

## О РЕЖИМЕ ПРИСОЕДИНЕННОГО СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ НА КРОМКАХ V-ОБРАЗНОГО КРЫЛА

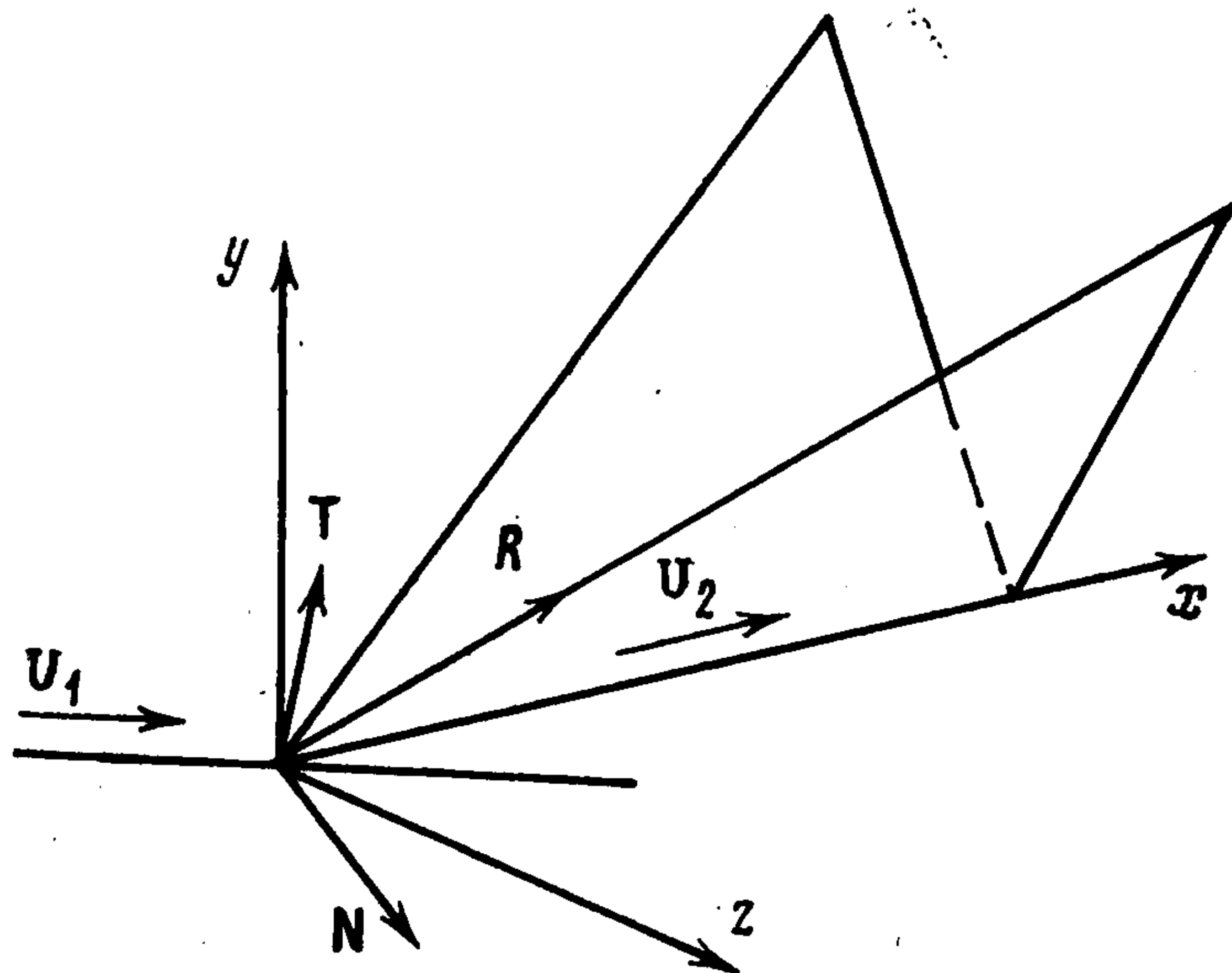
А. В. Гришин, Э. Г. Шифрин

(Москва)

