Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 62—50

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Г. Е. Колосов

(Москва)

Рассматриваются задачи оптимального управления динамическими системами при случайных возмущениях. Качество управления оценивается по величине среднего значения функционала от траекторий движения системы. Синтез оптимальных управлений осуществляется путем решения полулинейного уравнения с частными производными параболического типа (уравнения Беллмана). Предлагается способ решения этого уравнения (и задачи синтеза), основанный на расчете последовательных приближений. Показано, что построенные таким образом субоптимальные системы асимптотически совпадают с оптимальной. Предложенный метод можно использовать для решения задачи синтеза в системах с ограниченными управляющими силами. Эффективность метода иллюстрируется примером.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать динамические системы, поведение которых можно описать векторно-матричным дифференциальным уравнением вида

$$x^{\bullet} = \bar{b}(x, t) + \bar{c}(t)\, u(t) + \bar{a}(x, t)\, \xi(t), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

Здесь x — вектор фазовых координат системы, u — m-мерный вектор управлений, $\xi(t)$ — n-мерный вектор случайных воздействий типа белого шума с независимыми компонентами, нулевыми средним значением и единичной интенсивностью, $\bar{b}(x, t)$ — вектор-функция фазовых координат и времени t, $\bar{c}(t)$ и $\bar{a}(x, t)$ — $(n \times m)$ и $(n \times n)$ — матрицы, элементы которых зависят от t и (x, t) соответственно. Ниже подробно формулируются требования, предъявляемые к функциям $\bar{b}(x, t)$, $\bar{c}(t)$, $\bar{a}(x, t)$. Здесь отметим лишь, что эти функции всегда предполагаются такими, чтобы для стохастического уравнения (1.1) существовало единственное решение $x(t)$ при $t \geqslant t_0$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, понимаемое хотя бы в слабом смысле (см. [1], стр. 14).

Задача заключается в нахождении такой вектор-функции управляющих воздействий u со значениями из некоторой замкнутой ограниченной области U, которая обеспечивала бы минимум некоторого показателя качества работы системы (критерия оптимальности), который возьмем в виде

$$I[u(t)] = M\left\{\int_0^T \omega_1(x(t), u(t))\, dt + \psi(x(T))\right\} \tag{1.2}$$

Здесь M означает математическое ожидание, $[0, T]$ — отрезок времени t, на котором рассматривается работа системы, ω_1 и ψ — скалярные функции штрафа, конкретный вид которых определяется характером решаемой задачи (требования, предъявляемые к ω_1 и ψ, см. ниже). Искомая вектор-функция u^*, минимизирующая (1.2), должна в каждый момент времени t выражаться через текущие значения вектора фазовых координат и время t, т. е. $u^* = u^*(t, x(t))$ (задача синтеза).

В соответствии с методом динамического программирования [2] решение поставленной задачи эквивалентно решению уравнения Беллмана, которое для системы (1.1) и критерия (1.2) имеет вид [3]

$$(1.3)\qquad -\frac{\partial F}{\partial t} = \bar b^T(x, t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}Tr\left[\bar a(x, t)\bar a^T(x, t)\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial x^T}\right] + \min_{u\in U}\left[\omega_1(x, u) + u^T\bar c^T(t)\frac{\partial F}{\partial x}\right]$$

При записи (1.3) предполагается, что все стохастические интегралы понимаются в смысле Ито, оператор $\partial / \partial x$ — вектор-столбец с компонентами $(\partial / \partial x_1, \ldots, \partial / \partial x_n)$, индекс ^{T} означает транспонирование. Функция F (называемая в дальнейшем функцией потерь) характеризует качество работы оптимальной системы и по определению равна

$$(1.4)\qquad F(x, t) = \min_{\substack{u(s)\in U\\ s\geqslant t}} M\left\{\left[\int_t^T \omega_1(x(s), u(s))\,ds + \psi(x(T))\right] \Big| \, x(t) = x\right\}$$

Здесь $M\{(\cdot) \mid x(t) = x\}$ означает усреднение $(\cdot)$ по всевозможным реализациям управляемого случайного процесса $x(s)$ $(s \geqslant t)$, исходящим из точки x при $s = t$. Из (1.4) следует, что

$$(1.5)\qquad F(x, T) = \psi(x).$$

Изменяя направление отсчета времени путем замены $\tau = T - t$, уравнение (1.3) и условие (1.5) для функции $F(x, \tau)$ преобразуем к виду

$$(1.6)\qquad LF = -\min_{u\in U}\left[\omega_1(x, u) + u^Tc^T\frac{\partial F}{\partial x}\right]$$

$$L = -\frac{\partial}{\partial\tau} + b_i(x, \tau)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_{ij}(x, \tau)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

$$b_i(x, \tau) = \bar b_i(x, T - \tau), \quad c(\tau) = \bar c(T - \tau)$$

$$(1.7)\qquad F(x, 0) = \psi(x)$$

Здесь $a_{ij}(x, \tau)$ — общий элемент матрицы $^1/_2\,\bar a(x, T - \tau)\cdot\bar a^T(x, T - \tau)$; предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n.

