

**О ВЫРОЖДЕНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ  
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОЛН  
СЖАТИЯ И РАЗРЕЖЕНИЯ**

**А. И. РЫЛОВ**

(Новосибирск)

Рассматривается сверхзвуковое изэнтропическое течение в канале, обусловленное взаимодействием центрированных волн сжатия и разрежения. Такое течение может иметь место, например, в начальной части некоторых оптимальных несимметричных сопел [1], а также при повороте сверхзвукового потока. Оно существенно зависит от поведения решения уравнения Дарбу вблизи линии вырождения при граничных условиях, заданных вне этой линии. Делается вывод, что рассматриваемое течение может быть реализовано лишь в случае, когда число Маха потока на входе в канал превосходит некоторую величину, большую единицы. Приводятся некоторые численные результаты.

1. Рассмотрим следующее сверхзвуковое изэнтропическое плоское течение в канале. Пусть в сечении  $ao$  (фиг. 1,  $a$ ) имеет место равномерный горизонтальный сверхзвуковой поток с числом Маха  $M_1$ ,  $M_1 > M_1^* > 1$ , где  $M_1^*$  — некоторое подлежащее определению число. Далее, в области  $pac$  — простая центрированная волна разрежения, в которой  $\theta - h(M) = -h(M_1)$ , где  $\theta$  — угол наклона вектора скорости, а функция  $h(M)$  для политропного газа с показателем адиабаты  $\kappa$  имеет вид

$$h(M) = \lambda \operatorname{arctg}(\lambda^{-1} \sqrt{M^2 - 1}) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}$$

Отрезок  $or$  нижней стенки горизонтален, а  $pb$  профилируется так, чтобы в точке  $d$  фокусировалась простая центрированная волна сжатия  $cdb$ , в которой  $\theta + h(M) = \theta_c + h(M_c)$ , где  $\theta_c = h(M_c) - h(M_1)$ . В области  $acd$  параметры потока постоянны:  $M = M_c$ ,  $\theta = \theta_c$ . Число Маха на характеристике  $db$  постоянно и равно  $M_1$ , а  $\theta$  на  $db$  равно  $2\theta_c$ .