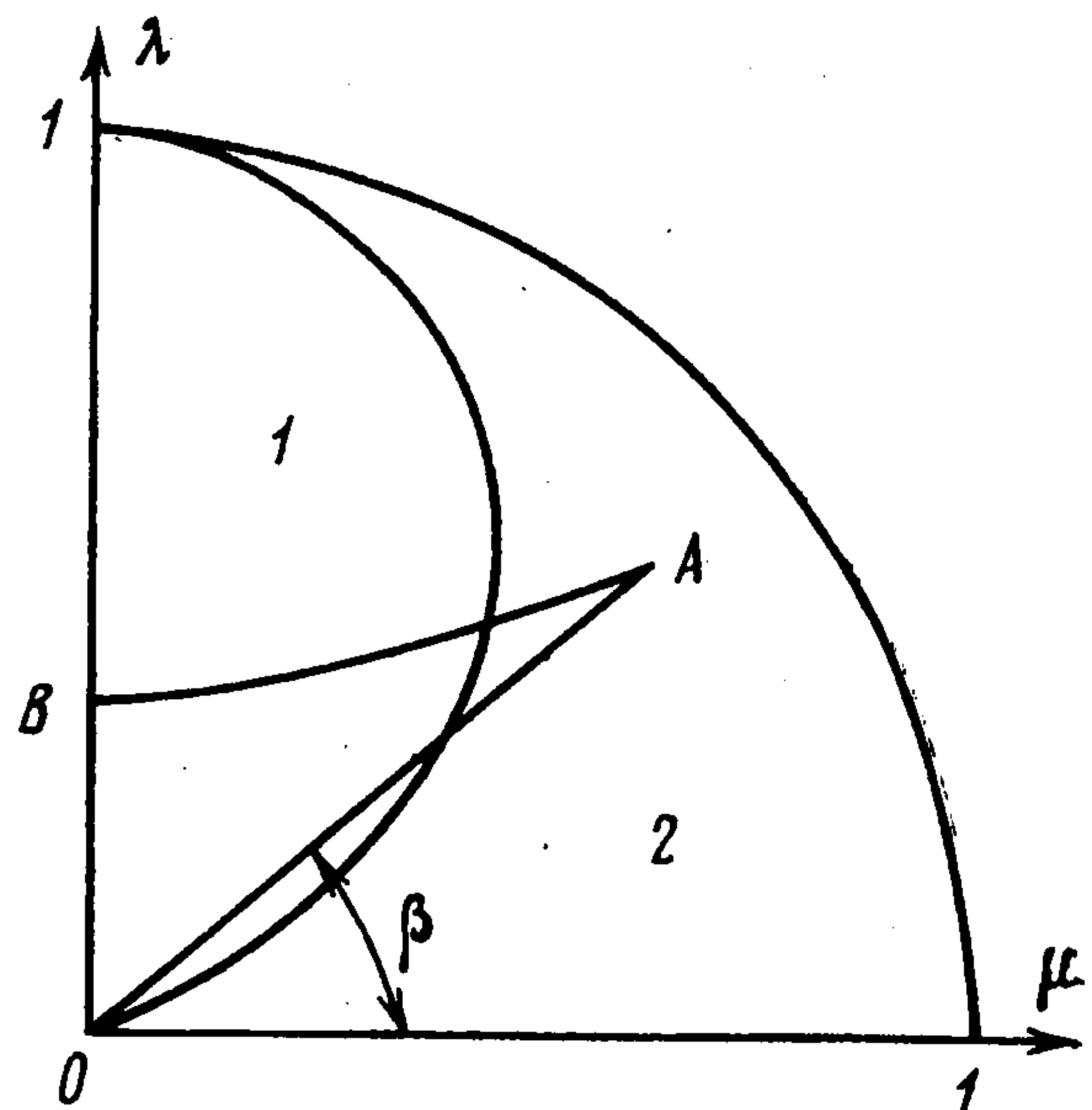
Рассматривается задача сверхзвукового обтекания V-образного крыла в трансзвуковом приближении. В линейной постановке исследуется поведение решения на режимах, близких к течению с плоским скачком уплотнения, натянутым на кромки. Математическая задача сводится к краевой задаче Римана для аналитических функций. Исследован характер течения при малых возмущениях скорости набегающего потока. Показано, что если плоский скачок уплотнения на кромках крыла в плоскости, перпендикулярной кромке, является слабым, то при вариации числа Маха характер течения не нарушается. Если же в основном течении скачок сильный, то при изменении параметров течения происходит перестройка потока. Рассматриваемая задача связана с проблемой обтекания звездообразных тел, которая исследовалась в [1-5]; процесс перестройки режима обтекания V-образного крыла изучался численным методом в [6] и экспериментально в [7].