Считая величину $\partial F / \partial x$ известной и выполняя минимизацию в (1.6), имеем

$$(1.8)\qquad LF = \Phi_1(x, \tau, \partial F / \partial x)$$

Получаемая при этом функция

$$(1.9)\qquad u^* = \varphi(x, \tau, \partial F / \partial x)$$

удовлетворяющая условию

$$-\min_{u\in U}\left[\omega_1(x,u)+u^Tc^T\frac{\partial F}{\partial x}\right]=-\omega_1(x,\varphi)-\varphi^Tc^T\frac{\partial F}{\partial x}=$$
$$=\Phi_1\left(x,\tau,\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

решает задачу синтеза (после решения уравнения (1.8)). Вид функций Φ и φ зависит от ω_1 и области U.

Пример 1. Пусть $\omega_1(x,u)=\omega(x)+u^TBu$, где B — положительно-определенная $(m\times m)$ матрица при любых $x\in E_n$, $\tau\in[0, T]$. Управления u не ограничены $(U=E_m)$. Тогда (B^{-1} — матрица, обратная B)

$$\varphi=-\frac{1}{2}B^{-1}c^T\frac{\partial F}{\partial x},\qquad \Phi_1=-\omega(x)+\frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial x^T}cB^{-1}c^T\frac{\partial F}{\partial x}$$

Пример 2. Пусть $\omega_1(x,u)=\omega(x)$, U — m-мерный параллелепипед: $|u_i|\leqslant u_{0i}$, $i=1,\ldots,m$. В этом случае [4]

$$\varphi=-\{u_{01},\ldots,u_{0m}\}\,\mathrm{sign}\left(c^T\frac{\partial F}{\partial x}\right),\qquad \Phi_1=-\omega(x)+u_0^T\left|c^T\frac{\partial F}{\partial x}\right|$$

где $\mathrm{sign}\,A$ и $|A|$ — матрицы, образованные из A заменой a_{ij} на $\mathrm{sign}\,a_{ij}$ и $|a_{ij}|$, $\{u_{01},\ldots,u_{0m}\}$ — диагональная матрица.

Пример 3. Пусть $\omega_1(x,u)=\omega(x)$, U — m-мерная сфера радиуса R Тогда

$$\varphi=-Rc^T\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x^T}cc^T\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1/2},\qquad \Phi=-\omega(x)+R\left(\frac{\partial F}{\partial x^T}cc^T\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{1/2}$$

2. Последовательные приближения. Если матрица $\bar{a}(x,t)$ в (1.1) невырождена при любых $(x,t)\in E_n\times[0, T]$, то уравнение Беллмана (1.8) является полулинейным неоднородным уравнением параболического типа. Перепишем его в форме

(2.1) $\qquad LF=-\omega(x)+\Phi(x,\tau,\partial F/\partial x),\quad F(x,0)=\psi(x)$

Будем искать решение методом последовательных приближений (метод Пикара, см. [5], стр. 165), которые находятся рекуррентным образом по следующей схеме:

(2.2) $\qquad LF_0=\omega(x),\quad F_0(x,0)=\psi(x)$

(2.3) $\qquad LF_{N+1}=-\omega(x)+\Phi(x,\tau,\partial F_N/\partial x),\quad F_{N+1}(x,0)=\psi(x)$

$\qquad N=0,1,\ldots$

При этом одновременно с функциями F_0, F_1, ... получаем функции

(2.4) $\qquad u_N(x,\tau)=\varphi(x,\tau,\partial F_N/\partial x),\quad N=0,1,2,\ldots$

которые позволяют синтезировать системы, близкие к оптимальным.

Такой метод приближенного синтеза уже неоднократно использовался, начиная с работ [6,7]. В [7] рассматривались задачи управления малыми по величине силами. Такие системы были затем названы слабоуправляемыми [8]. В этом случае нелинейное слагаемое в уравнении Беллмана содержит малый параметр $\Phi=\varepsilon\bar{\Phi}$, что позволяет для синтеза ограничиться приближениями невысокого порядка. Оценки погрешности метода имеются в [9].

