Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 533 : 538.4

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ И СИЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Н. Ф. Пацегон, Р. В. Половин, И. Е. Тарапов

(Харьков)

Показано, что в сжимаемой проводящей среде, намагничивающейся по произвольному изотропному закону $\mu = \mu(\rho, T, H)$ (μ и ρ — магнитная проницаемость и плотность среды, T — температура, H — напряженность магнитного поля), существуют те же типы простых волн, что и в немагнитной среде. В проводящей намагничивающейся несжимаемой жидкости, кроме энтропийной и альвеновской, существует плоскополяризованная магнитогидродинамическая простая волна. Проинтегрированы уравнения альвеновских простых волн.

Проведена классификация разрывов в намагничивающейся среде. В случае проводящей среды система условий на скачках, кроме вращательных и плоскополяризованных разрывов, допускает неполяризованные разрывы с изменением термодинамических параметров и вектора магнитной индукции (по величине и направлению). Показано, что в непроводящей сжимаемой среде, намагничивающейся по закону $\mu = \mu(H)$, ударные волны являются газодинамическими.

1. Распространение одномерных возмущений в неоднородно и изотропно намагничивающейся проводящей среде описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + x_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $u_1 = \rho'$, $u_2 = s'$, $u_3 = v_x'$, $u_4 = v_y'$, $u_5 = v_z'$, $u_6 = B_y'$, $u_7 = B_z'$; ρ', s', ... — возмущения магнитогидродинамических переменных.

Рассмотрим сначала сжимаемую среду, уравнения состояния которой в отсутствие электромагнитного поля имеют вид

$$T = T(\rho, s), \quad p = p(\rho, s)$$

Отличные от нуля элементы матрицы $\{x_{ik}\}$ для этого случая приведены в работе [1].

Отыскивая решение системы (1.1) в виде плоских волн $u_i = u_i^0 \exp i\cdot(kx - \omega t)$, получаем следующее дисперсионное уравнение, определяющее фазовые скорости $\lambda \equiv \omega / k$ (E — единичная матрица):

$$\lambda \det (X_1A + X_6B - \lambda^2E) = 0 \tag{1.2}$$

$$X_i = \begin{Vmatrix} x_{3i} & x_{3,i+1} \\ x_{4i} & x_{4,i+1} \\ x_{5i} & x_{5,i+1} \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} \rho & 0 & 0 \\ x_{23} & x_{24} & x_{25} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_y & -B_x & 0 \\ B_z & 0 & -B_x \end{Vmatrix}$$

Здесь $\lambda = 0$ является простым корнем уравнения (1.2) и определяет энтропийную волну. Можно проверить, что при $\lambda^2 = B_x^2 / (4\pi\rho\mu)$ две последние строки определителя в левой части этого уравнения пропорциональны при произвольном законе намагничивания $\mu = \mu(\rho, T, H)$. Таким образом, альвеновская скорость удовлетворяет наиболее общему дисперсионному уравнению для намагничивающихся сжимаемых сред.

Остальные фазовые скорости находятся из биквадратного уравнения

$$\lambda^4 - 2c_1\lambda^2 + c_2 = 0 \tag{1.3}$$

$$2c_1 = \rho x_{31} + x_{23}x_{32} + B_y x_{36} + B_z x_{37} + x_{24}x_{42} + x_{25}x_{52} + {}$$
$$+ mB_x^2 (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B)$$

$$2c_1 - c_2 = [\rho x_{41} + x_{23}x_{42} + B_y x_{46} + B_z x_{47}] [x_{32}x_{24} - B_x x_{36}] \frac{B_y^2 + B_z^2}{B_y^2}$$

Следовательно, как и в случае немагнитной среды ($\mu = \text{const}$), в намагничивающейся по произвольному изотропному закону среде имеется семь типов простых волн.