Звездообразные тела являются телами наименьшего сопротивления, величина которого зависит от характера их обтекания. Звездообразное тело можно представить себе состоящим из некоторого числа V-образных крыльев. Для таких крыльев можно построить класс точных решений с плоским скачком на кромках. Для этого рассмотрим плоское сверхзвуковое обтекание клина. Через вектор скорости за скачком уплотнения на клине проведем две плоскости, симметричные относительно нормали к клину. Части плоскостей между поверхностью клина и скачком уплотнения образуют V-образное крыло, на кромках которого реализуется плоский скачок уплотнения. При сверхзвуковом обтекании конечного клина всегда реализуется слабый скачок уплотнения [8]. Однако аналог уравнения ударной волны в плоскости, перпендикулярной кромке крыла, показывает, что в зависимости от угла раствора крыла точное решение соответствует либо слабому, либо сильному скачку уплотнения. Для определения конфигурации течения при малых возмущениях течения с плоским скачком уплотнения на кромках, в зависимости от типа скачка в плоскости, перпендикулярной кромке, формулируется краевая задача. Характер течения определяется из условий ее разрешимости.

1. Рассмотрим задачу в трансзвуковом приближении. Пусть при слабо сверхзвуковом обтекании на кромках V-образного крыла реализуется плоский скачок уплотнения. В системе координат, связанной с ребром крыла (ось  $x$  направлена вдоль ребра крыла, ось  $y$  находится в плоскости симметрии крыла, см. фиг. 1), трансзвуковые составляющие скорости  $U = (1 + u, v, w)$  перед ударной волной будут  $u = u_{01}, v = v_{01}, w = 0$ , а за волной —  $u = u_{02}, v = 0, w = 0$  (скорости считаем отнесенными к скорости звука). Это решение назовем невозмущенным. Определим решение задачи при малых возмущениях скорости набегающего потока



Фиг. 1



Фиг. 2

методом малого параметра. Пусть  $\varepsilon$  — малый параметр, тогда компоненты скорости перед ударной волной —  $u = u_{01}(1 + \varepsilon)$ ,  $v = v_{01}$ ,  $w = 0$ , а за волной —  $u = u_{02} + u'$ ,  $v = v'$ ,  $w = w'$ . В трансзвуковом приближении рассматриваемое течение потенциально, и его потенциал удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

Так как течение обладает конической симметрией и все решения зависят от переменных  $\xi = z/x$  и  $\eta = y/x$ , введем в рассмотрение потенциал  $\varphi(\xi, \eta) = \Phi(x, y, z)/x$ . Компоненты скорости выразятся следующим образом:

$$(1.1) \quad u = \varphi - \xi\varphi_\xi - \eta\varphi_\eta = \varphi - \xi w - \eta v, \quad v = \varphi_\eta, \quad w = \varphi_\xi$$

Потенциал  $\varphi$  представим в виде  $\varphi = \varphi_0 + \varphi' = u_{02} + \varphi'$ , где  $\varphi_0 = u_{02}$  — потенциал невозмущенного течения. Линеаризованное уравнение для  $\varphi'$  имеет вид ( $u_{02} = k^2$ )

$$(1.2) \quad (1 - k^2\xi^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \xi^2} - 2k^2\xi\eta \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \xi \partial \eta} + (1 - k^2\eta^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial \eta^2} = 0$$

Ему эквивалентна система

$$(1.3) \quad (1 - k^2\xi^2) \frac{\partial w'}{\partial \xi} - 2k^2\xi\eta \frac{\partial v'}{\partial \xi} + (1 - k^2\eta^2) \frac{\partial v'}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial \xi} = \frac{\partial w'}{\partial \eta}$$

Из (1.1) и (1.2) следует уравнение для  $w'$

$$(1.4) \quad (1 - k^2\xi^2) \frac{\partial^2 w'}{\partial \xi^2} - 2k^2\xi\eta \frac{\partial^2 w'}{\partial \xi \partial \eta} + (1 - k^2\eta^2) \frac{\partial^2 w'}{\partial \eta^2} = 2k^2 \left( \xi \frac{\partial w'}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial w'}{\partial \eta} \right)$$

Режим с сильным скачком уплотнения в плоскости, перпендикулярной кромке крыла, принадлежит области эллиптичности ( $\xi^2 + \eta^2 < 1/k^2$ ) уравнения (1.4) (см. п. 3). Сформулируем краевую задачу для уравнения (1.4). Область  $T$ , в которой ищется решение, представляет собой треугольник, образованный следами поверхности крыла, ударной волны и плоскости симметрии и расположенный внутри круга радиуса  $1/k$ .