Цель данной работы — установление условий сходимости процедуры (2.3), когда нелинейное слагаемое Φ не является малым. В этом случае субоптимальная система, синтезируемая на основе (2.4), может оказаться близкой к оптимальной лишь при больших N, и поэтому возникает необходимость в исследовании асимптотического поведения $F_N(x, \tau)$ и $u_N(x, \tau)$ при $N \to \infty$. В [6] такое исследование проводилось для ограниченного фазового пространства на основе принципа максимума для решений параболических уравнений с ограниченной нормой. Ниже используются оценки фундаментального решения в неограниченных областях, позволяющие установить сходимость процедуры (2.3) при $N \to \infty$ для неограниченно нарастающих при $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} \to \infty$ решений $F(x, \tau)$.

3. Исследование сходимости. Рассмотрим уравнение (2.1), в котором оператор L определяется в (1.6). Его решение $F(x, \tau)$ и коэффициенты $a_{ij}(x, \tau)$, $b_i(x, \tau)$ оператора L определены в области $\Omega = E_n \times [0, T] \equiv \{(x, \tau);\ x \in E_n,\ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$. Будем считать, что всюду в Ω матрица $\| a_{ij}(x, \tau) \|$ удовлетворяет условию равномерной параболичности L, т. е. всюду в Ω для любого вещественного вектора χ

$$(3.1) \qquad \lambda |\chi|^2 \leqslant \chi^T a(x, \tau) \chi \leqslant \bar{\lambda} |\chi|^2$$

где λ, $\bar{\lambda}$ — некоторые положительные постоянные. Предположим, кроме того, что $a_{ij}(x, \tau)$, $b_i(x, \tau)$ — ограниченные в Ω функции, удовлетворяющие всюду в Ω условиям

$$(3.2) \qquad |a_{ij}(x, \tau) - a_{ij}(x^\circ, \tau)| \leqslant A |x - x^\circ|^\alpha$$

$$|b_i(x, \tau) - b_i(x^\circ, \tau)| \leqslant A |x - x^\circ|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad A = \text{const}$$

Функции ω, ψ, Φ считаются непрерывными в Ω, причем ω и ψ удовлетворяют ограничению на рост при $|x| \to \infty$

$$(3.3) \qquad |\omega(x)| \leqslant K_1 e^{h|x|}, \qquad |\psi(x)| \leqslant K_1 e^{h|x|}$$

(h — некоторая положительная постоянная), а функция $\Phi(x, \tau, v)$ — условию Липшица по переменной $v = (v_1, \ldots, v_n)$ равномерно по $(x, \tau) \in \Omega$, $v \in E_n$

$$(3.4) \qquad |\Phi(x, \tau, v) - \Phi(x, \tau, v^0)| \leqslant K_2 |v - v^0|, \quad \Phi(x, \tau, 0) = 0$$

(условию (3.4) удовлетворяют, в частности, функции Φ из примеров 2 и 3, если коэффициенты матрицы c ограничены в Ω).

Известны [10] следующие три результата, вытекающие из сделанных предположений.

1) Существует единственное фундаментальное решение $G(x, \tau; \eta, \sigma)$ линейных уравнений (2.2), (2.3). Оно определено для всех $(x, \tau) \in \Omega$, $(\eta, \sigma) \in \Omega$ $(\tau > \sigma)$, удовлетворяет однородному уравнению $LG = 0$ (по переменным (x, τ)) и обладает свойством

$$(3.5) \qquad \lim_{\sigma \to \tau - 0} \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma) f(\eta)\, d\eta = f(x)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$, имеющей мажоранту (здесь λ из (3.1))

$$(3.6) \qquad |f(x)| \leqslant \text{const} \cdot \exp(\bar{h} |x|^2), \quad \bar{h} < \frac{\lambda}{4T}$$

2) Решения неоднородных уравнений (2.2), (2.3) выражаются через $G(x, \tau; \eta, \sigma)$

$$(3.7) \qquad F_0(x, \tau) = \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, 0)\psi(\eta)\,d\eta + \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma)\,\omega(\eta)\,d\eta$$

$$(3.8) \qquad F_N(x, \tau) = \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, 0)\psi(\eta)\,d\eta + \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma) \times$$
$$\times \left[\omega(\eta) - \Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_{N-1}}{\partial \eta}\right)\right] d\eta$$

(при этом формула (3.7) безусловно справедлива в силу (3.3), (3.8) верна лишь при условии, что для производных $\partial F_N / \partial x_i$ выполняются неравенства типа (3.3) (или хотя бы 3.6)), что, как показано ниже, имеет место). Решения F_N ($N = 0,1, \ldots$) дважды непрерывно дифференцируемы по переменным x и производные $\partial F_N / \partial x_i$, $\partial^2 F_N / \partial x_i \partial x_j$ можно вычислять дифференцированием правых частей (3.7), (3.8) под знаком интеграла.

