Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 533.6.011

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В ЗАДАЧЕ О НЕСТАЦИОНАРНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ

П. А. Вельмисов

(Ульяновск)

Показано, что при некоторых условиях линейное разложение в задаче о неустановившемся обтекании тонкого профиля свехзвуковым потоком газа нерегулярно в окрестности головной ударной волны. Получено нелинейное уравнение, описывающее течение в области нерегулярности, и проведено сращивание линейного и нелинейного разложений. Получены уравнения общего вида, описывающие течение в окресности слабых ударных волн, совпадающих в линейной теории с характеристиками.

1. Рассмотрим класс нестационарных задач сверхзвукового обтекания, для которых слабовозмущенная область течения отделена от области однородного потока в линейной постановке поверхностью $\xi = x - \beta y = 0$ ($\beta = (M^2 - 1)^{1/2}$, $M = Ua^{-1}$; M, a — число Маха и скорость звука для однородного потока). Такие течения возникают, например, при сверхзвуковом обтекании нестационарного точечного источника малых возмущений, при обтекании сверхзвуковым потоком тонкого заостренного профиля или некоторой незначительной выпуклости на плоскости или на цилиндрической поверхности (о задачах нестационарного сверхзвукового обтекания см., например, [1-5] и обзоры в этих книгах).

Линейное разложение для потенциала скорости зададим в виде

$$\Phi(x, y, t) = Ux + \delta\varphi_1(\xi, y, t) + \delta^2\varphi_2(\xi, y, t) + \ldots \tag{1.1}$$
$$\xi = x - \beta y$$

Здесь Φ, x, y, t — безразмерные потенциал скоростей, координаты, время, отнесенные соответственно к $a_*^2 t_0$, $a_* t_0$, t_0, где a_* — скорость звука для звукового потока.

Пусть условия задачи таковы, что в окрестности границы возмущенной области $\xi = 0$ потенциал φ_1 имеет вид

$$\varphi_1 = E(y, t)\,\xi^m \ln^n\xi + T(y, t)\,g(\xi) + \ldots, \quad g(\xi) \ll \xi^m \ln^n \xi \tag{1.2}$$

Значения m, n должны быть такие, что $\varphi_1(\xi = 0) = 0$. Тогда для $E(y, t)$ из линейного уравнения для φ_1 имеем

$$2UE_t + a^2\beta\left(2E_y + \frac{\omega}{y}E\right) = 0, \quad E = E_0(\eta)\,y^{-\omega/2}, \quad \eta = y - \frac{a\beta}{M}t \tag{1.3}$$

Здесь $E_0(\eta)$ — произвольная функция, $\omega = 0$ для плоских, $\omega = 1$ для осесимметричных течений.

Разложение (1.2) соответствует, например, обтеканию поверхности, уравнение которой в линейной теории для малых x имеет вид (в носике профиля $x = y = 0$)

$$y = \delta y_0(x, t) = \delta\, h(t)\, x^m \ln^n x + h_1(t)\, g(x) + \ldots \tag{1.4}$$

Для осесимметричных течений можно рассмотреть внешнее обтекание цилиндрической поверхности $y = y^* + \delta y_0(x, t)$, $y^* = \mathrm{const} \neq 0$. Тогда переменную ξ нужно задать в виде $\xi = x - \beta(y - y^*)$. Из (1.4) следует, что профиль будет заостренным для значений $m = 1$, $n \leqslant 0$ или $m > 1$, которые и будем в дальнейшем рассматривать. Из (1.2) следует: если $m = 1$, $n = 0$ (угол α между касательной к профилю и осью x при $x = 0$ ненулевой), то в линейной постановке $\xi = 0$ — ударная волна интенсивности $\Delta P \sim \delta$; если $m = 1$, $n < 0$ или $m > 1$ ($\alpha = 0$), то потенциал и скорости при $\xi = 0$ непрерывны и $\xi = 0$ — характеристика, являющаяся поверхностью слабого разрыва.

