

**О ВОЗМУЩЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С КОНЕЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ,
В ЗАДАЧЕ О СИЛЬНОМ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ**

Е. Д. Терентьев

(Москва)

Рассматривается нестационарное движение совершенного идеального газа для больших значений характерного времени. Невозмущенный газ предполагается покоящимся, с нулевым давлением и постоянной плотностью. В области же возмущенного движения предполагаются постоянными энергия и импульс газа. В первом приближении движение автомодельно и соответствует сильному точечному взрыву. Газодинамические функции, описывающие конечный импульс, имеют вид несимметричных по пространству добавок к автомодельному решению. Для линейной задачи справедлив интеграл импульса, использование его упрощает анализ задачи.

Задача о движении холодного идеального совершенного газа при внезапном выделении энергии в точке имеет автомодельное решение. Впервые оно было найдено в работах [1-3]. Большое внимание привлекли линейные задачи, возникающие при линеаризации уравнений газовой динамики по отношению к решению задачи о сильном взрыве. Так, для линейных уравнений был найден интеграл энтропии [4-6], справедливый для любых приближений. Помимо интеграла энтропии для линейной системы был найден еще ряд интегралов, справедливых лишь для некоторых особых возмущений [7, 8]. Эти интегралы были следствием какого-либо закона сохранения, справедливого для уравнений газовой динамики [8]. Среди найденных в [7] интегралов имеется интеграл импульса. Подробное изучение решений, обладающих интегралом импульса для плоских и осесимметричных в первом приближении движений, было проведено в [9, 10]. Построенные решения обладали хорошей интерпретацией, они описывали возмущения за плоским или произвольным телом в гиперзвуковом потоке, связанные с подъемной силой, действующей на тело. Ниже для основного центрально-симметричного движения построено возмущенное решение, для которого справедлив интеграл импульса [8] и которое описывает конечный импульс газа, не изменяющийся во времени.

Рассмотрим идеальный совершенный газ с постоянным отношением удельных теплоемкостей κ ($1 < \kappa < 2$). Обозначим через ρ , p , T плотность, давление и температуру газа. Введем сферическую систему координат r , φ , ϑ , проекции вектора скорости V на оси пометим нижними индексами v_r , v_φ , v_ϑ .

Предположим, что нестационарное движение газа вызвано взрывом и что, помимо энергии, газу сообщен импульс I_z , направленный вдоль оси z , от которой и будем вести отсчет угла ϑ . Пусть невозмущенный газ является холодным и покоящимся ($T_1 = 0$, $V_1 = 0$). Предположения о невозмущенных параметрах газа позволяют заключить, что в процессе всего движения в области возмущения будут сохраняться постоянными как энергия E , так и импульс I_z газа для любых моментов времени t .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением асимптотического решения задачи при $t \rightarrow \infty$. При отсутствии импульса $I_z = 0$ решение такой задачи автомодельно [1-3], согласно ему, по невозмущенному газу распространяется сферическая ударная волна $r_s = (bt)^{2/5}$. Предположим, что при наличии импульса $I_z \neq 0$ положение ударной волны при $t \rightarrow \infty$ можно искать в виде

$$(1) \quad r_s = (bt)^{2/5} [1 + t^{-2m/5} R(\varphi, \vartheta) + \dots], \quad m > 0$$

причем параметр m и функция R выбираются так, чтобы обеспечить условие $I_z = \text{const} \neq 0$. Будем считать функцию $R(\varphi, \vartheta)$ дважды дифференцируемой и $R(0, \vartheta) = R(2\pi, \vartheta)$; из этого следует, что она может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$R(\varphi, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l a_{lk} P_l^k(\cos \vartheta) \cos(k\varphi + b_{lk})$$

Здесь a_{lk} и b_{lk} — коэффициенты разложения функции R , $P_l^k(\cos \vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра, $P_l^k(\cos \vartheta) \cos(k\varphi + b_{lk})$ — шаровая функция первого рода, которая является решением дифференциального уравнения в частных производных [11]

$$(2) \quad \frac{\partial^2 Y_l^k}{\partial \varphi^2} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y_l^k}{\partial \vartheta} \right) + l(l+1) \sin^2 \vartheta Y_l^k = 0$$

Разложение ударного фронта, аналогичное (1), было использовано в работе [12].