3) Справедливы следующие неравенства (при любом $\lambda < \boldsymbol{\lambda}$ из (3.1)):

$$(3.9) \qquad |G(x, \tau; \eta, \sigma)| \leqslant K_3 (\tau - \sigma)^{-n/2} \exp\left[-\frac{\lambda |x - \eta|^2}{4(\tau - \sigma)}\right]$$

$$(3.10) \qquad \left|\frac{\partial G(x, \tau; \eta, \sigma)}{\partial x_i}\right| \leqslant K_3 (\tau - \sigma)^{-(n+1)/2} \exp\left[-\frac{\lambda |x - \eta|^2}{4(\tau - \sigma)}\right]$$

Результаты 1) — 3) справедливы для линейных уравнений последовательных приближений (2.2), (2.3). Обращаясь теперь к исходному нелинейному уравнению Беллмана (2.1) и проблеме синтеза, рассмотрим два этапа решения общей задачи. Сначала с помощью мажорантных оценок (3.9), (3.10) для фундаментального решения докажем сходимость определяемых из (2.2), (2.3) последовательных приближений $F_N(x, \tau)$ при $N \to \infty$ к решению уравнения Беллмана (2.1) (при этом одновременно доказывается существование и единственность решения (2.1)). После этого покажем, что субоптимальные системы, построенные в соответствии с законами управления (2.4), асимптотически при $N \to \infty$ эквивалентны оптимальной системе.

1°. Докажем, прежде всего, равномерную сходимость последовательности функций $F_0(x, \tau)$, $F_1(x, \tau)$, . . ., определяемых по рекуррентным формулам (3.7), (3.8), а также их частных производных $\partial F_N(x, \tau) / \partial x_i$ ($N = 0,1,2, \ldots$).

Для этого образуем разности

$$(3.11) \qquad Q_N = F_{N+1}(x, \tau) - F_N(x, \tau) = \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma) \times$$
$$\times \left[\Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_{N-1}}{\partial \eta}\right) - \Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_N}{\partial \eta}\right)\right] d\eta$$

$$(3.12) \qquad \frac{\partial Q_N}{\partial x_i} = \frac{\partial F_{N+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial F_N}{\partial x_i} = \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} \frac{\partial G(x, \tau; \eta, \sigma)}{\partial x_i} \times$$
$$\times \left[\Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_{N-1}}{\partial \eta}\right) - \Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_N}{\partial \eta}\right)\right] d\eta$$

(в последних формулах можно считать, что $N=0, 1, 2, \ldots$, если условиться, что $\partial F_{-1} / \partial x_i = 0$). Используя (3.4), для (3.11), (3.12) имеем неравенства

$$|Q_N(x,\tau)| \leqslant K_2 \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} |G(x,\tau;\eta,\sigma)| \left| \frac{\partial Q_{N-1}(\eta,\sigma)}{\partial \eta} \right| d\eta \tag{3.13}$$

$$\left| \frac{\partial Q_N(x,\tau)}{\partial x_i} \right| \leqslant K_2 \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} \left| \frac{\partial G(x,\tau;\eta,\sigma)}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial Q_{N-1}(\eta,\sigma)}{\partial \eta} \right| d\eta \tag{3.14}$$

Формулы (3.13), (3.14) и (3.9), (3.10) позволяют находить оценки для разностей (3.11), (3.12) рекуррентным образом. Для этого необходимо лишь оценить $|\partial F_0 / \partial x_i|$. Здесь справедлива оценка типа (3.3), т. е.

$$\left| \frac{\partial Q_0}{\partial x_i} \right| \leqslant K e^{h|x|} \tag{3.15}$$

Действительно, поскольку при $\lambda > 0$

$$t^{-n/2} \int_{E_n} \exp\left[-\frac{\lambda}{t}\eta^2 + h|\eta| \right] d\eta \leqslant K_4 \tag{3.16}$$

для производной $\partial F_0 / \partial x_i$ получаем с учетом (3.3), (3.7), (3.9), (3.10)

$$\left| \frac{\partial F_0}{\partial x_i} \right| \leqslant K_1 K_3 \left\{ \int_{E_n} \tau^{-(n+1)/2} \exp\left[-\frac{\lambda}{\tau} |x-\eta|^2 + h|\eta| \right] d\eta + \right. \tag{3.17}$$

$$\left. + \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} (\tau-\sigma)^{-(n+1)/2} \exp\left[-\frac{\lambda |x-\eta|^2}{\tau-\sigma} + h|\eta| \right] d\eta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K_1 K_3 K_4 (\tau^{-1/2} + 2\tau^{1/2}) e^{h|x|}$$