Заметим, что для некоторых m, n, $g(\xi)$ имеем $\varphi_{1\xi\xi}(\xi = 0) = \infty$. Если на характеристике $\xi = 0$ будет $\Phi = Ux$, то точное уравнение для потенциала $\Phi(\xi, y, t)$ дает для определения $z(y, t) = \Phi_{\xi\xi}(\xi = 0)$ нелинейное уравнение

$$2Uz_t + a^2\beta\left(2z_y + \frac{\omega}{y} z\right) + (\varkappa + 1)UM^2z^2 = 0 \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что $\Phi(\xi = 0) = Ux + z\,\xi^2$, и ускорение $\Phi_{\xi\xi}(\xi = 0)$ или является величиной порядка единицы ($z = z(y, t) \neq 0$), или равно нулю ($z = 0$). Однако линейная теория не дает возможности удовлетворить условию конечности ускорения (в линейной теории $\Phi_{\xi\xi} = \delta\varphi_{1\xi\xi} \sim \delta \ll 1$), что и является причиной обращения в таких случаях $\varphi_{1\xi\xi}(\xi = 0)$ в ∞. Линейная теория предполагает ускорение $\Phi_{\xi\xi}$ малым и дает для $\varphi_{1\xi\xi}(\xi = 0)$ линейное уравнение (1.5) без последнего члена. Аналогичное исследование для конических стационарных течений проводилось в [6].

Двучленное линейное разложение (внешнее [7–9]) в окрестности $\xi = 0$ для $m > 1$ или $m = 1$, $n < 0$ ($\alpha = 0$) имеет вид ($\xi \to 0$; $y, t \sim 1$; значения M конечны и не близки к единице)

$$\begin{gathered}\Phi = Ux + \delta\left[E_0(\eta)\, y^{-\omega/2}\xi^m \ln^n \xi + \ldots\right] + \\ + \delta^2\left\{\left[E_1(\eta) - \frac{pm^2}{2} E_0{}^2(\eta)\, y^{(2-\omega)/2}\right] y^{-\omega/2}\xi^{2m-2}\ln^{2n}\xi + \ldots\right\} \\ p = (\varkappa + 1)\, M^3 (2 - \omega)^{-1} (a\beta)^{-1}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Для $m = 1$, $n = 0$ ($\alpha \neq 0$) имеем

$$\Phi = Ux + \delta\left[E_0(\eta)\, y^{-\omega/2}\, \xi + \ldots\right] + \delta^2\left\{\left[\nu\xi + \gamma\, g'(\xi)\right] + \ldots\right\} \tag{1.7}$$

Здесь $E_1(\eta)$ — произвольная функция; $\nu(y, t)$, $\gamma(y, t)$ — некоторые функции переменных y, t. В (1.7) нужно отбросить член с ν, если $\xi^2 \ll g \ll \xi$, член с γ, если $g \ll \xi^2$; если $g \sim \xi^2$, нужно оставить оба члена. Разложение (1.6) нерегулярно при $\delta\xi^{m-2}\ln^n\xi \sim 1$ (если $n = 0$, то при $\xi \sim \delta^{1/(2-m)}$), разложение (1.7) — при $\xi^2 \ll g \ll \xi$, $\xi \sim \delta g'(\xi)$. Нерегулярность имеет место именно для тех m, n, $g(\xi)$, для которых $\varphi_{1\xi\xi}(\xi = 0) = \infty$.

Здесь имеем дело с фактом нерегулярности линейного разложения в окрестности ударных волн (характеристик), где значения параметров малы, но их градиенты конечны [6–14].

2. Разложение (внутреннее [7–9]), описывающее течение в окрестности ударной волны (характеристики), зададим в виде

$$\Phi = Ux + \varepsilon^2\psi(\xi^\circ, y, t) + \ldots, \quad \xi = \varepsilon\xi^\circ, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{2.1}$$

Предполагая, что $y, t \sim 1$, $1 < M < \infty$, получим для ψ уравнение

$$2U\psi_{\xi^\circ t} + a^2\beta\left(2\psi_{\xi^\circ y} + \frac{\omega}{y}\psi_{\xi^\circ}\right) + (\varkappa + 1)UM^2\psi_{\xi^\circ}\psi_{\xi^\circ\xi^\circ} = 0 \tag{2.2}$$

Это уравнение дает для определения $\Phi_{\xi\xi}$ $(\xi = 0)$ в точности уравнение (1.5), при этом $\Phi_{\xi\xi} \sim 1$. Для установившихся плоских течений уравнение (2.2) рассматривалось в [7].