Изменение магнитогидродинамических переменных в простой волне описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений [2]:

$$du_i / du_m = r_i / r_m \tag{1.4}$$

где r_k — компоненты правого собственного вектора матрицы $\{x_{ik}\}$. После нахождения из системы (1.4) величин u_i как функций u_m зависимость $u_m(x, t)$ в простой волне можно найти из уравнения

$$x - \lambda_k(u_1, u_2, \ldots, u_7)\, t = F(u_m) \tag{1.5}$$

Функция F определяется по начальным данным.

2. Рассмотрим типы одномерных волн Римана в намагничивающейся среде.

При произвольной ориентации магнитного поля правый собственный вектор для альвеновской волны имеет вид

$$\mathbf{r} = (0, 0, 0, \lambda B_z, -\lambda B_y - B_x B_z, B_x B_y), \qquad \lambda = \pm B_x / \sqrt{4\pi\rho\mu}$$

Выбирая в качестве u_m переменную v_y, из (1.4) имеем

$$\frac{dv_z}{dv_y} = -\frac{B_y}{B_z}, \quad \frac{dB_z}{dv_y} = \frac{B_y B_x}{\lambda B_z}, \quad \frac{dB_y}{dv_y} = -\frac{B_x}{\lambda} \tag{2.1}$$
$$d\rho = ds = dv_x = 0$$

Отсюда получаем, что в альвеновской волне $B_y^2 + B_z^2$, ρ, v_x, s (и T) не меняются, так что и здесь эта волна имеет круговую поляризацию, и в ней сохраняются неизменными продольная скорость и термодинамические параметры. Кроме того, в ней не изменяется и магнитная проницаемость. Это следует из закона намагничивания $\mu = \mu(\rho, T, B / \mu)$ при условии его разрешимости относительно μ, т. е. $\mu^2 + \mu_H B \neq 0$, что обычно всегда выполняется.

Поэтому из (2.1) следует

$$v_y = \mp \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho\mu}} + \text{const}, \qquad v_z = \mp \frac{B_z}{\sqrt{4\pi\rho\mu}} + \text{const}$$

Формула (1.5) в рассматриваемом случае принимает вид

$$x - (v_x \pm B_x / \sqrt{4\pi\rho\mu})\, t = F(v_y)$$

откуда получаем, что альвеновская простая волна распространяется без изменения формы.

Магнитозвуковые простые волны имеют фазовые скорости (см. (1.3))

$$\lambda_\pm = c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2} \tag{2.2}$$

Верхний знак соответствует быстрой магнитозвуковой волне, а нижний — медленной. Можно показать, что для соответствующих магнитозвуковым волнам компонент правых собственных векторов имеют место зависимости

$$r_{5,\pm} = r_{4,\pm}\frac{B_z}{B_y}, \quad r_{7,\pm} = r_{6,\pm}\frac{B_z}{B_y} \tag{2.3}$$

Теперь получаем

$$\frac{dB_z}{dB_y} = \frac{r_{7,\pm}}{r_{6,\pm}} = \frac{B_z}{B_y}, \quad \frac{dv_z}{dv_y} = \frac{r_{5,\pm}}{r_{4,\pm}} = \frac{B_z}{B_y} \tag{2.4}$$

так что $B_z / B_y = \text{const}$, $v_z / v_y = \text{const}$, $v_z - v_y B_z / B_y = \text{const}$.

Следовательно, и в намагничивающейся среде магнитозвуковые волны плоскополяризованы. Полагая в (2.4) постоянные интегрирования равными нулю, получим $B_z \equiv 0$, $v_z \equiv 0$. Поэтому в уравнениях (1.4) для магнитозвуковых волн можно воспользоваться выражениями (10) работы [3] для компонент правых собственных векторов. После некоторых преобразований с использованием (1.3) уравнения простых магнитозвуковых волн можно записать в виде

$$\frac{dv_x}{d\rho} = \frac{\lambda_\pm}{\rho}, \quad \frac{ds}{d\rho} = \frac{NL_\pm - (L_0 + L_1) N\mu\mu_T m^2 B_x^2 B_y^2}{\rho(\lambda_\pm^2 - L_0 m B_x^2)} \tag{2.5}$$

$$\frac{dv_y}{d\rho} = -\frac{\lambda_\pm m B_x B_y (L_0 + L_1)}{\rho(\lambda_\pm^2 - L_0 m B_x^2)}, \quad \frac{dB_y}{d\rho} = \frac{B_y(\lambda_\pm^2 + L_1 m B_x^2)}{\rho(\lambda_\pm^2 - L_0 m B_x^2)}$$