Действуя аналогично и принимая во внимание неравенство

$$\left| \frac{\partial F_0}{\partial \eta} \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F_0}{\partial \eta_i} \right|$$

и (3.4), из (3.12), (3.17) получаем

$$\left| \frac{\partial Q_0}{\partial x_i} \right| \leqslant n K_1 K_2 K_3^2 K_4 \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} (\tau-\sigma)^{-(n+1)/2} (\sigma^{-1/2} + 2\sigma^{1/2}) \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{\lambda |x-\eta|^2}{\tau-\sigma} + h|\eta| \right] d\eta \leqslant n K_1 K_2 K_3^2 K_4^2 e^{h|x|} (1+\tau)\pi$$

откуда в силу ограниченности τ приходим к (3.15).

Используя (3.15) и многократно применяя формулы (3.13), (3.14), можно получить следующие оценки разностей (3.11), (3.12) для произвольного номера $N \geqslant 1$ ($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция):

$$|Q_N(x,\tau)| \leqslant \frac{K}{\sqrt{\pi}} \frac{\overline{K}^N \tau^{(N+1)/2}}{\Gamma((N+1)/2+1)} e^{h|x|}, \quad \overline{K} = \sqrt{\pi}\, n K_2 K_3 K_4 \tag{3.18}$$

$$\left| \frac{\partial Q_N(x,\tau)}{\partial x_i} \right| \leqslant K \frac{\overline{K}^N \tau^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)} e^{h|x|} \tag{3.19}$$

Формулы (3.18), (3.19) доказываются методом индукции по N.

Полученные оценки показывают, что последовательности функций

(3.20) $\quad F_N(x, \tau) = F_0(x, \tau) + Q_0(x, \tau) + \ldots + Q_{N-1}(x, \tau)$

(3.21) $\quad \partial F_N(x, \tau) / \partial x_i = \partial F_0(x, \tau) / \partial x_i + \partial Q_0(x, \tau) / \partial x_i + \ldots$

$\ldots + \partial Q_{N-1}(x, \tau) / \partial x_i$

сходятся к некоторым предельным функциям

$$F(x, \tau) = \lim_{N\to\infty} F_N(x, \tau), \quad W_i(x, \tau) = \lim_{N\to\infty} \partial F_N(x, \tau) / \partial x_i$$

При этом для частичных сумм ряда в правой части (3.20) имеет место равномерная сходимость в любой ограниченной области из Ω, а в (3.21) равномерно сходятся лишь суммы слагаемых, начиная со второго. Первое же слагаемое в соответствии с (3.17) мажорируется функцией, имеющей особенность при $\tau = 0$. Однако нетрудно заметить, что эта особенность интегрируема, и поэтому можно перейти к пределу в (3.8) и формуле, получаемой дифференцированием (3.8) по x_i. В результате получаем

$$F(x, \tau) = \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, 0)\psi(\eta)\,d\eta + \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma) \times$$
$$\times [\omega(\eta) - \Phi(\eta, \sigma, W(\eta, \sigma))]\,d\eta$$

$$W_i(x, \tau) = \int_{E_n} \frac{\partial G}{\partial x_i}\psi(\eta)\,d\eta + \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} \frac{\partial G}{\partial x_i}[\omega(\eta) - \Phi(\eta, \sigma, W(\eta, \sigma))]\,d\eta$$

откуда следует, что $W_i(x, \tau) = \partial F(x, \tau) / \partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и, следовательно, предельная функция $F(x, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, \tau) = \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, 0)\psi(\eta)\,d\eta + \tag{3.22}$$
$$+ \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma)\left[\omega(\eta) - \Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F(\eta, \sigma)}{\partial \eta}\right)\right] d\eta$$

которое эквивалентно исходному уравнению Беллмана (2.1), что легко проверяется дифференцированием с использованием (3.5).

Таким образом, доказано существование решения уравнения (2.1). Из приведенного доказательства следует, что решение $F(x, \tau)$ и его производные $\partial F / \partial x_i$ всюду в Ω имеют мажоранты

$$|F(x, \tau)| \leqslant K_5 e^{h|x|}, \quad \left|\frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant K_5 \tau^{-1/2} e^{h|x|} \tag{3.23}$$

Используя (3.23), можно доказать единственность решения (2.1).

