$$

Динамическое условие $(\nabla\Phi)^2 = \text{const}$, вытекающее из интеграла Бернулли и означающее постоянство давления на границе каверны, примет вид

$$(1.6) \quad (\Phi_x)^+ = 0 \quad (x \geq -l)$$

При заданном распределении прогибов $u = u(x)$ краевая задача (1.3), (1.4), (1.6) замкнута, и, решая ее, можно определить функцию $\Phi(x, y)$. После отыскания функции $\Phi(x, y)$ форма каверны находится (как это следует из (1.5)) при помощи квадратуры

$$(1.7) \quad f = u(-l) + \frac{1}{v_\infty} \int_{-l}^x (\Phi_y(t, 0))^+ dt$$

Распределение реакции жидкости на пластинку определим, пользуясь интегралом Бернулли. После линеаризации и элементарных преобразований имеем

$$(1.8) \quad Q = p^- - p^+ = -\rho v_\infty (\Phi_x)^-$$

где ρ — плотность жидкости. В уравнении изгиба пластинки (1.1) и граничных условиях (1.2) выразим D через h . Подставим далее выражение (1.8) для Q в уравнение (1.1) и перейдем в найденном уравнении и соотношениях (1.2) — (1.6) к следующим безразмерным переменным: $u' = u/l$, $x' = x/l$, $y' = y/l$, $\Phi' = \Phi/lv_\infty$, $h' = lh/S$, где S — площадь поперечного сечения упругой пластинки OA (штрихи в дальнейшем опускаются). Таким образом, приходим к замкнутой краевой задаче для функций u и Φ

$$(1.9) \quad (h^m u_{xxx})_{xxx} = -\lambda (\Phi_x)^-, \quad \lambda = \rho v_\infty^2 S^{-m} K_m^{-1} l^{m+3} \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

$$u = u_x = 0 \quad (x = 0), \quad h^m u_{xxx} = (h^m u_{xxx})_x = 0 \quad (x = -1)$$

$$(1.10) \quad \Delta\Phi = 0, \quad (\Phi)_\infty = 0$$

$$(\Phi_x)^+ = 0 \quad (-1 \leq x)$$

$$(\Phi_y)^- = u_x \quad (-1 \leq x \leq 0), \quad (\Phi_y)^- = 0 \quad (x \geq 0)$$

Гидродинамическая задача (1.10) об определении потенциала Φ и задача об изгибе (1.9) являются связанными, так как в граничные условия для Φ входит производная распределения прогибов пластинки, а в правую часть уравнения изгиба пластинки — производная потенциала Φ .

Задача (1.9), (1.10) однородна и, следовательно, допускает тривиальное решение $u = \Phi = 0$. Рассматривая вопрос об отыскании нетривиальных решений этой системы уравнений, приходим к задаче на собственные значения, где роль собственного значения играет λ . Будем искать первое собственное значение λ , которое отвечает критическим значениям параметров ρ , v_∞ , l , S , K_m .

Существование в системе (1.9) нетривиальных решений можно рассматривать как неустойчивость недеформированного положения пластинки.