Условия на ударном фронте имеют вид

$$\frac{\varkappa + 1}{2}UM^2(\psi_{\xi^\circ} + \psi^*_{\xi^\circ}) = 2a^2\beta\frac{\partial\xi^\circ}{\partial y} + 2U\frac{\partial\xi^\circ}{\partial t} \tag{2.3}$$
$$\psi = \psi^* \quad \text{при} \quad \xi^\circ = \xi^\circ(y, t)$$

Здесь ψ^* соответствует течению перед ударной волной; если $\psi^* \equiv \psi$, то (2.3) — характеристическое уравнение.

Условие непротекания на профиле $y = \varepsilon^2 y_0$ (ξ, t) при $\omega = 0$ имеет вид: $U\partial y_0 / \partial\xi^\circ = -\beta\psi\xi^\circ$ при $y = 0$. Для $\omega = 1$ необходимо задать профиль в виде $y = y^* + \varepsilon^2 y_0$, $y^* = \mathrm{const} \neq 0$.

Общее решение уравнения (2.2)

$$\xi^\circ = pu^\circ y + f(u^\circ y^{\omega/2}, \eta), \quad u^\circ = \psi_{\xi^\circ}, \quad \Phi_\xi = U + \varepsilon u^\circ \tag{2.4}$$

Вдоль характеристик уравнения (2.2) выполняется соотношение

$$\left(py + \frac{\partial f}{\partial\mu}y^{\omega/2}\right)\left(2a^2\beta\frac{\partial u^\circ}{\partial y} + 2U\frac{\partial u^\circ}{\partial t} + \frac{\omega}{y}a^2\beta u^\circ\right) = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $u^\circ = u^\circ(y, t)$ — значение u° на характеристике, $\mu = u^\circ y^{\omega/2}$. Тогда вдоль характеристик $\xi^\circ = pu_0(\eta)y^{(2-\omega)/2} + f[u_0(\eta), \eta]$ скорость u° определяется из (1.3), $u^\circ = u_0(\eta)y^{-\omega/2}$ ($u_0(\eta)$ определяется из условия на профиле). Уравнение $py + (\partial f / \partial\mu)y^{\omega/2} = 0$ совместно с (2.4) определяет огибающую указанного семейства характеристик, а также огибающую семейства кривых (2.4), где u° является параметром, постоянным вдоль каждой из этих кривых. Заметим, что уравнение $\eta = 0$ определяет ординату точки пересечения прямой $\xi = 0$ с границей звукового импульса $(x - Ut)^2 + y^2 = a^2t^2$.

3. Переходя в линейном уравнении для φ_1 к внутренней переменной ξ°, а в уравнении (2.2) — к внешней переменной ξ, получим при $\varepsilon \to 0$ одно и то же предельное уравнение, что указывает на возможность сращивания разложений (1.1), (2.1). Исправим линейную теорию в окрестности $\xi = 0$ для $\alpha = 0$ (см. (1.6)) при $n = 0$. При этом $1 < m < 2$, так как область нерегулярности $\xi \sim \delta^{1/(2-m)} \ll 1$ (интересно, что при $\xi^\circ \to \infty$ решение для (2.2) в виде (1.2) существует лишь для $m < 2$ или $m = 2$, $n \leqslant 0$). Сращивая одночленные разложения (1.6), (2.1), (2.4), получим $\varepsilon = \delta^{1/(2-m)}$, $f^{m-1} = u^\circ m^{-1}E_0^{-1}y^{\omega/2}$. Рассмотрим частный случай, когда f — полином

второй степени по степеням u°

$$\psi = A(\xi^\circ + B)^{3/2} + C\xi^\circ + D, \quad Cy^{\omega/2} = C_0 - \frac{9}{8}pA_0^2y^{(2-\omega)/2} \tag{3.1}$$

$$A = A_0y^{-\omega/2}, \quad B = B_0 - pC_0y^{(2-\omega)/2} + \frac{9}{16}p^2A_0^2y^{2-\omega}$$