Здесь

$$L_0 = \mu^2 + \mu_H B_x^2 / B + NT_s \mu^2 \mu_T^2 m B_y^2$$

$$L_1 = N\rho\mu\,[\mu_T(s_T^e T_s - T_\rho) - \mu_\rho(1 + s_T^e T_s)]$$

$$L_\pm = (\lambda_\pm^2 - L_0 m B_x^2)\,[\mu_T \rho m B^2(\mu_\rho + \mu_T T_\rho) - \mu\mu_T m B_y^2 - \rho(s_\rho^e + s_T^e T_\rho)]$$

$$N = [1 + T_s(s_T^e - \mu_T^2 m B^2)]^{-1}$$

$$m = [4\pi\rho\mu(\mu^2 + \mu_H B)]^{-1}, \quad s^e = \frac{1}{4\pi\rho}\int_0^H \mu_T H\, dH$$

Из формулы (1.5) для магнитозвуковых волн получаем

$$x - (v_x \pm \lambda_\pm)\, t = F(\rho)$$

Поскольку здесь v_x и $\lambda_\pm$ меняются одновременно с плотностью ρ, то профиль этих волн с течением времени деформируется.

Перейдем теперь к рассмотрению энтропийной волны, не распространяющейся относительно среды. Для соответствующих компонент правого собственного вектора в этой волне имеем $r_7 = (B_z / B_y)\, r_6$.

Таким образом эта волна также плоскополяризована и можно выбрать систему координат так, чтобы $B_z \equiv 0$. С использованием формул (9) работы [3] дифференциальные уравнения энтропийной простой волны можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&K \frac{ds}{d\rho} = -\,[K_1 m B_x (\mu^2 + \mu_H B_x^2/B) + K_2 \rho^2 \mu_\rho (\mu^2 + \mu_H B)\, m B_x^3] \\
&K \frac{dB_y}{d\rho} = -\,\mu m B_x B_y\, [K_1 \mu_T T_s - K_2 (p_s + \psi_T T_s)] \\
&v_x = \mathrm{const}, \quad v_y = \mathrm{const}, \quad v_z = \mathrm{const}, \quad B_z \equiv 0 \\
&K = (p_s + \psi_T T_s)(\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B)\, m B_x + \rho^2 \mu_\rho \mu_T T_s (\mu^2 + \mu_H B)\, m^2 B_x^3 \\
&K_1 = p_\rho + \psi_\rho + \psi_T T_\rho, \\
&K_2 = \mu_\rho + \mu_T T_\rho, \qquad \psi = \frac{1}{4\pi} \int_0^H H (\mu - 1 - \rho \mu_\rho)\, dH
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Следовательно, для энтропийной волны в намагничивающейся среде характерно не только изменение энтропии, как в случае немагнитной среды, но и плотности, индукции и температуры.

3. Одномерные движения намагничивающейся несжимаемой ($\rho = \mathrm{const}$) жидкости описываются пятью магнитогидродинамическими переменными:

$$
u_1 = T, \quad u_2 = v_y, \quad u_3 = v_z, \quad u_4 = B_y, \quad u_5 = B_z
$$

Для жидкости в отсутствие поля принимается [4] уравнение состояния $T = T(s)$.