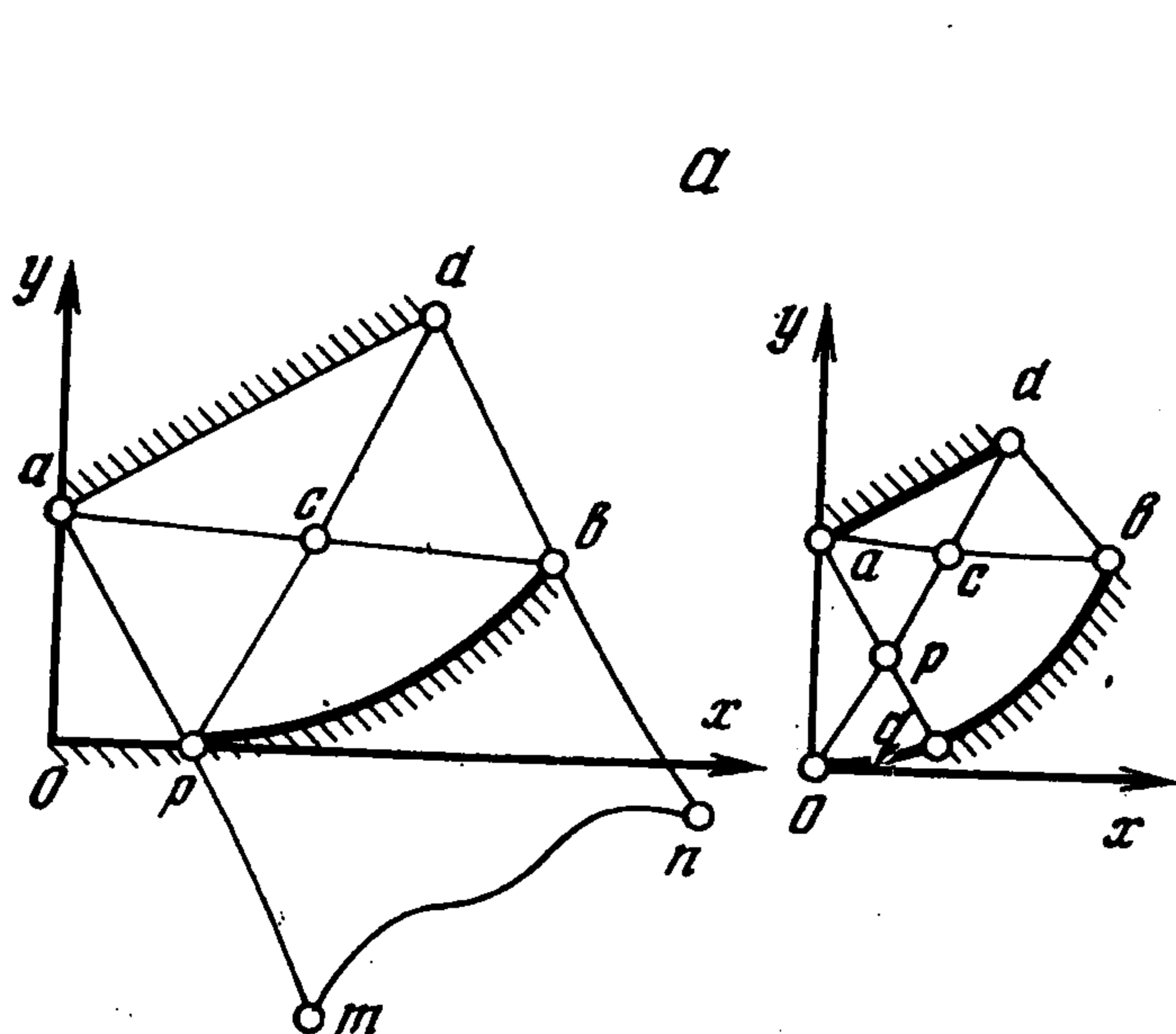
Второй канал (фиг. 1,  $b$ ) отличается от первого тем, что нижняя стенка профилируется сразу за входным сечением  $ao$ . Как следствие число Маха  $M_b$  на  $db$  определяется из следующих соотношений [1]:

$$2f(M_1) = f(M_b), \quad f(M) = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^\delta (M^2 - 1)^{-1/4}$$