Уравнение скачка уплотнения в плоскости  $(\xi, \eta)$  в невозмущенном течении имеет вид  $\eta = \eta_0 = \text{const}$ . Для возмущенного течения уравнение скачка можно представить в виде  $\eta = \eta_0 + \eta'$ , причем в точке  $A$

$$(1.5) \quad \eta' = 0$$

Последнее соответствует предположению, что при малых возмущениях скачок остается присоединенным к кромке крыла. На скачке уплотнения имеют место условия, первое из которых соответствует непрерывности потенциала, а второе имеет вид ударной поляры

$$(1.6) \quad [u + \xi w + \eta v] = [\varphi] = 0$$

$$(1.7) \quad [u]^2 u_* = [w]^2 + [v]^2$$

Здесь  $[f]$  — скачок величины  $f$  при переходе через ударную волну,  $u_*$  — полусумма значений  $u$  до и после скачка. Из (1.6) получим условия непрерывности потенциала невозмущенного течения и потенциала возмущений

$$(1.8) \quad u_{01} + \eta_0 v_{01} = u_{02}, \quad \varphi' = \varepsilon u_{01} + \eta' v_{01} = u' + \eta_0 \partial \varphi' / \partial \eta + \xi \partial \varphi' / \partial \xi$$

Условие (1.7) распадается на уравнение ударной поляры для невозмущенного течения и для составляющих возмущения скорости

$$(1.9) \quad \begin{aligned} (u_{02} - u_{01})^2 (u_{02} + u_{01}) / 2 &= v_{01}^2, \quad au' + v' + b = 0 \\ 2v_{01}a &= (u_{02} - u_{01})^2 / 2 + u_{02}^2 - u_{01}^2 \\ 2v_{01}b &= \varepsilon u_{01} [(u_{02} - u_{01})^2 / 2 - u_{02}^2 + u_{01}^2] \end{aligned}$$

Из (1.8) и (1.9) получим

$$(1.10) \quad v_{01} = 2(c^2 - 1) / \eta_0^3, \quad u_{01} = (2 - c^2) / \eta_0^2, \quad u_{02} \eta_0^2 = c^2$$

Используя (1.1), перепишем последнее из соотношений (1.9) в виде  $a\varphi' + \varphi_{\eta'} (1 - a\eta_0) - \varphi_{\xi'} a\xi + b = 0$ . Дифференцируя это соотношение вдоль ударной волны, получим следующее краевое условие для уравнения (1.4):

$$(1.11) \quad \eta = \eta_0, \quad a\xi w_{\xi'} - (1 - a\eta_0)w_{\eta'} = 0$$

На поверхности крыла имеет место условие непротекания  $v' = w' \operatorname{tg} \beta$ . Дифференцируя его вдоль крыла и используя уравнения (1.3), получим краевое условие в виде

$$(1.12) \quad \eta - \xi \operatorname{tg} \beta = 0, \quad (2 - k^2 \xi^2 / \cos^2 \beta) \operatorname{tg} \beta w_{\xi'} - (1 - \operatorname{tg}^2 \beta + k^2 \xi^2 \operatorname{tg}^2 \beta / \cos^2 \beta) w_{\eta'} = 0$$

На плоскости симметрии  $w' = 0$ , что приводит к условию

$$(1.13) \quad \xi = 0, \quad w_{\eta'} = 0$$

Отметим, что формулировка краевой задачи в случае точных уравнений газовой динамики оказывается аналогичной (вместо потенциала скорости фигурирует давление).

2. Сведем задачу (1.4), (1.11) — (1.13) к исследованию соответствующей задачи Римана на окружности. Преобразование координат

$$(2.1) \quad \xi = 2\mu / [k(1 + \mu^2 + \lambda^2)], \quad \eta = 2\lambda / [k(1 + \mu^2 + \lambda^2)]$$