Поскольку задача для возмущений является линейной, возьмем в ряду из шаровых функций член с произвольным номером и запишем $R = Y_l^k(\varphi, \vartheta)$. Соответствующие этому возмущению ударной волны параметры газа будем искать в форме

$$(3) \quad \begin{aligned} v_r &= \frac{4}{5(\kappa+1)} b^{2/5} t^{-3/5} [f(\lambda) + t^{-2m/5} f_m(\lambda) Y_l^k + \dots] \\ v_\varphi &= -\frac{4}{5(\kappa+1)} b^{2/5} t^{-3/5-2m/5} u_m(\lambda) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_l^k}{\partial \varphi} + \dots \\ v_\vartheta &= -\frac{4}{5(\kappa+1)} b^{2/5} t^{-3/5-2m/5} w_m(\lambda) \frac{\partial Y_l^k}{\partial \vartheta} + \dots \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \rho_1 [g(\lambda) + t^{-2m/5} g_m(\lambda) Y_l^k + \dots] \\ p &= \frac{8}{25(\kappa+1)} \rho_1 b^{4/5} t^{-3/5} [h(\lambda) + t^{-2m/5} h_m(\lambda) Y_l^k + \dots] \\ \lambda &= r / (bt)^{2/5} \end{aligned}$$

Функции f , g и h первого приближения задают автомодельное движение, описывающее сильный точечный взрыв [1-3]. Остановимся на функциях второго приближения с индексом m . Условия Ренкина — Гюгонио на фронте ударной волны (1) позволяют получить начальные условия в точке $\lambda = 1$

$$(4) \quad \begin{aligned} f_m &= \frac{\kappa-7}{2(\kappa+1)} - m, \quad u_m = 1, \quad w_m = 1 \\ \rho_m &= -\frac{5\kappa+13}{\kappa^2-1}, \quad h_m = \frac{1-7\kappa}{\kappa^2-1} - 2m \end{aligned}$$

Подставляя разложения (2) в систему уравнений Эйлера и сохраняя члены с одинаковыми степенями t , получим систему уравнений для функций второго приближения, содержащую пять уравнений. Однако функции u_m и w_m служат решением одного и того же обыкновенного дифференциального уравнения. Принимая во внимание совпадение начальных условий (4) для функций u_m и w_m , заключаем $u_m(\lambda) = w_m(\lambda)$.

Сохраняя в дальнейшем лишь $w_m(\lambda)$ и учитывая равенство (2), выпишем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & g \frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\kappa+1}{2} \lambda \right) \frac{dg_m}{d\lambda} + \left(\frac{dg}{d\lambda} + \frac{2}{\lambda} g \right) f_m + \\
 & + \frac{l(l+1)}{\lambda} g w_m + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{2}{\lambda} f - \frac{m(\kappa+1)}{2} \right] g_m = 0 \\
 & \left(f - \frac{\kappa+1}{2} \lambda \right) g \frac{df_m}{d\lambda} + \frac{\kappa-1}{2} \frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{df}{d\lambda} - \frac{(3+2m)(\kappa+1)}{4} \right] g f_m + \\
 & + \left[\left(f - \frac{\kappa+1}{2} \lambda \right) \frac{df}{d\lambda} - \frac{3}{4} (\kappa+1) f \right] g_m = 0 \\
 & \left(f - \frac{\kappa+1}{2} \lambda \right) g \frac{dw_m}{d\lambda} + \left[\frac{f}{\lambda} - \frac{(3+2m)(\kappa+1)}{4} \right] g w_m - \frac{\kappa-1}{2\lambda} h_m = 0 \\
 & \kappa h \frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\kappa+1}{2} \lambda \right) \frac{dh_m}{d\lambda} + \left(\frac{dh}{d\lambda} + \frac{2\kappa}{\lambda} h \right) f_m + \\
 & + \frac{\kappa l(l+1)}{\lambda} h w_m + \left[\kappa \frac{df}{d\lambda} + \frac{2\kappa}{\lambda} f - \frac{(\kappa+1)(3+m)}{2} \right] h_m = 0
 \end{aligned}$$

Среди возмущений ударного фронта рассмотрим такие, которые дают конечный вклад при $t \rightarrow \infty$ в импульс газа вдоль оси z . Запишем выражение для I_z

$$I_z = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r_s} \rho v_z r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi, \quad v_z = v_r \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta$$

Принимая во внимание разложения (3), а также выражение для шаровой функции $Y_l^k = P_l^k(\cos \vartheta) \cos(k\varphi + b_{kl})$, имеем