В несжимаемой проводящей намагничивающейся жидкости существуют пять типов простых волн. Их фазовые скорости определяются из уравнения

$$
\begin{aligned}
&\lambda (\lambda^2 - A_x^2)(\lambda^2 - G_x^2) = 0 \\
&G_x^2 = \frac{A_x^2}{\mu^2 + \mu_H B} \left[\mu^2 + \mu_H \frac{B_x^2}{B} + N \mu^2 \mu_T^2 T_s m (B_y^2 + B_z^2) \right]
\end{aligned}
$$

Для альвеновской волны $\lambda = \pm A_x = \pm B_x / \sqrt{4\pi\rho\mu}$, а соответствующий правый собственный вектор равен

$$
\mathbf{r} = (0, \lambda B_z, -\lambda B_y, -B_x B_z, B_x B_y)
$$

Дифференциальные уравнения альвеновской простой волны в несжимаемой жидкости совпадают с уравнениями (2.1) в сжимаемой среде.

Магнитогидродинамическая поперечная простая волна распространяется относительно жидкости с фазовой скоростью $\lambda = \pm G_x$. Ей соответствует правый собственный вектор с компонентами $r_1 = N \mu \mu_T T_s m B_x (B_y^2 + B_z^2)$, $r_2 = \lambda B_y$, $r_3 = \lambda B_z$, $r_4 = -B_x B_y$, $r_5 = -B_x B_z$. Таким образом, в отличие от альвеновской, эта волна плоскополяризована. Кроме того, в ней $v_z - v_y B_z / B_y = \mathrm{const}$. Поэтому можно положить $v_z \equiv 0$, $B_z \equiv 0$. Дифференциальные уравнения магнитогидродинамической поперечной волны записываются следующим образом:

$$dv_y / dB_y = -\lambda / B_x, \quad dT / dB_y = -N\mu\mu_T T_s m B_y$$

Эта система уравнений получена ранее [5] для проводящей жидкости, намагниченной до насыщения. Она сводится к квадратурам для произвольного закона намагничивания $\mu = \mu(H)$.

Наконец, в энтропийной простой волне $\lambda = 0$. Соответствующий правый собственный вектор равен

$$\mathbf{r} = (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B, 0, 0, \mu\mu_T B_y, \mu\mu_T B_z)$$

Отсюда следует, что эта волна также плоскополяризована и ее уравнения можно записать в виде

$$dT / dB_y = (\mu^2 + \mu_H B_x^2 / B) / (\mu\mu_T B_y), \quad v_y = \mathrm{const}$$
$$v_z = \mathrm{const}, \quad B_z \equiv 0$$

4. Проведенный анализ показывает, что при деформировании профилей простых волн в сжимаемой среде могут возникать только те же типы сильных разрывов, что и в немагнитной среде.

Остановимся на возможных типах решений условий на сильных разрывах. Рассмотрим вначале проводящую намагничивающуюся среду. Система соотношений на сильных разрывах в такой среде получена в работе [6]

$$\begin{aligned}
&\langle \rho v_n \rangle = 0, \quad \langle \rho v_n \mathbf{v}_\tau - \mu H_n \mathbf{H}_\tau \rangle = 0 \\
&\langle \rho v_n^2 + p - \rho^2 u_\rho - (4\pi)^{-1} \mu H_n^2 \rangle = 0 \\
&\langle \rho v_n (v^2 / 2 + W - u - \rho u_\rho + T u_T) + \\
&+ (4\pi)^{-1} (v_n \mu H^2 - \mu H_n (\mathbf{v}\mathbf{H})) \rangle = 0 \\
&\langle \mu H_n \rangle = 0, \quad \mu H_n \langle \mathbf{v}_\tau \rangle = \langle v_n \mu \mathbf{H}_\tau \rangle, \quad \langle \mathbf{H}_\tau \rangle = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{i} \times \mathbf{n}] \\
&u = (4\pi\rho)^{-1} \int_0^H \mu(\rho, T, H)\, H\, dH, \quad u_\rho \equiv \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad u_T \equiv \frac{\partial u}{\partial T}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь индексы n и τ обозначают нормальную и касательную составляющие вектора по отношению к поверхности разрыва, угловые скобки используются для обозначения скачка величин в ударной волне, W — энтальпия среды в отсутствие поля, остальные обозначения общепринятые.