которое отображает внутренность круга радиуса  $1/k$  на внутренность единичного круга в плоскости  $(\mu, \lambda)$ , сводит уравнение (1.4) в области эллиптичности к уравнению Лапласа. Область  $T$  отобразится при этом на область  $OAB$  (фиг. 2). Прямая  $\eta = \eta_0$  отображается на кривую  $\lambda = [1 - \sqrt{1 - c^2(1 + \mu^2)}] / c$ . Участки границы  $OA$  и  $OB$  претерпевают лишь растяжение, так как преобразование (2.1) сохраняет полярные углы. Точка  $A$  является точкой пересечения кривых  $\lambda = [1 - \sqrt{1 - c^2(1 + \mu^2)}] / c$  и  $\lambda = \mu \operatorname{tg} \beta$ . Краевые условия для уравнения Лапласа на  $OA$ ,  $AB$  и  $BO$  будут соответственно следующими:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w'_\mu - w'_\lambda [\mu^2 + \cos^4 \beta (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)] / [2 \operatorname{tg} \beta \cos^4 \beta] &= 0 \\ w'_\mu \mu [(1 + c^2)c - 2\lambda] - w'_\lambda [\lambda(1 - c^2)c - 2\mu^2] &= 0, \quad w'_\lambda = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что краевые условия имеют вид  $Sw'_\mu - Lw'_\lambda = 0$ . Таким образом, задача (2.2) представляет собой задачу с косо́й производной для уравнения Лапласа, которая сводится к задаче Гильберта для аналитических функций. Положим  $f = w'_\mu$ ,  $g = -w'_\lambda$ . Функция  $F(z) = f(\mu, \lambda) + ig(\mu, \lambda)$  аналитична и удовлетворяет на границе области разрывному краевому условию

$$(2.3) \quad S(\tau)f(\tau) + L(\tau)g(\tau) = 0$$

Пусть функция  $r = R(z)$  осуществляет конформное отображение области  $OAB$  на единичную окружность. Сформулируем задачу Гильберта для круга. Краевое условие (2.3) в плоскости  $r$  имеет вид

$$(2.4) \quad \begin{aligned} S_1(t)f_1(t) + L_1(t)g_1(t) &= 0 \\ S_1(R(\tau)) &= S(\tau), \quad L_1(R(\tau)) = L(\tau), \quad f_1(R(\tau)) = f(\tau) \\ g_1(R(\tau)) &= g(\tau) \end{aligned}$$

В точках  $t_1, t_2, t_3$ , соответствующих точкам  $O, A, B$ , функции  $S_1(t), L_1(t)$  терпят разрыв. Решение задачи Гильберта для круга совпадает с внутренним решением соответствующей задачи Римана [9]

$$(2.5) \quad F_1^+(t) = G_1(t)F_1^-(t), \quad G_1(t) = [S_1(t) + iL_1(t)] / [S_1(t) - iL_1(t)]$$

Таким образом исследование задачи обтекания  $V$ -образного крыла сводится к исследованию задачи Римана с разрывным коэффициентом на окружности.

Пусть  $(-\theta_k)$  — скачок аргумента функции  $S_1(t) + iL_1(t)$  в точке разрыва  $t_k$ , причем  $(-\theta_k)$  равно скачку аргумента функции  $S(\tau) + iL(\tau)$  в соответствующей точке разрыва  $\tau_k$ . Скачок аргумента  $G_1(t)$  в точке  $t_k$  равен  $(-2\theta_k)$ . Задача Римана с разрывным коэффициентом может быть сведена к задаче Римана с непрерывным коэффициентом [9]

$$(2.6) \quad F_2^+(t) = G_2(t)F_2^-(t), \quad G_2(t) = \prod_{k=1}^3 (t - r_0)^{-\gamma_k} G_1(t)$$

Решение задачи (2.5) выражается через решение задачи (2.6) согласно соотношению

$$F_1^+(r) = \prod_{k=1}^3 (r - t_k)^{\gamma_k} F_2^+(r), \quad \operatorname{Re} \gamma_k = \frac{\theta_k}{\pi} - \kappa_k$$