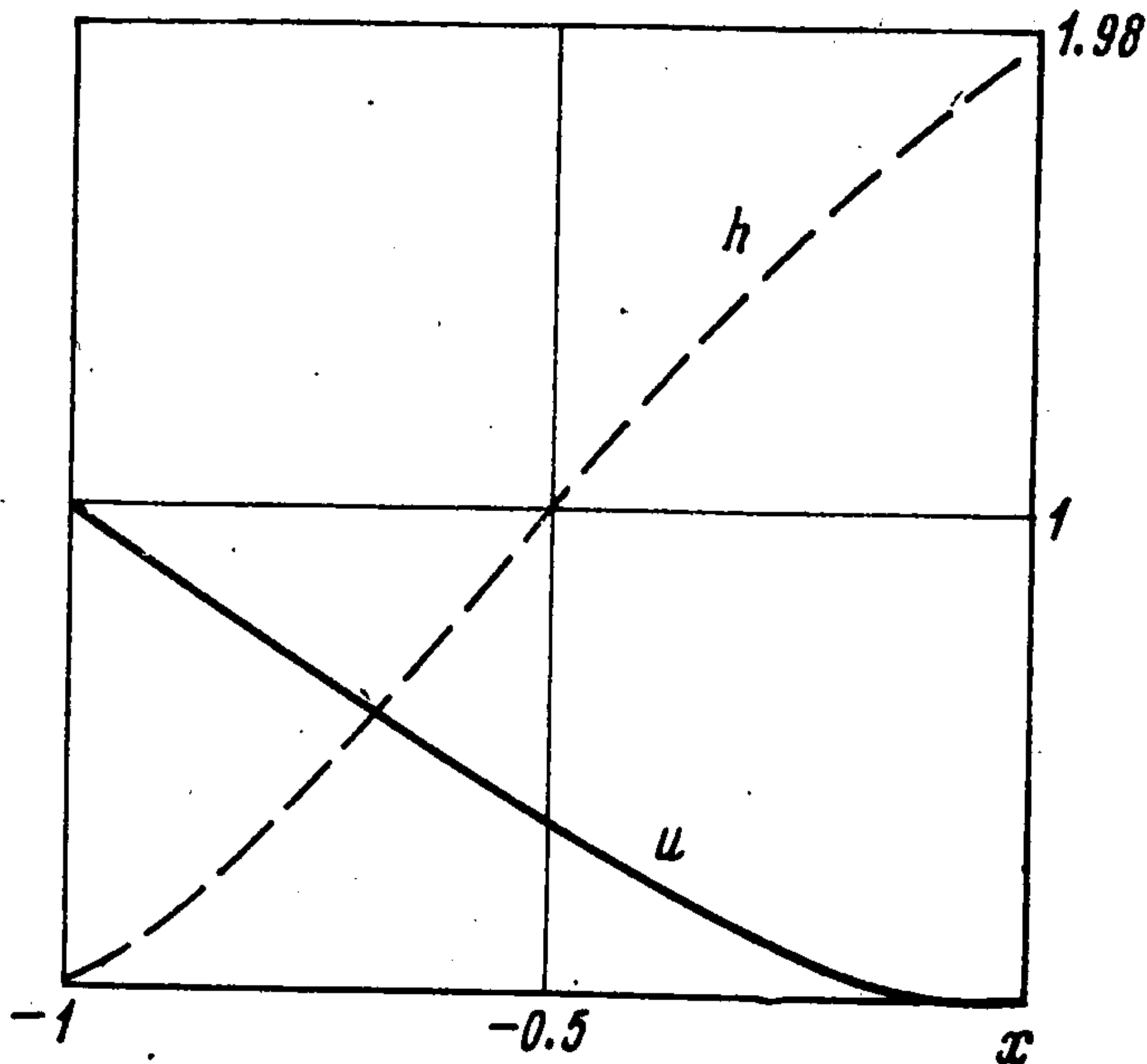
2. Исследование краевой задачи. Задача (1.10) для потенциала Φ линейна по u и не зависит от h , поэтому выражение $(\Phi_x)^-$ в правой части уравнения (1.9) можно представить в виде

$$(\Phi_x)^- = Lu$$

где L — некоторый линейный оператор. Этот оператор самосопряжен и положителен.