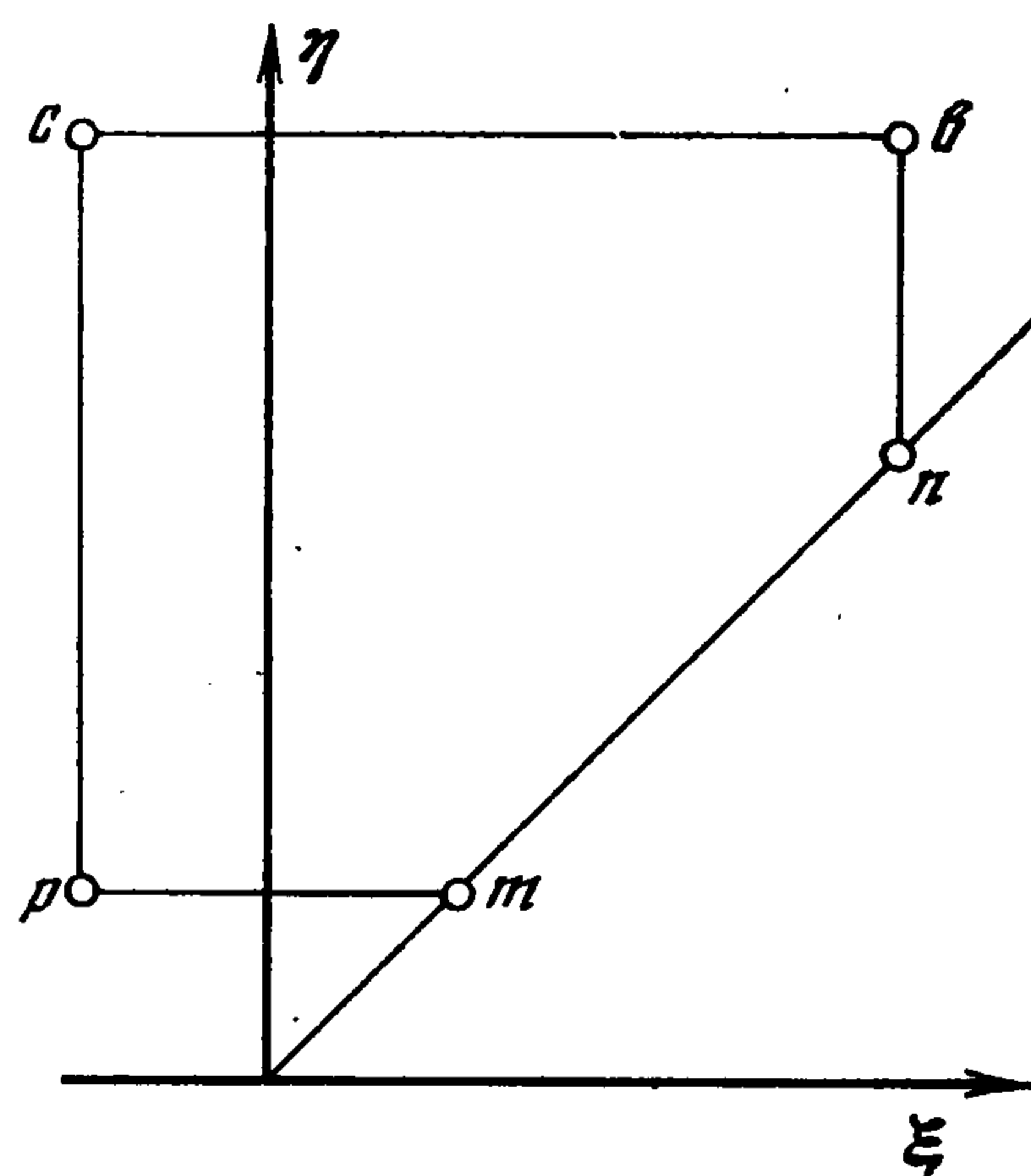
$$\delta = -\frac{1}{2(\kappa - 1)}$$

В обоих каналах интерес представляют течения в областях  $psb$  (фиг. 1,  $a$ ) и  $qrsb$  (фиг. 1,  $b$ ). Можно показать, что при достаточно большом  $M_1$  сверхзвуковые течения в этих областях, а значит и в обоих каналах, мо-

гут быть построены. С другой стороны, из соображений подобия видно, что при  $M_1 = 1$  сверхзвуковые течения в указанных каналах не реализуются. Поэтому следует ожидать, что существуют такие числа  $M_1^* = M_1^*(M_c, \kappa)$ , очевидно, различные для обоих каналов, что при  $M_1 > M_1^*$  возможно построение сверхзвуковых каналов, приведенных на фиг. 1. Выяснение этого вопроса позволит указать область допустимых значений чисел  $M_1$  для несимметричных сопел, построенных в [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

Течения в областях  $rcb$  и  $qrcb$  находятся из решения задачи Гурса по известным данным на характеристиках  $rc$  и  $cb$ . Перейдем на плоскость инвариантов Римана. Пусть  $\eta = \theta + h(M)$ ,  $\xi = \theta - h(M)$ ,  $\psi$  — функция тока, выбранная так, что  $\psi_p = 1$ ,  $\psi_a = 0$ . Тогда сверхзвуковое плоское изэнтропическое течение описывается уравнением Дарбу [2,3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} - g(\eta - \xi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = 0$$