Здесь  $\kappa_k = [\theta_k / \pi]$ , если в точке  $t_k$  требуется ограниченность решения, и  $\kappa_k = [\theta_k / \pi + 1]$ , если в точке  $t_k$  допускается интегрируемая бесконечность [9]. В рассматриваемой задаче существенным является требование интегрируемости  $F(z)$  в плоскости  $z$ , что эквивалентно требованию ограниченности  $w'$ . Определим характер поведения решения в плоскости  $z$ . Функция  $R(z)$ , осуществляющая отображение области  $OAB$  на круг, в окрестности угловых точек представима в виде  $r = t_k + C_k (z - \tau_k)^{\pi/\alpha_k} + \dots$ , где  $\alpha_k$  — угол между касательными к границе области  $OAB$  в угловой точке  $\tau_k$ . Тогда решение задачи в окрестности этих точек имеет вид  $F(z) = F_1^+(R(z)) = C_k' (z - \tau_k)^{\pi\gamma_k/\alpha_k} F_2^+(R(z))$ . Таким образом решение в точках  $\tau_k$  при условии

$$(2.7) \quad \operatorname{Re}(\pi\gamma_k / \alpha_k) > -1$$

допускает интегрируемую бесконечность. Исходя из этого, определим числа  $\kappa_k$ . Рассмотрим два случая:  $0 \leq \theta_k < \pi$  и  $-\pi \leq \theta_k < 0$ . Допустим, что при  $0 \leq \theta_k < \pi$   $F_1^+(r)$  имеет интегрируемую бесконечность в точке  $t_k$ . Тогда  $\kappa_k = 1$ ,  $\operatorname{Re} \gamma_k = \theta_k / \pi - 1$ . Из (2.7) следует, что для интегрируемости в плоскости  $z$  необходимо выполнение условия  $\theta_k > \pi - \alpha_k$ . При  $\theta_k \leq \pi - \alpha_k$  из ограниченности решения в  $r$  следует  $\kappa_k = 0$ , тогда  $\operatorname{Re} \gamma = \theta_k / \pi$  и удовлетворяется условие (2.7). Перейдем теперь к случаю  $-\pi \leq \theta_k < 0$ . Допустим, что  $F_1^+(r)$  имеет в точке  $t_k$  интегрируемую бесконечность. Тогда  $\kappa_k = 0$  и  $\operatorname{Re} \gamma_k = \theta_k / \pi$ . Из (2.7) следует, что для интегрируемости в плоскости  $z$  необходимо выполнение условия  $\theta_k > -\alpha_k$ . При  $\theta_k \leq -\alpha_k$  из ограниченности решения в  $r$  следует  $\kappa_k = -1$ , тогда  $\operatorname{Re} \gamma_k = \theta_k / \pi + 1$  и условие (2.7) выполняется.

Перейдем к анализу краевых условий. Отметим, что нигде на границе области  $OAB$   $S$  и  $L$  не обращаются в нуль одновременно. На границе  $OAB$  имеем  $S \geq 0$ , следовательно, при обходе контура  $OAB$  ни на одном из его участков аргумент функции  $S + iL$  не может измениться более чем на  $\pi$ . Так как аргумент функции  $S + iL$  на каждом участке границы определяется с точностью до  $2\pi$ , а выбор ветви аргумента не оказывает влияния на окончательный результат, примем значение аргумента равным  $\operatorname{arctg}(L/S)$ . Тогда  $|\theta_k| < \pi$  и числа  $\kappa_k$  определяются согласно указанному выше методу. Как видно из соотношений (2.2), при таком выборе ветвей аргумента устраняется разрыв краевого условия в точке  $B$ . Задача состоит теперь в определении чисел  $\kappa_k$  в зависимости от положения точки  $A$ . Обозначим величины  $\theta_k, \alpha_k, \kappa_k$  в точках  $O$  и  $A$  соответственно  $\theta_1, \alpha_1, \kappa_1$  и  $\theta_2, \alpha_2, \kappa_2$ . Фиксируя  $c$ , проследим за изменением величин  $\theta_k$  и  $\alpha_k$  в точках  $O$  и  $A$  при перемещении точки  $A$  вдоль кривой  $\lambda = [1 - \sqrt{1 - c^2(1 + \mu^2)}] / c$ . На основании выражений (2.2) и метода определения чисел  $\kappa_k$  получим, что независимо от положения точки  $A$ , в точке  $O$  выполняется условие  $-\alpha_1 < \theta_1 < \pi - \alpha_1$  и, следовательно, в точке  $O$  следует положить  $\kappa_1 = 0$  для того, чтобы обеспечить интегрируемость решения в плоскости  $z$ . Если точка  $A$  находится в области, лежащей слева от кривой, соответствующей условию  $\sin^2 \beta = (c^2 + 1) / 2$ , имеем  $-\pi < \theta_2 < -\alpha_2$ , а в области справа от кривой  $-\alpha_2 < \theta_2 < \pi - \alpha_2$ . Назовем эти области соответственно

сильной и слабой (области 1 и 2 на фиг. 2). Из метода определения  $\kappa_k$  следует, что для обеспечения интегрируемости решения в плоскости  $z$  в сильной области необходимо положить  $\kappa_2 = -1$ , а в слабой —  $\kappa_2 = 0$ .