Покажем это. Пусть $u^1(x)$ и $u^2(x)$ — две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[-1, 0]$ и пусть Φ^1 и Φ^2 — решения краевой задачи (1.10) соответственно при $u = u^1$ и $u = u^2$. Доопределим функции u^1 и u^2 на отрезке $[0, \delta]$, где δ — некоторое положительное число, положив $u^1(x) = u^2(x) \equiv 0$. Имеем

$$(2.1) \quad \int_{-1}^0 u^1 L u^2 dx = \int_{-1}^{\delta} u^1 L u^2 dx = - \int_{-1}^{\delta} u (\Phi_x^2)^- dx$$



Фиг. 2

Применим к последнему интегралу в (2.1) формулу интегрирования по частям. Учтем при этом, что $(\Phi^1)^+ = (\Phi^2)^- = 0$ при $x = -1$, и используем граничные условия для потенциалов Φ^1 и Φ^2 . Получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 u^1 L u^2 dx &= \int_{-1}^{\delta} u_x^1 (\Phi^2)^- dx = \\ &= \int_{-1}^{\delta} (\Phi_y^1)^- (\Phi^2)^- dx = \\ &= \int_{-1}^{\delta} [(\Phi_y^1)^- (\Phi^2)^- - (\Phi_y^1)^+ (\Phi^2)^+] dx \end{aligned}$$

Обозначим символами S_δ^+ и S_δ^- отрезки берегов разреза, для которых $-1 \leq x \leq \delta$, через Σ_δ — окружность радиуса δ с центром в точке $(-1, 0)$, а через n — внутреннюю нормаль к границе $S_\delta = S_\delta^+ + S_\delta^- + \Sigma_\delta$ (см. фиг. 2). Тогда

$$(2.2) \quad \int_{-1}^0 u^1 L u^2 dx = - \int_{S_\delta} \frac{\partial \Phi^1}{\partial n} \Phi^2 d\sigma + \int_{\Sigma_\delta} \frac{\partial \Phi^1}{\partial n} \Phi^2 d\sigma$$

Применяя теперь первую формулу Грина к первому интегралу в правой части (2.2), получим

$$\int_{-1}^0 u^1 L u^2 dx = - \int_{S_\delta} \Phi^1 \frac{\partial \Phi^2}{\partial n} d\sigma + \int_{\Sigma_\delta} \frac{\partial \Phi^1}{\partial n} \Phi^2 d\sigma$$

Учитывая граничные условия для потенциалов Φ^1 и Φ^2 , последнее равенство перепишем в виде

$$\int_{-1}^0 u^1 L u^2 dx = \int_{-1}^{\delta} u_x^1 (\Phi^2)^- dx + \int_{\Sigma_\delta} \left(\frac{\partial \Phi^1}{\partial n} \Phi^2 - \frac{\partial \Phi^2}{\partial n} \Phi^1 \right) d\sigma$$

Осуществляя интегрирование по частям и переходя к пределу при $\delta \rightarrow \infty$, получим соотношение

$$(2.3) \quad \int_{-1}^0 u^1 L u^2 dx = \int_{-1}^0 u^2 L u^1 dx$$

Аналогично докажем положительность оператора L . Положим в формуле (2.2) $u^1 \equiv u^2$ и $\Phi^1 \equiv \Phi^2$. Применяя вторую формулу Грина, получим

$$(2.4) \quad \int_{-1}^0 u^1 L u^1 dx = \int_{V_\delta} (\nabla \Phi^1)^2 d\tau + \int_{\Sigma_\delta} \frac{\partial \Phi^1}{\partial n} \Phi^1 d\sigma$$

Область V_δ ограничена поверхностью S_δ . Устремляя теперь в соотношении (2.4) величину δ к бесконечности, приходим к неравенству

$$(2.5) \quad \int_{-1}^0 u^1 L u^1 dx = \int_V (\nabla \Phi^1)^2 d\tau > 0$$

Второй интеграл в (2.5) берется по области V , представляющей собой внешность полубесконечного разреза $-1 < x, y = 0$.

Положительность и самосопряженность оператора левой части уравнения (1.9) известна и поэтому краевая задача на собственные значения (1.9), (1.10) является самосопряженной и положительно-определенной, откуда, в частности, следует действительность и положительность собственных чисел.