Здесь $D(y, t)$, $A_0(\eta)$, $B_0(\eta)$, $C_0(\eta)$ — произвольные функции. Для (3.1) $\Phi_{\xi\xi}(\xi = 0) = {}^3/_4AB^{-1/2}$. Сращивая с (1.6), находим $\varepsilon = \delta^2$, $m = {}^3/_2$, $A_0 = E_0$, $C_0 = E_1$. Из условия непротекания следует, что уравнение профиля для (3.1) при малых x имеет вид ($\omega = 0$)

$$U\beta^{-1}y = -\sqrt{\varepsilon}A_0(t^*)x^{3/2} - \varepsilon C_0(t^*)x - {}^3/_2\varepsilon\beta A_0^2x^2 + \ldots, \quad a\beta M^{-1}t = -t^*$$

Используя (2.3), легко показать, что решение (3.1) можно использовать для описания течения, когда возмущенная область ограничена вверх по течению характеристикой $\xi^\circ = {}^4/_9C_0^2A_0^{-2} - B_0$ ($\omega = 0, 1$), на которой скорость не терпит разрыва, или ударной волной

$$\xi^\circ = \xi^* = -B_0 + \frac{1}{9}C_0^2A_0^{-2} + \frac{3}{4}pC_0y^{(2-\omega)/2} - \frac{27}{64}p^2A_0^2y^{2-\omega}, \quad \omega = 0, 1$$

Если характеристика (ударная волна) проходит через точку $x = y = 0$, то $B_0 = {}^4/_9C_0^2A_0^{-2}$ ($B_0 = {}^1/_9C_0^2A_0^{-2}$). Интенсивность ударной волны

$$\frac{\Delta P}{\varkappa M}a^{-(\varkappa+1)/(\varkappa-1)} = -\varepsilon\psi_{\xi^\circ}(\xi^\circ = \xi^*) = \varepsilon\left(\frac{27}{16}pA_0^2y^{1-\omega} - \frac{3}{2}C_0y^{-\omega/2}\right)$$

Если ударная волна исходит из носика профиля, то должно быть $C_0 \leqslant 0$ (иначе $\Delta P\,(y = 0) < 0$). Если $C_0 = 0$, то интенсивность ударной волны при $y = 0$ ($\omega = 0$) нулевая. Для $\omega = 1$ скачок давления на профиле получим, положив в выражении для ΔP $y = y^* \neq 0$.

В линейной постановке интенсивность ударных волн $\Delta P \sim \delta$. В рассматриваемых частных случаях $\Delta P \sim \varepsilon = \delta^{1/(2-m)} \ll \delta$ $(1 < m < 2)$ для $n = 0$. Поэтому в линейной постановке ударная волна такой слабой интенсивности вырождается в характеристику — поверхность слабого разрыва.

Аналогичное исследование в плоской задаче о сверхзвуковом стационарном обтекании профиля для $\alpha = n = 0$ проводилось в [14].

4. Уравнение (2.2), следуя [13], можно обобщить на случай вязкого теплопроводного газа. Рассматривая совершенный газ и задавая для однородного потока $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_0$, $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0\varepsilon^{-2}$, получим уравнение

$$G(\psi) = l\psi_{\xi^\circ\xi^\circ\xi^\circ}, \quad l = M^2(\mathrm{Re}_0\rho_0)^{-1}U\,[1 + (\varkappa - 1)\,\mathrm{Pr}_0^{-1}] \tag{4.1}$$

где $G(\psi)$ — левая часть уравнения (2.2). Заменой

$$\psi = -\frac{2l}{U(\varkappa + 1)}M^{-2}\ln H$$

это уравнение при $\omega = 0$ приводится к линейному. Приведем решение для (4.1) вида [15], описывающее структуру плоской ударной волны

$$u^\circ = r(\lambda) - \frac{2l}{b}s(\lambda)\,\mathrm{th}\,[s(\lambda)\,\xi^\circ - pyr(\lambda)\,s(\lambda) + s_0(\lambda)] \tag{4.2}$$

$$\lambda = 2U\eta, \quad b = (\varkappa + 1)UM^2$$

Здесь r, s, s_0 — произвольные функции. Выбирая для $s \gtrless 0$ $r = \mp 2lb^{-1}s$, получим: $u^\circ \to 0$ при $\xi^\circ \to -\infty$, $u^\circ \to 2r(\lambda) < 0$ при $\xi^\circ \to \infty$. Сращивая (2.1), (4.2) с (1.7), получим $\delta = \varepsilon$, $E_0(\eta) = 2r(\lambda)$.