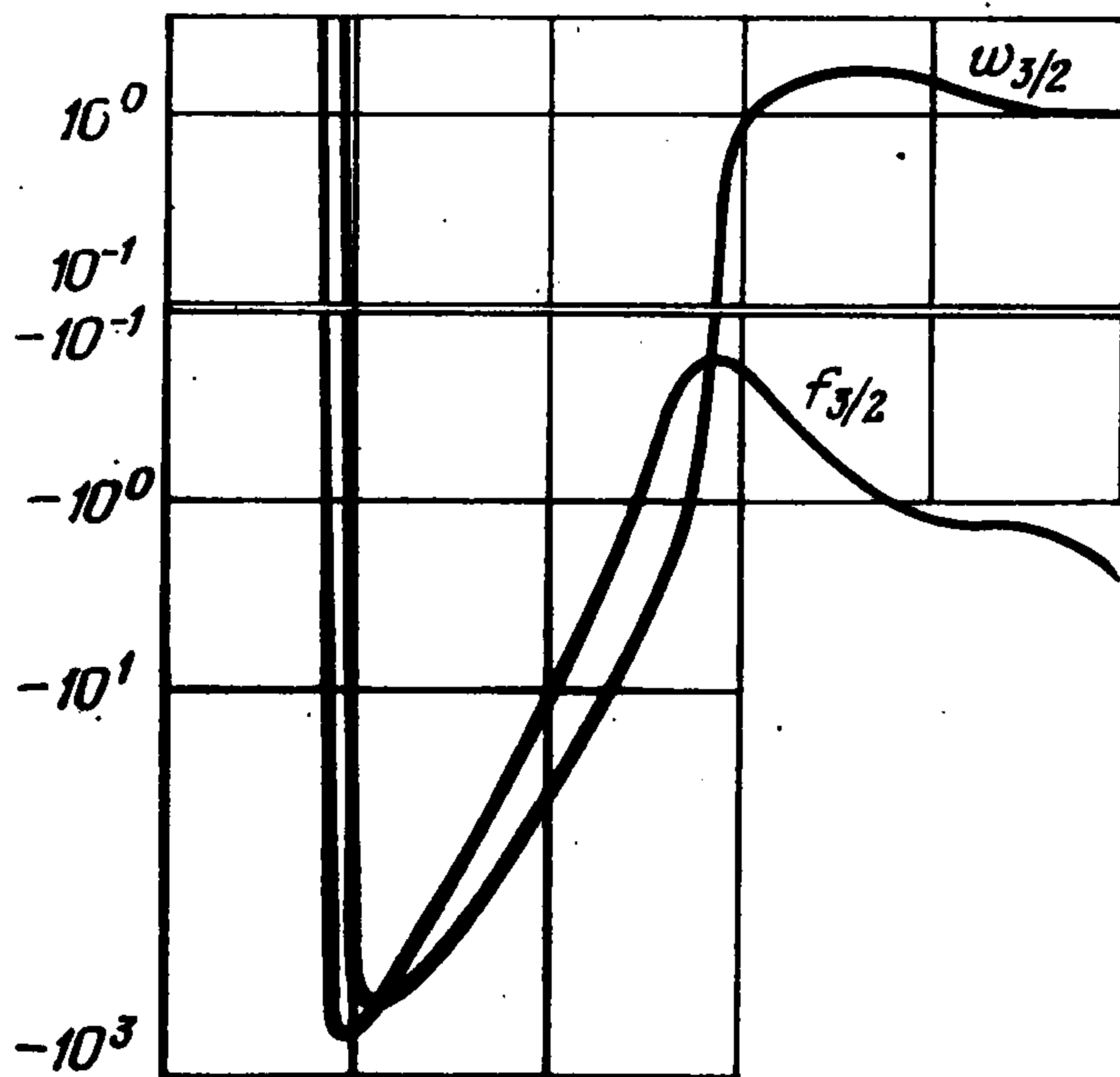
$$\begin{aligned}
 (6) \quad I_z &= \frac{4}{5(\kappa-1)} \rho_1 b^{3/5} t^{3/5-2m/5} \int_0^{2\pi} \cos(k\varphi + b_{lk}) d\varphi \int_0^{\pi} P_l^k(\cos \vartheta) \times \\
 &\times \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta [1 + \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_{z1}(\lambda)] \\
 I_{z1}(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 (g f_m + f g_m - 2g w_m) \lambda_1^2 d\lambda_1
 \end{aligned}$$