Функция  $g(\eta - \xi)$  может быть представлена в параметрическом виде. Для политропного газа имеем [3]

$$(1.2) \quad \eta - \xi = 2h(M), \quad g(\eta - \xi) = \frac{(\kappa + 1)M^4}{8(M^2 - 1)^{3/2}} = \frac{1}{6(\eta - \xi)} + q(\eta - \xi)$$

$$|q(\eta - \xi)| < C(\eta - \xi)^{\gamma-1}, \quad C > 0, \quad \gamma > 0$$

Характеристикам  $rc$  и  $cb$  на плоскости  $\xi, \eta$  соответствуют отрезки  $rc$  и  $cb$  (фиг. 2). В случае первого канала имеем

$$\xi_p = -h(M_1), \quad \eta_p = h(M_1), \quad \xi_c = \xi_p, \quad \eta_c = 2h(M_c) - h(M_1)$$

$$\xi_b = 2h(M_c) - 3h(M_1), \quad \eta_b = \eta_c$$

В случае второго канала точка  $b$  несколько сместится вправо, не доходя до прямой  $\eta - \xi = 0$ . Значения  $\psi$  на  $rc$  и  $cb$  (фиг. 2) как функции  $\eta$  и  $\xi$  соответственно известны и могут быть выписаны в параметрической форме.

Тем самым задача о построении течения в области  $rcb$  или  $qrcb$  (фиг. 1) сводится к задаче Гурса для уравнения Дарбу (1.1) в области  $trcbn$

(фиг. 2). Здесь отрезкам  $pt$  и  $bn$  (фиг. 2) соответствуют характеристики  $pt$  и  $bn$  (фиг. 1, а) второго и первого семейств. Отрезку  $tn$  (фиг. 2), лежащему на прямой  $\eta = \xi$ , соответствует кривая  $tn$  (фиг. 1, а), и число Маха на  $tn$  равно единице.

Возможны три случая.

1°. На отрезке  $tn$  имеем  $\psi > \psi_p = 1$ . В силу этого на линии  $\psi = \psi_p = 1$  будет  $\eta - \xi > 0$ , т. е.  $M > 1$ . В этом случае в области  $rcb$  ( $orcqb$ ), фиг. 1, включая и нижнюю стенку  $ob$ , реализуется сверхзвуковое течение.

2°. На отрезке  $tn$  имеем  $\psi \geq 1$ , и при этом знак равенства выполняется хотя бы в одной точке. В этом случае в области  $rcb$  ( $orcqb$ ), фиг. 1 еще реализуется сверхзвуковое течение, но нижняя стенка будет содержать, по крайней мере, одну звуковую точку, в которой  $M = 1$ .

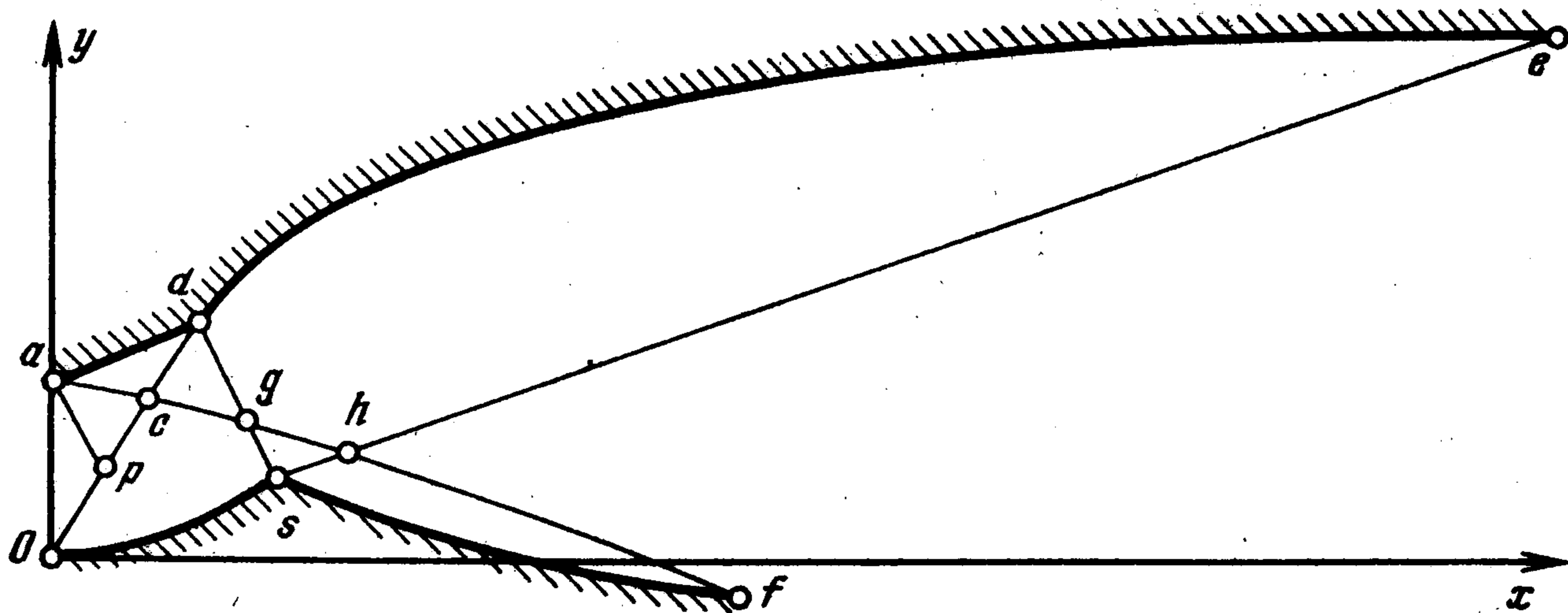
3°. На некотором участке отрезка  $tn$  имеем  $\psi < 1$ . Тогда сверхзвуковое течение в рассматриваемом канале не реализуется.