Система соотношений (4.1) в общем случае допускает следующие типы разрывов:

1°. Разрывы без потока вещества через поверхность ($\rho v_n = m_n = 0$).

1) контактные разрывы, для которых $B_n \neq 0$,

2) тангенциальные разрывы ($B_n = 0$).

2°. Разрывы с потоком вещества через поверхность ($m_n \neq 0$).

1) неполяризованные разрывы, при переходе через которые меняются как термодинамические параметры, так и касательные составляющие векторов магнитной индукции и скорости (по величине и направлению),

2) вращательные разрывы, на которых непрерывна величина магнитной индукции, а вектор индукции и, вообще говоря, термодинамические переменные меняются,

3) плоскополяризованные ударные волны, при переходе через которые терпят разрыв термодинамические переменные, а касательные составляющие векторов магнитной индукции и скорости лежат в одной плоскости и изменяются по величине.

Разрывы без потока вещества подробно анализировались в [6].

Рассмотрим разрывы с перетеканием вещества через поверхность. В этом случае систему (4.1) можно записать в виде

$$\left\langle p(\rho, T) - \rho^2 u_\rho + \frac{1}{\rho}\left(m_n^2 - \frac{\rho B_n^2}{4\pi\mu}\right)\right\rangle = 0 \tag{4.2}$$

$$\left\langle W(\rho, T) + Tu_T - u - \rho u_\rho + \frac{m_n^2}{2\rho^2} + \frac{\mu H_\tau^2}{4\pi\rho}\left(1 - \frac{\rho B_n^2}{8\pi\mu m_n^2}\right)\right\rangle = 0$$

$$\langle B_n \rangle = 0, \quad \langle m_n \rangle = 0, \quad \langle B_n \mathbf{v}_\tau - v_n \mathbf{B}_\tau \rangle = 0$$

$$\left\langle m_n \mathbf{v}_\tau - \frac{B_n \mathbf{H}_\tau}{4\pi} \right\rangle = 0$$

В случае, когда $B_n \neq 0$, можно выбрать систему координат так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{v}_\tau = \frac{v_n}{B_n} \mathbf{B}_\tau$$

с обеих сторон разрыва. Тогда из последнего соотношения (4.2) получим

$$\left\langle \frac{\mu \mathbf{H}_\tau}{\rho}\left(m_n^2 - \frac{\rho B_n^2}{4\pi\mu}\right)\right\rangle = 0 \tag{4.3}$$

Таким образом, первые два соотношения (4.2) вместе с (4.3) позволяют получить ρ_2, T_2, H_2 как функции ρ_1, T_1, H_1 и постоянных m_n, B_n.

В неполяризованных скачках (векторы $\mathbf{B}_{\tau 1}$ и $\mathbf{B}_{\tau 2}$ не параллельны и не равны, $\rho_1 \neq \rho_2$), как это следует из (4.3)

$$v_{ni} = \frac{B_n^2}{4\pi\rho_i\mu_i} \quad (i = 1, 2) \tag{4.4}$$

так что скорость среды с обеих сторон разрыва равна альвеновской. Для расчета таких разрывов из (4.2), (4.3) имеем

$$\left\langle \frac{\mu}{\rho} \right\rangle = 0, \quad \langle p - \rho^2 u_\rho \rangle = 0 \tag{4.5}$$

$$\langle W - u - \rho u_\rho + Tu_T + \mu H_\tau^2 / (8\pi\rho) \rangle = 0$$

Таких волн в немагнитной среде не существует, ибо при $\mu = 1$ из (4.5) получаем

$$\langle \rho \rangle = 0, \quad \langle p \rangle = -\frac{1}{8\pi}\langle H_\tau^2 \rangle, \quad \langle W \rangle = -\frac{1}{8\pi\rho}\langle H_\tau^2 \rangle$$

что возможно лишь при $\langle \rho \rangle = \langle p \rangle = \langle W \rangle = 0$, так что такая волна становится альвеновским разрывом.