При $\xi^\circ \to \infty$ для (4.1) существует асимптотика вида (1.2), если $m < 2$ или $m = 2$, $n \leqslant 0$ (при $m < 2$ или $m = 2$, $n < 0$ функция E, так же как и для (2.2), определяется из (1.3)). Это указывает на возможность сращивания разложения (2.1) для вязкого газа с (1.6).

Для (2.2), (4.1) существует решение

$$\psi = \sum_{k=0}^{2} \psi_k(y, t)(\xi^\circ)^k$$

на основе которого также легко построить течения идеального газа с ударной волной и линией слабого разрыва.

Все полученные результаты справедливы для хвостовой ударной волны, за которой следует однородный поток. В этом случае в (1.2) ξ нужно заменить на $(L - \xi)$ (L — длина хорды профиля, его конечная точка $y = 0$, $x = L$), и во всех формулах разделов 2—4 под ξ° понимать переменную $\xi^\circ = (L - \xi)\varepsilon^{-1}$. Все формулы, в том числе для вязкого газа, остаются прежними.

5. Получим нелинейное уравнение общего вида, описывающее течение в окрестности слабых ударных волн, совпадающих в линейной теории с характеристиками. Введем в точном уравнении для $\Phi(x, y, t)$ новые переменные ξ, η, θ, зависящие от x, y, t, и будем искать решение этого уравнения для течений, мало отличающихся от однородного потока, в виде (R — произвольная функция)

$$\Phi = Ux + \varepsilon^2\psi(\xi^\circ, \eta, \theta)R(x, y, t) + \ldots, \quad \xi = \varepsilon\xi^\circ, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{5.1}$$

Предположим, что после перехода к переменным ξ, η, θ все коэффициенты в уравнении для Φ, выраженные через ξ°, η, θ, имеют порядок единицы (это будет выполняться, например, для переменных $\xi = x_1 - f_1(x_2, x_3)$, $\eta = f_2(x_2, x_3)$, $\theta = f_3(x_2, x_3)$). Оставляя старшие члены, получим

$$\begin{gathered} 2K^\circ_{\xi\eta}\psi_{\xi^\circ\eta} + 2K^\circ_{\xi\theta}\psi_{\xi^\circ\theta} + \psi_{\xi^\circ}(L_\xi^\circ + 2R_0^{-1}K^\circ_{\xi R}) - \\ - (\varkappa + 1)R_0 M_\xi^\circ \psi_{\xi^\circ}\psi_{\xi^\circ\xi^\circ} = 0 \end{gathered} \tag{5.2}$$

Здесь индексом (градус) отмечены старшие члены разложений по ε функций M_ξ, N_ξ, $K_{\xi\eta}$, $K_{\xi\theta}$, $K_{\xi R}$, L_ξ, R, где

$$\begin{gathered} M_\xi = (\xi_x^2 + \xi_y^2)(\xi_t + U\xi_x), \quad L_\xi = a^2\left(\xi_{xx} + \xi_{yy} + \frac{\omega}{y}\xi_y\right) - \\ - \xi_{tt} - 2U\xi_{xt} - U^2\xi_{xx} \\ K_{\xi\eta} = a^2(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) - (\xi_t + U\xi_x)(\eta_t + U\eta_x) \end{gathered}$$

При этом должно выполняться условие нетривиальности

$$N_\xi = a^2(\xi_x^2 + \xi_y^2) - (\xi_t + U\xi_x)^2 = 0 \tag{5.3}$$

$K_{\xi\theta}$, $K_{\xi R}$ получим с помощью замены в выражении для $K_{\xi\eta}$ функции η на функции θ, R соответственно; L_ξ получим, заменяя в уравнении для φ_1 функцию φ_1 на ξ. Индексы снизу у M, K, L, N являются меткой, в остальных случаях буквенный индекс снизу обозначает производную. Функцию R можно использовать для упрощения (5.2). Уравнение (5.3) для функции $\xi\,(x, y, t)$ означает, что $\xi = \mathrm{const}$ — характеристическая линия (поверхность) линейного уравнения для φ_1 ($L_\varphi = 0$). Функции η, θ можно задавать произвольно, исходя из удобства решения задач (лишь бы удовлетворялось условие для порядков коэффициентов).