Очевидно, можно выбрать  $M_1$  и  $M_c$  такими, что реализуется первый случай. Возможность реализации второго и третьего случаев зависит от поведения решения уравнения Дарбу вблизи линии вырождения  $\eta - \xi = 0$  (согласно (1.2),  $g(\eta - \xi) \rightarrow \infty$  при  $\eta - \xi \rightarrow 0$ ) при граничных условиях, заданных вне этой линии. Исследованию этого вопроса будет посвящен п. 2. Пока лишь, ссылаясь на п. 2, укажем, что решение уравнения (1.1) с функцией  $g(\eta - \xi)$ , имеющей вид (1.2), имеет ограниченный предел при  $\eta - \xi \rightarrow 0$ , если граничные условия на  $rc$  и  $cb$  также ограничены.

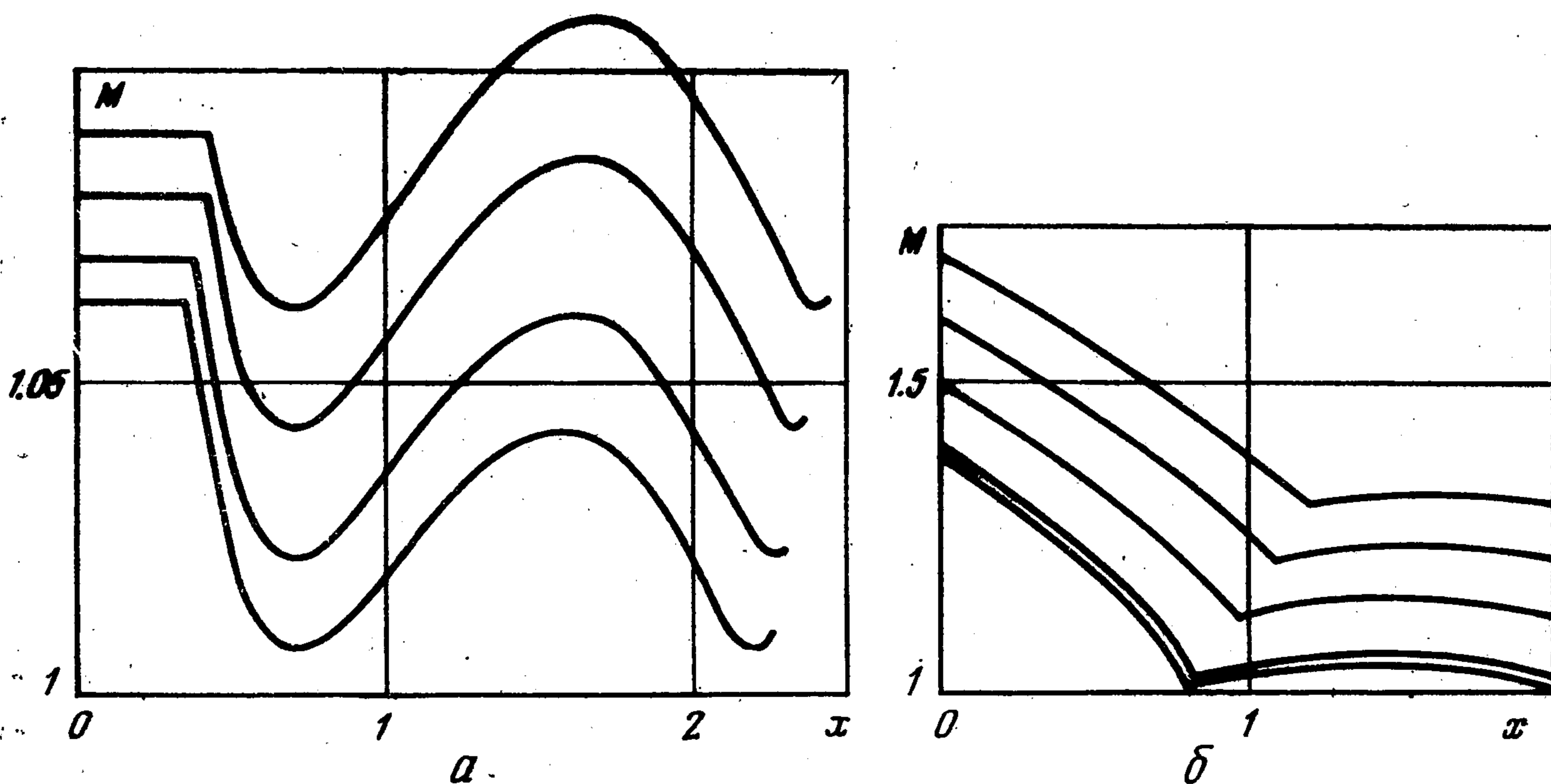
Можно показать, что применительно к рассматриваемым течениям этот факт означает следующее. Если при некоторых  $M_1$  и  $M_c$  реализуется сверхзвуковое течение, т. е. имеет место случай 1°, то, сохраняя  $M_c$  фиксированным или изменяющимся в некоторых заданных пределах и уменьшая  $M_1$  до некоторого  $M_1^* > 1$ , получим канал со сверхзвуковым течением внутри, но со звуковыми точками на нижней стенке. При дальнейшем уменьшении  $M_1$  реализуется случай 3°, и сверхзвуковое течение в канале невозможно.

Проиллюстрируем сказанное на примере первого канала. Пусть  $M_1$  и  $M_c$  таковы, что реализуется сверхзвуковое течение в канале, но, тем не менее, сверхзвуковая область влияния характеристик  $rc$  и  $cb$  ограничена прямой  $\eta - \xi = 