Действительно, допуская существование двух решений F_1 и F_2 уравнения (2.1) (или 3.23), получаем для разности $V = F_1 - F_2$ уравнение

$$V(x, \tau) = \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G(x, \tau; \eta, \sigma)\left[\Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\right) - \Phi\left(\eta, \sigma, \frac{\partial F_2}{\partial \eta}\right)\right] d\eta$$

которое с учетом (3.4) позволяет записать

$$|V(x,\tau)| \leqslant K_2 \int_0^\tau d\sigma \int_{E_n} G'(x,\tau;\eta,\sigma) \left| \frac{\partial V(\eta,\sigma)}{\partial\eta} \right| d\eta$$

откуда путем рассуждений, аналогичных приведенным выше для функций F_N, нетрудно получить для разности $V = F_1 - F_2$ следующую оценку:

$$|V(x,\tau)| \leqslant K_5 \bar{K}^N \pi^{-1/2} e^{h|x|} \frac{\tau^{N/2}}{\Gamma(N/2+1)}$$

справедливую для любых N. Отсюда следует, что $V(x,\tau) \equiv 0$, т. е. $F_1(x,\tau) = F_2(x,\tau)$.

Таким образом доказано, что последовательные приближения $F_0(x,\tau)$, $F_1(x,\tau)$, . . ., определяемые по рекуррентным формулам (2.2), (2.3), асимптотически при $N \to \infty$ сходятся к решению уравнения Беллмана (2.1), которое существует и единственно.

2°. Обратимся к проблеме синтеза. Выше было предложено для синтеза системы управления использовать функции $u_N(x,\tau)$, определяемые по (2.4). Обозначим через $H_N(x,\tau)$ функционал (1.2), вычисляемый на траекториях системы (1.1), проходящих в момент $t = T - \tau$ через точку x при управлении $u = u_N$ (подразумевается, что нижний предел интеграла в правой части (1.2) равен t). Функция $H_N(x,\tau)$ определяет «качество» управления $u_N(x,\tau)$. Она удовлетворяет линейному уравнению

$$LH_N = -\omega(x) - u_N^T c^T \partial H_N / \partial x, \quad H_N(x,0) = \psi(x) \tag{3.24}$$

Из (2.3), (3.24) с учетом равенства $-u_N^T c^T \, \partial F_N / \partial x = \Phi(x,\tau,\partial F_N/\partial x)$ следует, что разность $\Delta_N(x,\tau) = F_N(x,\tau) - H_N(x,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} L_N\Delta_N \equiv L\Delta_N + u_N^T c^T \partial\Delta_N / \partial x = \Phi(x,\tau,\partial F_{N-1}/\partial x) - \\ - \Phi(x,\tau,\partial F_N/\partial x) \quad \Delta_N(x,0) = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Поскольку правая часть (3.25) при больших N является малой величиной (см. (3.4), (3.19))

$$\begin{aligned} &\left| \Phi\left(x,\tau,\frac{\partial F_N}{\partial x}\right) - \Phi\left(x,\tau,\frac{\partial F_{N-1}}{\partial x}\right) \right| \leqslant \varepsilon_N' e^{h|x|} \\ &\varepsilon_N' = \frac{nKK_2K^{N-1}T^{(N-1)/2}}{\Gamma((N+1)/2)} \end{aligned} \tag{3.26}$$

а начальные условия — нулевые, то можно ожидать, что разность $\Delta_N(x,\tau)$, как решение уравнения (3.25) будет того же порядка, т. е.

$$|\Delta_N(x,\tau)| \leqslant \varepsilon_N' K_6' e^{h|x|} \tag{3.27}$$

В случае, когда (как в примере 3) функции $u_N(x,\tau)$ ограниченные и обладают гладкостью, обеспечивающей непрерывность по Гельдеру коэффициентов оператора L_N, оператор L_N такой же, как и L, и неравенство (3.27) является элементарным следствием формул (3.7), (3.9), (3.26). Если же $u_N(x,\tau)$ — разрывные функции (но без сингулярностей — например, такие, как в примере 2), то неравенство (3.27) вытекает из теоремы 2 в [11].

Из сходимости ряда (3.20) следует, что $|F(x,\tau) - F_N(x,\tau)| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon_N'' K_6'' e^{h|x|}$ ($\varepsilon_N'' \to 0$ при $N \to \infty$), откуда с учетом неравенства $|F -$

$-H_N| \leqslant |F - F_N| + |F_N - H_N|$ получаем окончательно

(3.28) $$|F(x, \tau) - H_N(x, \tau)| \leqslant \varepsilon_N K_6 e^{h|x|}$$

$$(\varepsilon_N = \max(\varepsilon'_N, \varepsilon''_N),\ K_6 = \max(K'_6, K''_6))$$

Формула (3.28) доказывает асимптотическую (при $N \to \infty$) оптимальность субоптимальных систем, построенных с использованием законов управления $u_N(x, \tau)$, вычисляемых по рекуррентным формулам (2.2) — (2.4).