Для того чтобы выделить возмущения, определяющие импульс I_z , необходимо положить $k = 0$, ибо только в этом случае интеграл по переменной φ будет отличен от нуля. Не теряя общности, постоянную b_{lk} можно положить равной нулю. Рассмотрим интеграл по ϑ ; для $k = 0$ присоединенные функции Лежандра переходят в полиномы Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$. Принимая во внимание, что $P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$, а также ортогональность полиномов Лежандра, заключаем, что интеграл по ϑ будет отличен от нуля только при $l = 1$. Выберем m таким, чтобы выражение для I_z не зависело от времени, это дает $m = 3/2$.

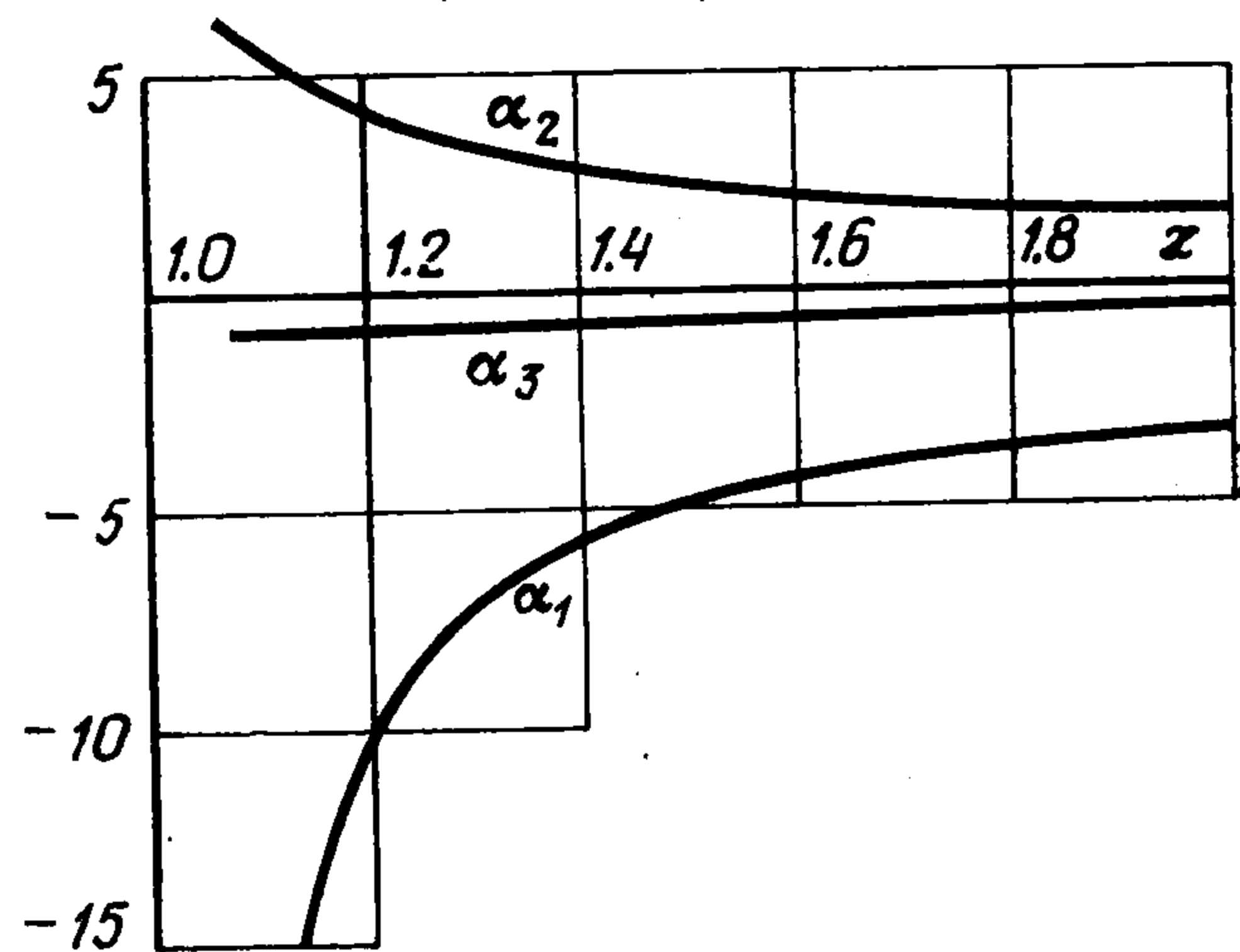
Заметим, что при $l = 1$ и $m = 3/2$ система уравнений (5) допускает интеграл импульса [7]

$$(7) \quad \lambda (gf_{3/2} + fg_{3/2} - 2gw_{3/2}) - [4fgf_{3/2} + 2f^2g_{3/2} - 4fgw_{3/2} + (\kappa - 1)h_{3/2}] / (\kappa + 1) = C_1 / \lambda^2$$