0$  (фиг. 2). Значения  $\psi$  на отрезке  $tn$  ограничены, поэтому усеченному квадрату  $trcbn$  (фиг. 2) на физической плоскости соответствует область  $trcbn$  (фиг. 1, а) с конечными размерами, т. е. звуковая линия  $tn$  находится на конечном расстоянии от треугольника  $cad$ , и единицей измерения при этом служит характерный линейный размер треугольника, например длина отрезка  $ad$ . При фиксированном  $M_c$  с уменьшением  $M_1$  конфигурация и положение исходного отрезка звуковой линии в системе координат, связанной с треугольником  $acd$ , не меняются, хотя протяженность звуковой линии и увеличивается за счет увеличения угла  $rac$ . Так как отношение длины отрезка  $ad$  к сечению  $ao$  уменьшается до нуля при  $M_1 \rightarrow 1$ , то, следовательно, существует такое  $M_1^*$ , что при  $M_1 = M_1^*$  звуковая линия достигнет нижней стенки  $rb$  канала.

Перейдем к численным результатам, которые были получены с помощью метода характеристик. Они относятся к случаю, когда оба канала служат начальными частями сверхзвуковых несимметричных сопел, реализующих на выходе равномерный горизонтальный поток с числом Маха  $M_2$  [1]. Для этого необходимо укоротить нижний контур в некоторой точке  $s$  так, что  $x_s \leq x_b$ , и затем достроить верхний и нижний контуры,



Фиг. 3



Фиг. 4

как это показано на фиг. 3. Положение точки  $s$  выбирается так, чтобы удовлетворить требуемому условию в точке  $f$ .