3. Определение реакции жидкости и вывод интегро-дифференциального уравнения прогибов пластинки. Влияние жидкости на изгиб пластинки учитывается выражением, записанным в правой части уравнения (1.9). Для определения производной потенциала $(\Phi_x)^-$ рассмотрим внешнюю гидродинамическую задачу (1.10). Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$(3.1) \quad W = \Phi + i\Psi$$

от аргумента $z = x + iy$ (i — мнимая единица). Функция W предполагается аналитической в плоскости с полубесконечным разрезом $-1 \leq x, y = 0$. Для производной функции $W(z)$ имеем выражение $W' = \Phi_x + i\Psi_x$. На основании уравнений Коши — Римана и граничных условий получим

$$(3.2) \quad (\Psi_x)^- = -(\Phi_y)^- = -g(x), \quad g = \begin{cases} u_x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Из первого граничного условия в (1.10) и соотношений (3.2) вытекает, что при $-1 \leq x$

$$(3.3) \quad \operatorname{Re} (W')^+ = 0, \quad \operatorname{Im} (W')^- = -ig$$

Таким образом, для отыскания производной W' аналитической функции W из (3.1) получаем смешанную краевую задачу (3.3). Решение этой задачи было получено Д. И. Шерманом и имеет вид

$$(3.4) \quad W' = -\frac{1}{2\pi i (z+1)^{1/4}} \int_{-1}^0 \frac{(t+1)^{1/4} u_t dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i (z+1)^{3/4}} \int_{-1}^0 \frac{(t+1)^{3/4} u_t dt}{t-z}$$

Переходя в выражениях, записанных в правой части (3.4), к пределу $z = x + iy \rightarrow x - i0$ ($0 > y$) и используя формулы Сохоцкого — Племеля, получаем

$$(3.5) \quad (\Phi_x)^- = \frac{1}{2\pi (1+x)^{1/4}} \int_{-1}^0 \frac{(1+t)^{1/4} u_t dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi (1+x)^{3/4}} \int_{-1}^0 \frac{(1+t)^{3/4} u_t dt}{t-x}$$

Интегралы в (3.5) понимаются в смысле главного значения по Коши. В дальнейшем будем пользоваться также следующим представлением для

искомой величины:

$$(3.6) \quad (\Phi_x)^- = - \int_{-1}^0 K(t, x) u_t dt$$

$$K(t, x) \equiv \frac{1}{2\pi(t-x)} \left[\left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1/4} + \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{3/4} \right]$$

Найденное выражение для реакции жидкости подставим в уравнение равновесия (1.9). Получим однородное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее распределение прогибов пластинки

$$(3.7) \quad (h^m u_{xxx})_{xxx} = \lambda \int_{-1}^0 K(t, x) u_t dt$$

Решение краевой задачи для уравнения (3.7) с условиями из (1.9) разыскивалось численно при постоянном распределении толщин пластинки ($h = 1$) с использованием метода, изложенного в [3]. Найденное в результате расчетов первое собственное значение равно $\lambda = 5.132$. Соответствующее распределение прогибов показано на фиг. 2 сплошной линией.

Рассмотрим в качестве иллюстрации стальную пластинку шириной в 1 м, толщиной в 1 см. Критическая скорость движения этой пластинки в воде равна

$$v_\infty = \sqrt{\lambda E S^3 / 12 \rho l^6} \simeq 10 \text{ м/с}$$

Ниже рассмотрим пластинки переменной толщины и определим распределение толщин, для которого величина первого собственного значения достигает максимума.