Для вращательных скачков (векторы $\mathbf{B}_{\tau 1}$ и $\mathbf{B}_{\tau 2}$ равны по величине, но не параллельны, $\rho_1 \neq \rho_2$) из (4.2) получаем соотношения (4.4), (4.5) с дополнительным условием $\langle B_\tau \rangle = 0$.

Частным случаем вращательных разрывов являются альвеновские разрывы (векторы $\mathbf{B}_{\tau 1}$ и $\mathbf{B}_{\tau 2}$ равны по величине, но не параллельны, $\rho_1 = \rho_2$), для которых из (4.4), (4.5) следует

$$v_{n_1}^2 = v_{n2}^2 = B_n^2 / (4\pi\rho\mu), \quad \langle \mu \rangle = \langle H \rangle = 0$$

При этом, если μ — однозначная функция температуры, что обычно всегда допускается, то и $\langle T\rangle = \langle p\rangle = \langle W\rangle = 0$.

Видно, что если $\mu = \mu(H)$ и μ — однозначная функция магнитной функции ($\mu^2 + \mu_H B \neq 0$), то из условия $\langle B\rangle = 0$ для вращательных волн получаем $\langle\mu\rangle = 0$. Тогда из (4.5) следует, что в такой намагничивающейся среде вращательные разрывы, отличные от альвеновских, невозможны.

Для идеального газа, намагничивающегося по закону Клазиуса — Мосотти ($(\mu - 1)\, T / (\rho\mu) = \mathrm{const}$) численное исследование системы (4.5) показывает, что в области значений магнитной проницаемости до разрыва $1 < \mu < 2$ и показателя адиабаты $1 < \gamma < 2$ ($\gamma = c_p / c_v$) при устойчивых в смысле [3] состояниях среды из вращательных и неполяризованных разрывов, на которых энтропия не убывает, возможны только альвеновские разрывы.

Аналогично можно показать, что в намагниченном до насыщения идеальном газе при постоянной намагниченности $M = (\mu - 1)\, H / (4\pi) = \mathrm{const}$ существуют решения, соответствующие неполяризованным разрывам и удовлетворяющие условию возрастания энтропии. Однако эти решения неэволюционны.

При произвольном законе намагничивания $\mu = \mu(\rho, T, H)$ добавление условия $\langle B_\tau\rangle = 0$ к системе (4.5) уменьшает число определяемых неизвестных, так что это условие накладывает дополнительную связь на параметры m_n и $B^2 = B_\tau^2 + B_n^2$. Следовательно, вращательный разрыв со скачком термодинамических переменных может существовать только при определенном значении поля. Это указывает на то, что из вращательных разрывов, по-видимому, могут реализоваться только альвеновские.

Для произвольных уравнений состояния и законов намагничивания вопрос о существовании неполяризованных разрывов, удовлетворяющих необходимым условиям возрастания энтропии, устойчивости среды и эволюционности, остается открытым.

Случай плоскополяризованных скачков наиболее общий. Для их расчета служит полная система (4.2), (4.3). При этом можно использовать уравнение ударной адиабаты для намагничивающихся сред [6].

Система условий на сильных разрывах в несжимаемой намагничивающейся проводящей жидкости допускает те же типы разрывов; вращательные разрывы могут быть только альвеновскими. Если проводящая жидкость намагничивается по закону $\mu = \mu(H)$, то в ней возможны только альвеновские и плоскополяризованные разрывы.

Отметим, что поскольку магнитозвуковые простые волны плоскополяризованы, а в альвеновской простой волне термодинамические параметры не изменяются, то неполяризованные ударные волны могут быть разрывами только конечной интенсивности [8]. Такие разрывы могли бы возникать, например, при взаимодействии других типов разрывов [1].

[1] Сильные разрывы рассматривались также в работе: *Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А.* Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. Отчет Ин-та механики МГУ, 1975, № 1705.