Можно проверить, что числа  $M_2$ ,  $M_1$ ,  $M_c$  связаны соотношением  $2h(M_c) = h(M_2) + h(M_1)$ .

В проведенных расчетах  $M_2 = 4$ ,  $\kappa = 1.4$ ,  $x_s \leq 2$ . Здесь и далее линейные размеры отнесены к сечению  $ao$ . Распределения числа Маха вдоль  $os$  в зависимости от  $x$  даны на фиг. 4, при этом вариант  $a$  относится к первому каналу, а вариант  $b$  — ко второму. Заметим, что угловые точки на кривых соответствуют точкам  $p$  или  $q$  и что при  $x_s > 2$  на кривых (фиг. 4, б) возможен и другой минимум. Можно считать, что в рассмотренных случаях  $M_1^* \approx 1.37$  для первого канала и  $M_1^* \approx 1.06$  для второго. По крайней мере, при таких значениях не удалось провести расчетов даже при 600 точках на входной характеристике.

Отметим, что течение в области, расположенной выше линии тока, проходящей через точку  $p$  (фиг. 1, б), подобно течению в первом канале. Поэтому графики, данные на фиг. 4 и приведенные выше числа  $M_1^*$  для первого и второго каналов, характеризуют, в некоторой степени, скорость «всплывания» звуковой линии по мере уменьшения числа  $M_1$ .

2. Изучим поведение решения уравнения Дарбу вблизи линии вырождения при граничных условиях, заданных вне этой линии.

Рассмотрим задачу Гурса для уравнения Дарбу

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi_{\eta\xi} - g(\eta - \xi)(\psi_\eta - \psi_\xi) &= 0 \\ \psi &= \Phi(\xi), \quad \eta = w, \quad l \leq \xi \leq k \\ \psi &= F(\eta), \quad \xi = l, \quad t \leq \eta \leq w \end{aligned}$$

Функция  $g(z)$  определена в интервале  $0 < z < w - l$  и подчиняется следующим требованиям:  $g(z) > 0$ ,  $0 < z \leq w - l$ ;  $g(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow 0$ .

Значения  $w, t, l, k$  удовлетворяют неравенствам  $w - l > 0$ ,  $w - k > 0$ ,  $t - l > 0$ ,  $t - k < 0$ . Функции  $\Phi$  и  $F$  в указанных выше интервалах имеют непрерывные и ограниченные первые производные, т. е. можно считать, что  $|F'| \leq K$ ,  $|\Phi'| \leq K$ ,  $K < \infty$ . Кроме того,  $F(w) = \Phi(l)$ .

Далее через  $W$  обозначен «усеченный» прямоугольник  $\{l \leq \xi \leq k, t \leq \eta \leq w, \eta - \xi > 0\}$ . Примером такой области может служить усеченный квадрат на фиг. 2.

Введем вспомогательные функции  $f$  и  $\varphi$ , которые понадобятся в дальнейшем

$$f(z) = 2 \int_z^{w-l} g(z) dz, \quad \varphi(z) = e^{f(z)}$$

Обе функции определены при  $0 < z \leq w - l$ , а если особенность у функции  $g(z)$  при  $z = 0$  интегрируема, то  $f$  и  $\varphi$  определены и при  $z = 0$ .

**Теорема 1.** В области  $W$ , за исключением точек  $\eta - \xi = 0$ , задача (2.1) имеет единственное решение. При этом для  $\psi_\eta$  и  $\psi_\xi$  справедливы оценки

$$(2.2) \quad |\psi_\eta| \leq K\varphi(\eta - \xi), \quad |\psi_\xi| \leq K\varphi(\eta - \xi)$$

где  $K$  — постоянная, ограничивающая сверху  $|F'|$  и  $|\Phi'|$ , а  $\varphi(\eta - \xi)$  — функция, определенная выше.