4. Задача оптимизации. Учитывая, что краевая задача (3.7) с условиями из (1.9) положительно-определенная и самосопряженная, для определения первого собственного значения λ применим вариационный принцип Релея [3]

$$(4.1) \quad \lambda = \min_u J(h, u)$$

$$J(h, u) = \left(\int_{-1}^0 h^m u_{xxx}^2 dx \right) / \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 K(t, x) u(x) u_t(t) dt dx$$

Здесь минимум ищется на классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям в (1.9), выставленным при $x = 0$. Два других граничных условия в (1.9) являются естественными для функционала J и удовлетворяются автоматически.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации: среди всех непрерывных функций $h(x)$, удовлетворяющих изопериметрическому условию постоянства поперечного сечения пластинки

$$(4.2) \quad \int_{-1}^0 h(x) dx = 1$$

требуется найти такую, которая максимизирует первое собственное значение λ , т. е.

$$(4.3) \quad \lambda^* = \max_h \min_u J(h, u)$$

Необходимое условие оптимальности имеет вид

$$(4.4) \quad h^{m-1} u_{xx}^2 = c^2$$

где c — постоянный множитель Лагранжа, отвечающий изопериметрическому условию (4.2).

В случае линейной зависимости ($m = 1$) изгибной жесткости D от толщины h условие (4.4) от функции h явно не зависит. Это позволяет решить задачу оптимизации (4.3) аналитически. Действительно, из уравнения (4.4) с граничными условиями (1.9) при $x = 0$ находим распределение прогибов $u^*(x)$ оптимальной пластинки

$$(4.5) \quad u^* = cx^2 / 2$$

Уравнение (3.7) и граничные условия (1.9), выставленные при $x = -1$, с учетом найденного выражения (4.5) для u^* приводят к следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$(4.6) \quad h_{xxx}^* = \lambda^* \int_{-1}^0 K(t, x) t dt, \quad h^*(-1) = h_x^*(-1) = 0$$

Оптимальное распределение толщин, получаемое интегрированием из (4.6), имеет вид

$$(4.7) \quad h^* = \lambda^* \int_x^0 \int_{-1}^0 (x - \eta) K(t, \eta) dt d\eta$$

Собственное значение λ^* определим, используя изопериметрическое условие (4.2)

$$(4.8) \quad \lambda^* = \left(\int_{-1}^0 \int_x^0 \int_{-1}^0 (x - \eta) K(t, \eta) t dt d\eta dx \right)^{-1} = 7.567$$

Выигрыш от оптимизации по сравнению с пластинкой постоянной толщины составляет 47.4%. Оптимальное распределение толщин $h^*(x)$ показано на фиг. 2 штриховой линией.

Докажем, что условие (4.4) в случае $m = 1$ является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Для этого оценим разность $\lambda^* - \lambda$, где λ^* , u^* , h^* — решение краевой задачи (3.7), (1.9), (4.4), а λ и u — собственное значение и собственная функция задачи (3.7), (1.9), отвечающие некоторому произвольному распределению толщин $h(x)$. Предположим также, что h^* и h удовлетворяют изопериметрическому условию (4.2). Имеем

$$\begin{aligned} \lambda^* - \lambda &= \min_u J(h^*, u) - \min_u J(h, u) \geq J(h^*, u^*) - J(h, u^*) = \\ &= \frac{1}{\chi} \int_{-1}^0 (h^* - h) (u_{xx}^*)^2 dx, \quad \chi = \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 K(t, x) u_t^*(t) u^*(x) dx dt \end{aligned}$$

Но в силу условия оптимальности (4.4) $(u_{xx}^*)^2 = c^2$, поэтому

$$(4.9) \quad \lambda^* - \lambda \geq \frac{c^2}{\chi} \int_{-1}^0 (h^* - h) dx$$

Функции h^* и h удовлетворяют изопериметрическому условию (4.2), поэтому правая часть неравенства (4.9) равна нулю. Таким образом, $\lambda^* \geq \lambda$ и при $m = 1$ условие (4.4) является достаточным условием глобального оптимума, а формулы (4.7), (4.8) дают единственное решение оптимальной задачи.

Поступила 23 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В., Миронов А. А. Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
2. Баничук Н. В., Миронов А. А. Задачи оптимизации для пластин, колеблющихся в идеальной жидкости. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.