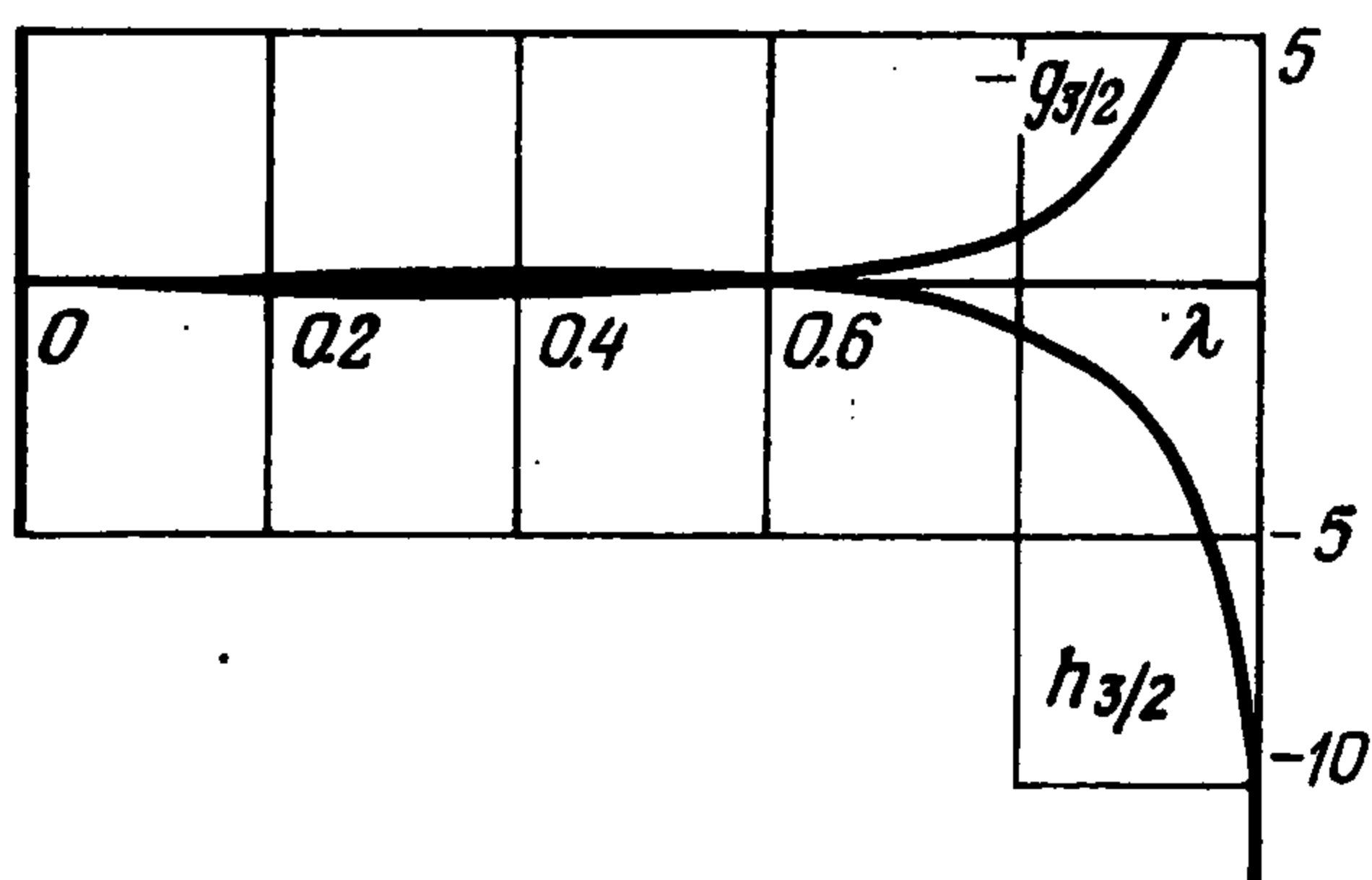
Определяя постоянную C_1 из условий (4), получим $C_1 = 0$. Исключая из системы уравнений (5) функцию $w_{3/2}$ с помощью равенства (7) и отбрасывая третье уравнение в (5), получим систему трех уравнений для опре-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