**Доказательство.** В области  $W$ , за исключением точек  $\eta - \xi = 0$ , задача (2.1) может быть заменена эквивалентной системой интегральных уравнений

$$(2.3) \quad \begin{aligned} v &= \int_l^\xi g(\eta - \xi)(v - u) d\xi + F'(\eta) \\ u &= - \int_\eta^w g(\eta - \xi)(v - u) d\eta + \Phi'(\xi) \quad (v = \psi_\eta, u = \psi_\xi) \end{aligned}$$

Решаем эту систему методом последовательных приближений. Пусть

$$(2.4) \quad \begin{aligned} v_0 &= F'(\eta), \quad u_0 = \Phi'(\xi) \\ v_n &= \int_l^\xi g(\eta - \xi)(v_{n-1} - u_{n-1}) d\xi + F'(\eta) \\ u_n &= - \int_\eta^w g(\eta - \xi)(v_{n-1} - u_{n-1}) d\eta + \Phi'(\xi), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для доказательства сходимости этих последовательностей и их оценок рассмотрим разности  $v_{n+1} - v_n$ ,  $u_{n+1} - u_n$ . Можно доказать по индукции,

что

$$(2.5) \quad |v_n - v_{n-1}| \leq K \frac{(f(\eta - \xi))^n}{n!}, \quad |u_n - u_{n-1}| \leq K \frac{(f(\eta - \xi))^n}{n!}$$

Из (2.5), используя определение функции  $\varphi(z)$ , имеем

$$\sum_1^{\infty} |v_n - v_{n-1}| \leq K \sum_1^{\infty} \frac{(f(\eta - \xi))^n}{n!} = K(\varphi(\eta - \xi) - 1)$$

$$\sum_1^{\infty} |u_n - u_{n-1}| \leq K(\varphi(\eta - \xi) - 1)$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что последовательности  $v_n, u_n$  тоже сходятся к некоторым пределам, и для  $\psi_\eta = v = \lim v_n$  и  $\psi_\xi = u = \lim u_n$  справедливы оценки (2.2). Переходя к пределам в формулах (2.4), видим, что предельные функции  $u, v$  удовлетворяют системе (2.3), т. е. служат решением задачи (2.1).

Единственность построенного решения может быть доказана стандартным приемом, и на этом останавливаться не будем.

Заметим, что существование и единственность решения задачи (2.1) в области  $W$ , за исключением полосы  $0 < \eta - \xi \leq \varepsilon$ , вытекает из теоремы, приведенной, например, в [4]. Но построенные там оценки не позволяют осуществить предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , так как они содержат величину  $A = \max g(\eta - \xi)$ , неограниченно возрастающую при  $\eta - \xi \rightarrow 0$ .

Рассмотрим некоторые свойства решения при  $\eta - \xi \rightarrow 0$ .

**Теорема 2.** Если при  $z \rightarrow 0$  функция  $g(z)$  стремится к бесконечности медленнее, чем  $z^{-\beta}$ ,  $\beta < 1$ , то  $\psi, \psi_\eta, \psi_\xi$  имеют конечные пределы при  $\eta - \xi \rightarrow 0$ . Если функция  $g(z)$  представима в виде  $g(z) = \alpha z^{-1} + q(z)$ , где  $|q(z)| < Cz^{\gamma-1}$ ,  $C > 0$ ,  $\gamma > 0$ , то при  $\alpha < 1/2$  функция  $\psi$  имеет конечный предел при  $\eta - \xi \rightarrow 0$ . (Напомним, что в таком виде представима функция  $g$  уравнения Дарбу (1.1), описывающего плоские сверхзвуковые течения политропного газа, и при этом  $\alpha = 1/6$ .)

Справедливость обоих утверждений вытекает из оценок (2.2), определения функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  и из того, что особенность типа  $z^{-\lambda}$  интегрируема при  $z \rightarrow 0$ , если  $\lambda < 1$ .

Автор благодарит А. Н. Крайко и В. Н. Врагову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 20 II 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов А. И. Решение вариационной задачи о профилировании сопла, реализующего равномерный сверхзвуковой поток. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
2. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Изд-во Новосиб. ун-та 1967.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.