Условие (5.3) можно расширить. Для получения нетривиального уравнения для ψ достаточно потребовать, чтобы функция $\xi\,(x, y, t)$ определялась из уравнения $N_\xi = F\,(\xi, x, y, t)$, где функция F такова, что

$$F\,[\varepsilon\xi^\circ, x\,(\varepsilon\xi^\circ, \eta, \theta), y\,(\varepsilon\xi^\circ, \eta, \theta), t\,(\varepsilon\xi^\circ, \eta, \theta)] = \varepsilon F_0\,(\xi^\circ, \eta, \theta)$$

(т. е. $N_\xi \sim \varepsilon$, но все остальные коэффициенты в уравнении для Φ порядка единицы). Тогда уравнение для ψ примет вид $F_0\psi_{\xi^\circ\xi^\circ} + G\,(\psi) = 0$, где $G\,(\psi)$ — левая часть уравнения (5.2).

Приближенные условия для (5.2) на ударной волне $\xi^\circ = \xi^\circ\,(\eta, \theta)$ имеют вид

$$K^\circ_{\xi\eta}\frac{\partial\xi^\circ}{\partial\eta} + K^\circ_{\xi\theta}\frac{\partial\xi^\circ}{\partial\theta} + \frac{\varkappa+1}{4}M_\xi{}^\circ(\psi_{\xi^\circ} + \psi^*_{\xi^\circ}) = 0, \quad \psi = \psi^* \tag{5.4}$$

Если $R = 1$, $\xi = x - \beta y$, $\eta = y$, $\theta = t$, то из (5.2), (5.4) получим (2.2), (2.3). Если положить

$$R = 1, \quad \xi = x \pm (a^2t^2 - y^2)^{1/2}, \quad \eta = y, \quad \theta = t, \; U = 0, \; a^2 = (\varkappa+1)/2$$

то получим уравнение, описывающее течение в окрестности звукового импульса (или слабой ударной волны) $\xi \approx 0$, распространяющегося по покоящемуся или слабовозмущенному газу. Можно показать, что линейное разложение вида (1.6) для $\xi = x \pm (a^2t^2 - y^2)^{1/2}$ в задачах о распространении звукового импульса или слабой ударной волны также имеет области нерегулярности. Например, для $n = 0$ оно нерегулярно при $\xi \sim \delta^{1/(2-m)}$, $m < 2$. Записав общее решение (5.2) в виде $\xi^\circ = \xi^\circ\,(u^\circ, y, t)$, в этом случае также можно провести сращивание линейного и нелинейного разложений. Для плоских автомодельных течений вида $\Phi = t\Phi^*\,(\xi\,/\,t,\; y\,/\,t)$ получим $m = {}^3/_2$ ($n = 0$). Уравнение (5.2) для $\xi = x \pm (a^2t^2 - y^2)^{1/2}$, $\eta = y$, $\theta = t$ является аналогом уравнения [13] для идеального газа, которое получим из (5.2) при

$$\xi = at - \rho_*, \quad \eta = x = \rho_*\cos\theta_*, \quad \theta = y = \rho_*\sin\theta_*$$
$$R = 1, \quad U = 0$$

а также аналогом уравнения [10] и отличается от них лишь видом переменных.