5. В непроводящей намагничивающей среде существует семь типов простых волн [9]. Эти волны плоскополяризованы. Поэтому в непроводящей намагничивающейся среде возможны только плоскополяризованные ударные волны. Для их расчета служит система соотношений

$$\begin{aligned} &(5.1) \qquad \langle m_n\rangle = 0, \quad \langle m_n^2/\rho + p - \rho^2 u_\rho - (4\pi)^{-1}\mu H_n^2\rangle = 0 \\ &\langle m_n^2/(2\rho^2) + W - u - \rho u_\rho + T u_T\rangle = 0 \\ &\langle \mathbf{v}_\tau\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{H}_\tau\rangle = 0, \quad \langle B_n\rangle = 0 \end{aligned}$$

Теорема. Ударные волны в непроводящей среде, намагничивающейся по закону $M = M(H)$ при выполнении условий $dM / dH > 0$, $d^2M / dH^2 \leqslant 0$ $(\mu > 1)$ либо $dM / dH < 0$, $d^2M / dH^2 \geqslant 0$ $(\mu < 1)$ вырождаются в газодинамические.

Эти условия для закона намагничивания представляются естественными для всех известных сред. Из них, в частности, получаем, что в парамагнетике и в диамагнетике выполняются следующие неравенства:

$$(5.2) \qquad 0 \geqslant \mu_H \geqslant \frac{1-\mu}{H} \quad (\mu > 1), \quad 0 \leqslant \mu_H \leqslant \frac{1-\mu}{H} \quad (\mu < 1)$$

Из (5.1) для случая $\mu = \mu(H)$ имеем

$$(5.3) \qquad \langle m_n\rangle = 0, \quad m_n^2\langle 1/(2\rho^2)\rangle + \langle W\rangle = 0$$

$$\langle p\rangle + m_n^2\langle 1/\rho\rangle = \left\langle \frac{B_n^2}{4\pi\mu} - \frac{1}{4\pi}\int_0^H \mu(H)\, H\, dH\right\rangle = Q, \quad \langle B_n\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{H}_\tau\rangle = 0$$

Для доказательства теоремы заметим, что закон намагничивания $\mu = \mu(H) = \mu(\sqrt{H_\tau^2 + B_n^2/\mu^2})$ в силу трех последних условий (5.3) представляет собой неявное уравнение относительно μ с парамерами H_τ, B_n. Условие его разрешимости $1 + \mu_H B_n^2 / (\mu^3 H) \neq 0$. В классе положительных функций μ при выполнении (5.2) оно имеет место как в парамагнетике, так и в диамагнетике. Из условий (5.3) тогда вытекает, что $\langle \mu\rangle = 0$ $\langle H^2\rangle = B_n^2\langle 1/\mu^2\rangle = 0$, $Q = 0$.

Таким образом, условия (5.3) приводятся к газодинамическим и условиям для поля, не взаимодействующего со средой. Поскольку для сред, в которых намагниченность не зависит от температуры, адиабата $\langle s + s^e\rangle = 0$ совпадает с соответствующей в газовой динамике ($\langle s\rangle = 0$), то решения на ударных волнах (5.3) совпадают с газодинамическими.

Поступила 9 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пацегон Н. Ф., Тарапов И. Е.* Звуковые и простые волны в проводящей намагничивающейся среде. Укр. физ. ж., 1974, т. 19, вып. 6.
2. *Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В.* Простые волны в магнитной гидродинамике. Укр. физ. ж., 1958, т. 4, вып. 3.
3. *Тарапов И. Е.* Звуковые волны в намагничивающейся среде. ПМТФ, 1973, № 1.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1976.
5. *Тарапов И. Е.* Поперечныеволны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
6. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 17. Изд-во Харьковск. ун-та, 1973.
7. *Тарапов И. Е.* Поверхности разрыва в намагничивающейся среде. ПМТФ, 1974, № 5.
8. *Половин Р. В.* Нелинейные магнитогидродинамические волны. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, вып. 4.
9. *Тарапов И. Е.* Простые волны в непроводящей намагничивающейся среде. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.