деления функций $f_{3/2}$, $g_{3/2}$ и $h_{3/2}$. Решение этой системы при $\kappa = 1.4$ было проведено численно, графики функций приведены на фиг. 1. При $\lambda \rightarrow 0$ все функции имеют колебательный характер, но, в то время как $g_{3/2}$ и $h_{3/2}$ стремятся к нулю, $f_{3/2}$ и $w_{3/2}$ неограниченно возрастают; несмотря на это, интеграл $I_{z1}(\lambda)$ стремится к конечному значению, равному -1.0521 . Следовательно, для $\kappa = 1.4$ возмущению центрально-симметричного ударного фронта (1) с $t^{-2m/3} R(\varphi, \vartheta) = C_0 t^{-3/5} \cos \vartheta$ отвечает движение с импульсом, направленным вдоль оси z

$$I_z = -0.1389 C_0 \rho_1 b^{3/5} \quad (C_0 > 0)$$

Докажем сходимость интеграла $I_{z1}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ для произвольных κ ($1 < \kappa < 2$). Для этого изучим асимптотики функций второго приближения при $\lambda \rightarrow 0$; поскольку эти функции удовлетворяют системе диффе-

ренциальных уравнений третьего порядка, то полное решение этой системы будет состоять из суммы трех линейно-независимых решений. Асимптотики двух линейно-независимых решений будут иметь колебательный характер

$$(8) \quad \begin{aligned} f_{3/2} &= \frac{(\kappa^2 - 1)(\kappa - 1)}{6\kappa k_1} \left\{ \left[\alpha_1 + \frac{\kappa + 2}{2(\kappa - 1)} \right] C_{20}(\lambda) + \alpha_2 C_{30}(\lambda) \right\} \lambda^{\alpha_1} + \dots \\ w_{3/2} &= - \frac{(\kappa^2 - 1)(\kappa - 1)}{12\kappa k_1} \left\{ \left[\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \frac{5\kappa - 2}{2(\kappa - 1)} \alpha_1 + \frac{\kappa + 2}{\kappa - 1} \right] C_{20}(\lambda) + \right. \\ &+ \alpha_2 \left[2\alpha_1 + \frac{5\kappa - 2}{2(\kappa - 1)} \right] C_{30}(\lambda) \left. \right\} \lambda^{\alpha_1} + \dots \\ g_{3/2} &= C_{20}(\lambda) \lambda^{\beta_1} + \dots, \quad \beta_1 = \alpha_1 + (4 - \kappa) / (\kappa - 1) \\ h_{3/2} &= \frac{(\kappa^2 - 1)^2}{6\kappa^2} \left\{ \left[\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \frac{7\kappa - 6}{2(\kappa - 1)} \alpha_1 + \frac{3\kappa^2 + 2\kappa - 2}{2(\kappa - 1)^2} \right] C_{20}(\lambda) + \right. \\ &+ \alpha_2 \left[2\alpha_1 + \frac{7\kappa - 6}{2(\kappa - 1)} \right] C_{30}(\lambda) \left. \right\} \lambda^{\gamma_1} + \dots, \quad \gamma_1 = \alpha_1 + \frac{2 + \kappa}{\kappa - 1} \\ C_{20}(\lambda) &= C_2 \cos(\alpha_2 \ln \lambda) + C_3 \sin(\alpha_2 \ln \lambda), \quad C_{30}(\lambda) = \\ &= -C_2 \sin(\alpha_2 \ln \lambda) + C_3 \cos(\alpha_2 \ln \lambda) \end{aligned}$$