Обозначим  $\kappa$  индекс задачи (2.5). Как известно

$$\kappa = \sum_k \kappa_k$$

т. е. в сильной области  $\kappa = -1$ , а в слабой  $\kappa = 0$ . В соответствии с теоремой [9] отсюда следует, что в сильной области задача неразрешима, а в слабой имеет одно линейно-независимое решение. Тривиальное решение не следует принимать во внимание, так как оно не удовлетворяет условию (1.5).

3. Выясним теперь физический смысл полученного результата. Для аналога ударной поляры в плоскости, перпендикулярной кромке крыла, слабая область соответствует слабому скачку уплотнения, а сильная область — сильному скачку. Используя соотношения (1.10) и обозначая трансзвуковые составляющие скорости звездочкой, получим

$$U_{1R}^* = \sin \beta / \eta_0, \quad U_{1N}^* = (2 - c^2 - 1/2 \sin^2 \beta) / \eta_0^2, \quad U_{1T}^* = 0$$

$$U_{2R}^* = \sin \beta / \eta_0, \quad U_{2N}^* = (c^2 - 1/2 \sin^2 \beta) / \eta_0^2, \quad U_{2T}^* = 2(1 - c^2) \cos \beta / \eta_0^3$$

Здесь  $U_{iR}$ ,  $U_{iN}$  и  $U_{iT}$  ( $i = 1, 2$ ) — составляющие скоростей по направлениям  $R$ ,  $N$  и  $T$ , где  $R$  — единичный вектор, направленный вдоль кромки крыла,  $N$  — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором  $U_1 - U_{1R}R$ , который лежит в плоскости, перпендикулярной  $R$ ,  $T = R \times N$  (см. фиг. 1).

Трансзвуковые составляющие удовлетворяют аналогу уравнения ударной поляры

$$(3.1) \quad U_{2T}^* = \sqrt{(U_{1N}^* + U_{2N}^* - U_{1R}^{*2}) / 2} (U_{1N}^* - U_{2N}^*)$$

При условии  $dU_{2T}^* / dU_{2N}^* > 0$  имеем сильный скачок уплотнения, а при  $dU_{2T}^* / dU_{2N}^* < 0$  — слабый. Из (3.1) получим

$$\frac{dU_{2T}^*}{dU_{2N}^*} = \frac{-U_{1N}^* - 3U_{2N}^* + U_{1R}^{*2}}{\sqrt{8(U_{1N}^* + U_{2N}^* - U_{1R}^{*2})}}$$

Подставляя в это соотношение выражения для  $U_{1N}^*$ ,  $U_{2N}^*$  и  $U_{1R}^*$ , найдем, что при условии  $\sin^2 \beta > (1 + c^2) / 2$  в плоскости, перпендикулярной кромке крыла, имеет место сильный скачок уплотнения, а при условии  $\sin^2 \beta < (1 + c^2) / 2$  — слабый.

Таким образом, разрешимость сформулированной краевой задачи зависит от типа скачка уплотнения в плоскости, перпендикулярной кромке крыла. Если скачок слабый, то течение не изменяет своего характера, т. е. при малых возмущениях происходит деформация скачка уплотнения, если же скачок сильный, то решения задачи не существует, что свидетельствует о принципиальной перестройке течения. Вопрос о характере течения в этом случае требует отдельного рассмотрения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. К исследованию тел наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
  2. Майкапар Г. И. О построении сверхзвукового течения обтекания твердых тел при помощи плоских скачков уплотнения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
  3. Гонор А. Л. Конические тела наименьшего сопротивления в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
  4. Келдыш В. В. Тела с протоком, обтекаемые с плоскими и коническими скачками уплотнения. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
  5. Зайцев Ю. И., Келдыш В. В. Особые случаи течения вблизи сверхзвуковой кромки и линии пересечения скачков уплотнения. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
  6. Лапыгин В. И. О решении задачи обтекания V-образного крыла с сильной ударной волной на передней кромке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
  7. Зубин М. А., Остапенко Н. А. Экспериментальное исследование некоторых особенностей сверхзвукового обтекания V-образных крыльев. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
  8. Франкль Ф. И. К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком. ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
  9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., «Наука», 1974.
-