Введем теперь разложение

$$\Phi = Ux + \varepsilon^2\psi\,(\xi^\circ, \eta^\circ, \theta)R\,(x, y, t) + \ldots, \qquad \xi = \varepsilon\xi^\circ,$$
$$\eta = \sqrt{\varepsilon}\eta^\circ, \quad \varepsilon \ll 1$$

Оставляя прежними условия для коэффициентов в уравнении для Φ, получим уравнение (5.2) и условие (5.4), в которых нужно отбросить первые члены и заменить их соответственно членами

$$N_{\eta^\circ}\psi_{\eta^\circ\eta^\circ}, \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi^\circ}{\partial\eta^\circ}\right)^2 N_{\eta^\circ}$$

Наряду с условием $N_\xi = 0$ в этом случае должно выполняться еще одно условие нетривиальности $K_{\xi\eta} = 0$. Эти условия можно расширить, потребовав, чтобы функции ξ, η, θ были такими, что

$$N_\xi = \varepsilon N_\xi{}^\circ(\xi^\circ, \eta^\circ, \theta) + \ldots, \quad K_{\xi\eta} = \sqrt{\varepsilon}\overset{\circ}{K}_{\xi\eta}(\xi^\circ, \eta^\circ, \theta^\circ) + \ldots$$

Тогда уравнение для ψ примет вид

$$N_\xi{}^\circ\psi_{\xi^\circ\xi^\circ} + N_\eta{}^\circ\psi_{\eta^\circ\eta^\circ} + G(\psi) = 0 \tag{5.5}$$

Здесь G — левая часть уравнения (5.2). Уравнение (5.5) также представляет интерес при расчете нелинейных течений газа. Так, при $R = U = 1$, $\xi = x$, $\eta = y$, $\theta = t$ ($N_\xi = K_{\xi\eta} = 0$) получим околозвуковое уравнение для неустановившихся течений [16, 17], при $U = 0$, $R = 1$, $\xi = (x - a_0t) / a_0t$, $\eta = y / a_0t$, $\psi = t\psi_*$ (ξ, η, $\ln t$) — уравнение коротких волн [11, 12].

Интересно, что уравнение (5.5) включает в себя линейное уравнение для φ_1, если $N_\xi = N_\theta = K_{\xi\eta} = K_{\eta\theta} = L_\eta = L_\theta = 0$, $R = 1$. Условие $N_\theta = 0$ означает, что $\theta = \mathrm{const}$, как и $\xi = \mathrm{const}$, характеристика уравнения для φ_1. Примеры таких переменных

$$\xi_1 = (-U \pm a)t + x, \quad \eta_1 = (-U \pm a)t + x + y, \quad \theta_1 = y \pm at \quad (\omega = 0); \quad \xi_2 = (-U \pm a)t + x, \quad \eta_2 = y, \quad \theta_2 = x + (-U \mp at)$$

Для этих переменных распространение возмущений по невозмущенному газу от точечного источника происходит по окружности [17, 18].

Уравнение (5.5) можно использовать для расчета существенно двумерных (присутствует член $\psi_{\eta^\circ\eta^\circ}$) течений в окрестности точки взаимодействия двух слабых ударных волн (например, $\xi_1 = \varepsilon\xi^\circ(\eta^\circ, \theta)$ и $\theta_1 = \theta(\xi^\circ, \eta^\circ)$) или в окрестности точки взаимодействия ударной волны (например, $\xi_2 = \varepsilon\xi^\circ(\eta^\circ, \theta)$) со стенкой (например, $\eta_2 = y = \sqrt{\varepsilon}\eta^\circ(\xi^\circ, \theta)$).

Поступила 9 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Майлс Дж. У.* Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.
2. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
3. *Красильщикова Е. А.* Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
4. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М., Физматгиз, 1959.
5. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М., «Наука», 1976.
6. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970.
7. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
9. *Найфе А.* Методы возмущений. М., «Мир», 1976.
10. *Христианович С. А.* Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
11. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.

12. *Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.* Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
13. *Рыжов О. С.* О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
14. *Могилевич Л. И.* О нелинейных эффектах вблизи фронтов, слабых ударных волн. Изв. вузов. Математика, 1975, № 3.
15. *Вельмисов П. А., Фалькович С. В.* К теории околозвуковых течений вязкого газа. Изв. вузов. Сер. матем., 1974, № 5.
16. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On two-dimensional non-steady motion of slender body in A compressible fluid. J. Math. and Phys., 1948, vol. 27, No. 3. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1950.)
17. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1965.
18. *Вельмисов П. А.* О распространении малых возмущений в звуковом потоке и в покоящемся газе. ПММ, 1976, т. 40, вып. 1.