Замечание 1. Если коэффициенты оператора L не ограничены в Ω, то оценки (3.9), (3.10), вообще говоря, неверны. Может оказаться, однако, что и в этом случае задача допускает редукцию к рассмотренному выше случаю путем некоторой замены переменных. Если, например, коэффициенты $\bar{b}_i(x, t)$ в (1.1) зависят от x линейным образом (т. е. вектор $\bar{b}(x, t) = B(t)x$, где $B(t)$ — $(n \times n)$-матрица, зависящая лишь от t, то замена переменных $y = Z^{-1}(t, t_0)x$ ($Z(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы $x^\cdot = B(t)x$), устраняет неограниченные коэффициенты в операторе L (в новых переменных y), что позволяет исследовать такие системы методами п. 3.

Замечание 2. Условие равномерной непрерывности по Липшицу (3.4), использованное в выкладках п. 3, не выполняется для функции $\Phi(x, \tau, \partial F / \partial x)$ из примера 1 (где вместо (3.4) имеем

$$|\Phi(x, \tau, v) - \Phi(x, \tau, v^\circ)| \leqslant K|v - v^\circ|^2)$$

Можно показать, что в этом случае приведенная в п. 3 схема рассуждений не нарушается, если ограничения (3.9) на рост функций ω и ψ заменить требованием $|\omega \cdot (x)|, |\psi(x)| \leqslant K_0 + K_1|x|^l$.

Пример 4. Эффективность предлагаемого метода проиллюстрируем на примере одномерной задачи управления, для которой известно точное решение. Пусть управляемая система описывается скалярным уравнением

$$x^\cdot = u + \xi(t),\ M\xi(t)\xi(t - \tau) = a\delta(\tau),\ u \in [\alpha, \beta]$$

($\delta(\tau)$ — дельта-функция, точка $u = 0$ находится внутри отрезка $[\alpha, \beta]$). В этом случае уравнение Беллмана (1.3) имеет вид ($\psi(x) = 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \omega(x) + \min_{u \in [\alpha, \beta]} \left[u \frac{\partial F}{\partial x}\right] + \frac{a}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F(x, 0) = 0$$

Его решение приведено в [12]. Здесь ограничимся рассмотрением симметричной задачи, когда $\omega(x)$ — четная функция, имеющая минимум при $x = 0$; $u = 0$ — средняя точка отрезка $[\alpha, \beta]$, т. е. $\alpha = -u_0$, $\beta = u_0$. В этом случае оптимальное управление $u^* = -u_0 \operatorname{sign} x$, решение уравнения Беллмана $F(x, \tau)$ является четной функцией x и для $x \geqslant 0$ определяется формулой [12]