Третье линейно-независимое решение имеет степенной характер

$$(9) \quad \begin{aligned} f_{3/2} &= C_4 \frac{(\kappa^2 - 1)(\kappa - 1)}{6\kappa k_1} \left[\alpha_3 + \frac{\kappa + 2}{2(\kappa - 1)} \right] \lambda^{\alpha_3} + \dots \\ w_{3/2} &= -C_4 \frac{(\kappa^2 - 1)(\kappa - 1)}{12\kappa k_1} \left[\alpha_3^2 + \frac{5\kappa - 2}{2(\kappa - 1)} \alpha_3 + \frac{\kappa + 2}{\kappa - 1} \right] \lambda^{\alpha_3} + \dots \\ g_{3/2} &= C_4 \lambda^{\beta_3} + \dots, \quad \beta_3 = \alpha_3 + (4 - \kappa) / (\kappa - 1) \\ h_{3/2} &= C_4 \frac{(\kappa^2 - 1)^2}{6\kappa^2} \left[\alpha_3^2 + \frac{7\kappa - 6}{2(\kappa - 1)} \alpha_3 + \frac{3\kappa^2 + 2\kappa - 2}{2(\kappa - 1)^2} \right] \lambda^{\gamma_3} + \dots \\ \gamma_3 &= \alpha_3 + (2 + \kappa) / (\kappa - 1) \end{aligned}$$

Здесь C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, определяемые в конкретном решении начальными данными (4); k_1 — коэффициент в разложении плотности g при $\lambda \rightarrow 0$; $\alpha_1 + i\alpha_2, \alpha_1 - i\alpha_2, \alpha_3$ (i — мнимая единица) — корни кубического уравнения

$$\alpha^3 + \frac{7\kappa}{2(\kappa - 1)} \alpha^2 + \frac{3\kappa^2 + 17\kappa - 14}{2(\kappa - 1)^2} \alpha + \frac{3\kappa}{(\kappa - 1)^2} = 0$$

Графики зависимости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ от κ приведены на фиг. 2. В частности, для $\kappa = 1.4$ имеем $\alpha_1 = -5.8101, \alpha_2 = 2.8150, \alpha_3 = -0.6298$. Как видно из графика, $\alpha_1 < \alpha_3$ для всего диапазона изменения κ , поэтому асимптотики (8) являются старшими по отношению к асимптотике (9), а функции второго приближения при $\lambda \rightarrow 0$ всегда будут иметь колебательный характер с периодом $L = (e^{2\pi/\alpha_2} - 1)\lambda$, который обращается в нуль вместе с переменной λ .

Асимптотики (8) позволяют заключить, что подынтегральное выражение в формуле (6) стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, следовательно, весь интеграл (6) сходится, и для любого κ существует $I_{z1}(0)$, поэтому возмущению (1) вида $C_0 t^{-3/5} \cos \vartheta$ соответствует движение, обладающее импульсом, направленным вдоль оси z

$$I_z = \frac{16C_0 \rho_1 b^{3/5}}{15(\kappa - 1)} [1 + I_{z1}(0)]$$

На фиг. 3 приведена зависимость $1 + I_{z1}(0)$ от κ . Поскольку $1 + I_{z1}(0) < 0$, то импульс I_z направлен в противоположную сторону, нежели относительное смещение ударного фронта по оси z , задаваемое величиной $C_0 t^{-3/2}$. Такая ситуация не является необычной, так, явление нерегулярного смещения ударной волны имеет место при гиперзвуковом несимметричном обтекании кругового конуса [13].

Отметим еще одно важное свойство полученного решения: при $\lambda \rightarrow 0$ возмущенное давление, согласно (7), также стремится к нулю. Это позволяет продолжить решение в области, близкие к центру, где давление по пространственным переменным почти не меняется. Такое продолжение может быть проведено с учетом вязкости и теплопроводности, как это сделано для плоскопараллельных движений с постоянными энергией и импульсом в работе [9].

Поступила 2 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
3. Taylor G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1950, vol. 201, No. 1065.
4. Лидов М. Л. К теории линеаризованных решений около одномерных автомодельных движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 6.
5. Коробейников В. П. Об интегралах уравнений неустановившихся адиабатических движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 4.
6. Sakurai A. On the propagation and structure of the blast wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 5, No. 5.
7. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. К общей теории нестационарных течений, близких к автомодельным. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
8. Терентьев Е. Д. Об интегралах уравнений нестационарных течений, близких к автомодельным. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
9. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О гиперзвуковом обтекании несущего профиля. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
10. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О пространственных гиперзвуковых течениях. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
12. Карликов В. П. Линеаризованная задача о распространении сильного взрыва в неоднородной атмосфере. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1959, № 4.
13. Гонор А. Л. О расположении головной волны при несимметричном обтекании заостренного тела потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 5.