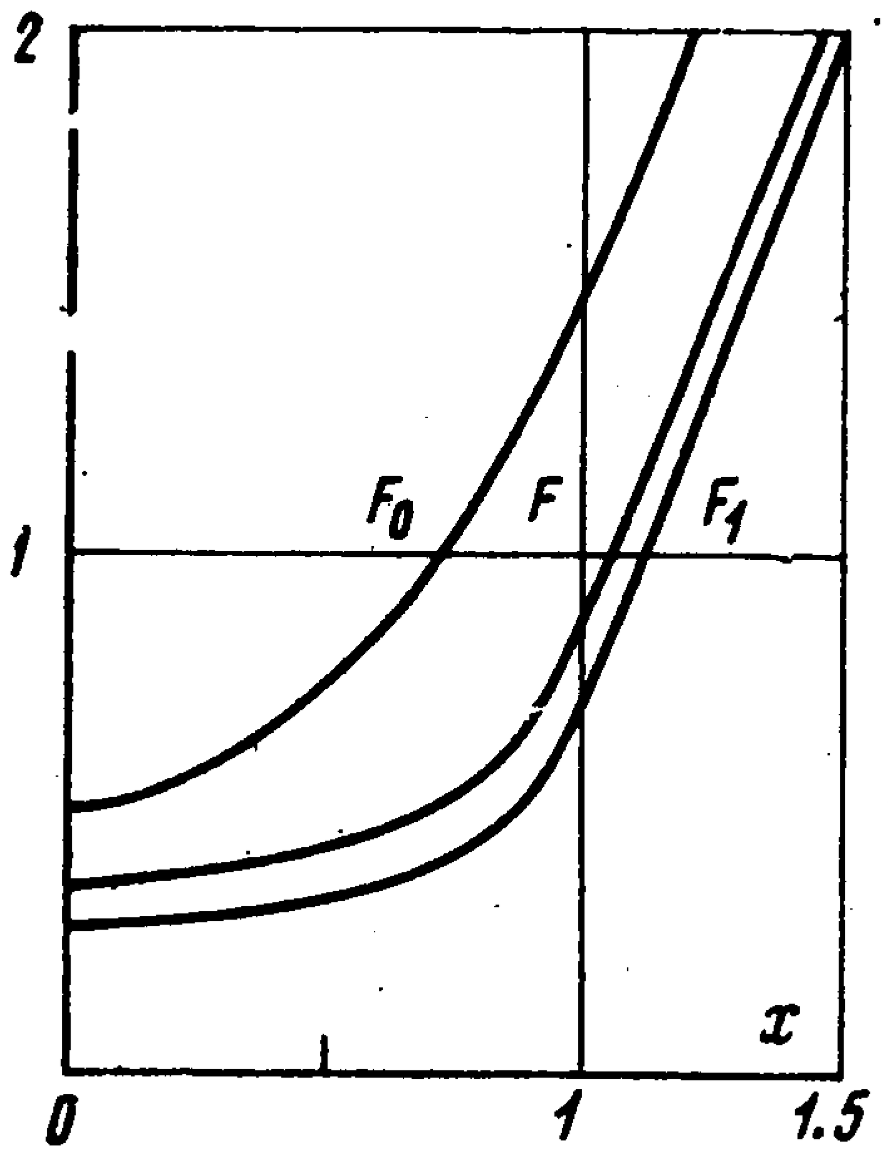
$$F(x, \tau) = \int_0^\tau \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi a\sigma}} \int_0^\infty \omega(\mu) \exp\left[\frac{u_0}{a}(x - \mu) - \frac{u_0^2}{2a}\sigma\right] \times$$
$$\times \left\{\exp\left[-\frac{1}{2a\sigma}(x - \mu)^2\right] + \exp\left[-\frac{1}{2a\sigma}(x + \mu)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{2u_0}{a}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2a\sigma}(x + \mu + \nu)^2 + \frac{u_0}{a}\nu\right] d\nu\right\} d\mu$$

Обращаясь к расчету последовательных приближений, заметим, что все функции $F_0, F_1, \ldots$ будут четными по переменной x. Поэтому любое приближенное управление (2.4) совпадает с оптимальным u^*, и эффективность метода можно оценивать по отклонению последовательных приближений $F_0, F_1, \ldots$ от точного решения. Выбирая квадратичную функцию штрафа $\omega(x) = x^2$, получаем для первых двух приближений следующие выражения:

$$F_0(x,\tau)=\int_0^\tau \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi a(\tau-\sigma)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu^2\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2a(\tau-\sigma)}\right]d\mu = x^2\tau+\frac{a}{2}\tau^2$$

$$F_1(x,\tau)=F_0(x,\tau)-2u_0\int_0^\tau \frac{\sigma\, d\sigma}{\sqrt{2\pi a(\tau-\sigma)}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\mu|\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2a(\tau-\sigma)}\right]d\mu$$

На фигуре приведены функции F_0, F_1, F, вычисленные при $u_0=a=\tau=1$. Видно, что



$$\max_x \frac{|F(x)-F_0(x)|}{F(x)}\approx 1,$$

$$\max_x \frac{|F(x)-F_1(x)|}{F(x)}\approx 0.2$$

т. е. уже второе приближение дает удовлетворительную аппроксимацию точного решения. Рассмотренный пример показывает, что фактическая сходимость последовательных приближений к решению уравнения Беллмана может происходить быстрее сходимости теоретической, которая оценивается по формулам (3.18), (3.20). Этот факт является следствием грубости оценок (3.9), (3.10) фундаментального решения, на которых базировалось доказательство сходимости метода последовательных приближений в п. 3.

Автор благодарит В. Б. Колмановского за обсуждение результатов работы.

Поступила 21 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., «Наука», 1974.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничении на скорость изменения управляющего воздействия. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
4. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975.
5. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., «Мир», 1974.
6. *Fleming W. H.* Some Markovian optimization problems. J. Math. and Mech., 1963, vol. 12, № 1, p. 131—140.
7. *Колосов Г. Е., Стратонович Р. Л.* Об одном асимптотическом методе решения задач синтеза оптимальных регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 12.
8. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б.* Вычислительные и приближенные методы оптимального управления. В сб.: Математический анализ, т. 14. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, М., 1977.
9. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
10. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. Л.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 3.
11. *Камынин Л. И.* Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. Сиб. матем. ж., 1963, т. 4, № 5.
12. *Колосов Г. Е.* Об одной нестационарной задаче оптимального управления. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1975, № 4.