

## МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СТРУЙНОМ ТЕЧЕНИИ ВДОЛЬ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА

Н. Н. Кортиков, И. Б. Новикова

(Ленинград)

Исследуется ламинарная струя несжимаемой жидкости, распространяющаяся вдоль поверхности полубесконечного прямого кругового конуса при умеренных числах Рейнольдса. Построено асимптотическое разложение, учитывающее взаимодействие пограничного слоя с внешним течением, что вызывает появление поперечной составляющей скорости во внешней невязкой области.

Описание струйных течений в рамках теории пограничного слоя [1] не позволяет выявить влияние эффектов второго порядка: вытеснение пограничного слоя и геометрии поверхности в явном виде. Для плоских струйных течений указанные эффекты учитывались [2, 3].

Предельным случаем является распространение веерной струи вдоль плоской стенки; автомодельное решение этой задачи получено в [4]. Сопоставление экспериментальных результатов работы [5] с автомодельным решением показывает, что превышение последнего во внешней области пограничного слоя достигает 20%.

В данной работе устанавливается влияние вытеснения пограничного слоя и угла раствора конуса на течение и теплообмен в осесимметричной ламинарной струе на прямом круговом конусе при использовании метода сращиваемых асимптотических разложений.

**1. Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассматривается задача о распространении осесимметричной ламинарной струи вязкой несжимаемой жидкости вдоль обогреваемой поверхности полубесконечного прямого кругового конуса с углом полураствора  $\alpha_0$ . Струя выходит из бесконечно тонкого кольцевого источника на носике тела в пространство, затопленное жидкостью с теми же свойствами, что и сама струя. Температура поверхности  $T_w$  постоянна и отлична от температуры жидкости  $T_\infty$  вдали от конуса. Начало координат совмещается с источником струи. Ось  $x$  направлена по образующей конуса,  $y$  — по нормали к ней. Используются безразмерные уравнения: в качестве единицы длины выбирается характерный размер  $L$ , проекции скорости на оси  $x$  и  $y$  отнесены к значению скорости  $U$  в сечении с продольной координатой, равной  $L$ , избыточное давление отнесено к величине  $\rho U^2$  ( $\rho$  — плотность жидкости в струе), избыточная температура — к  $T_w - T_\infty$ . Уравнения и граничные условия для безразмерных проекций скорости  $u$  и  $v$ , давления  $p$  и температуры  $\Theta$  при отсутствии вязкостной диссипации и внутренних источников тепловыделения имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} uu_x + vv_y &= -p_x + R^{-1} \{2u_{xx} + 2\kappa^{-1}u_x + \kappa^{-1}[\kappa(v_x + u_y)]_y\} \\ uv_x + vv_y &= -p_y + R^{-1} \{\kappa^{-1}[\kappa(v_x + u_y)]_x + 2\kappa^{-1}(\kappa v_y)_y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u\Theta_x + v\Theta_y &= Rr^{-1}\kappa^{-1}[(\kappa\Theta_x)_x + (\kappa\Theta_y)_y] \\
 (u\kappa)_x + (v\kappa)_y &= 0, \quad \kappa = x + y \operatorname{ctg} \alpha_0 \\
 (1.2) \quad u = v = 0, \quad \Theta &= 1, \quad y = 0, \quad x > 0 \\
 \psi &= \int_0^y u\kappa dy < \infty, \quad \Theta = 0, \quad y = 0, \quad x < 0 \\
 u \rightarrow 0, v \rightarrow 0, p \rightarrow 0, \Theta &\rightarrow 0, r \rightarrow \infty, \alpha \neq 0 \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}(y/x)
 \end{aligned}$$

При  $R \rightarrow \infty$  задача (1.1), (1.2) по терминологии [6] — задача сингулярных возмущений. В качестве параметра возмущения используется  $\varepsilon = R^{-1/2}$ .

В соответствии с методом сращиваемых асимптотических разложений область течения разбивается на две: внутреннюю (область пограничного слоя) и внешнюю. Для исследования поведения решения в пограничном слое вводится поперечная координата порядка единицы в области неоднородности

$$(1.3) \quad y = Y\varepsilon$$

Решение в пограничном слое представляется в виде асимптотических разложений для  $R \rightarrow \infty$ , при фиксированных  $x, Y$

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad u &= u_0(x, Y) + \varepsilon u_1(x, Y) + \dots \\
 v &= \varepsilon v_0(x, Y) + \varepsilon^2 v_1(x, Y) + \dots \\
 p &= p_0(x, Y) + \varepsilon p_1(x, Y) + \dots \\
 \Theta &= \Theta_0(x, Y) + \varepsilon \Theta_1(x, Y) + \dots
 \end{aligned}$$

Вне пограничного слоя решение имеет вид

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad u &= U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) + \dots, \quad v = V_0(x, y) + \\
 &+ \varepsilon V_1(x, y) + \dots \\
 p &= P_0(x, y) + \varepsilon P_1(x, y) + \dots, \quad \Theta \equiv 0
 \end{aligned}$$

Закон предельного перехода определяет область применимости каждого из разложений (1.4), (1.5).

2. Нулевое приближение. Считая внешнее течение безвихревым, из (1.5) и (1.1) для функции тока  $\Phi_0$  нулевого приближения внешнего течения получим

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad E^2 \Phi_0 &= 0 \\
 E^2 &= \partial^2 / \partial x^2 - \kappa^{-1} \partial / \partial x + \partial^2 / \partial y^2 - \kappa^{-1} \operatorname{ctg} \alpha_0 \partial / \partial y
 \end{aligned}$$

Поскольку граничные условия нулевые, то, не ограничивая общности, имеем

$$(2.2) \quad \Phi_0(x, y) \equiv 0$$

Процедура сращивания определяет граничное условие на внешней границе пограничного слоя

$$(2.3) \quad \psi_{0Y}(x, \infty) = 0$$

Нулевое приближение для пограничного слоя описывается системой уравнений, полученных подстановкой (1.4) в (1.1)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \psi_{0Y}\psi_{0xY} - \psi_{0x}\psi_{0Y} - x^{-1}\psi_{0Y}^2 &= x\psi_{0Y} \\ \psi_{0Y}\Theta_{0x} - \psi_{0x}\Theta_{0Y} &= \text{Pr}^{-1}x\Theta_{0Y} \\ u_0 = x^{-1}\psi_{0Y}, \quad v_0 &= -x^{-1}\psi_{0x} \end{aligned}$$

Система уравнений (2.4) допускает автомодельное решение вида [1]

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \psi_0(x, Y) &= Ax^{3/4}F(\eta), \quad \Theta_0(x, Y) = H(\eta) \\ \eta &= BYx^{-5/4}, \quad A = 3^{-1/4}, \quad B = 3^{3/4} \end{aligned}$$

Для определения  $F(\eta)$  и  $H(\eta)$  имеем

$$(2.6) \quad 4F''' + FF'' + 2F'^2 = 0, \quad 4H'' + \text{Pr}FH = 0$$

$$F(0) = F'(0) = F'(\infty) = H(\infty) = 0, \quad H(0) = 1, \quad \int_0^\infty F'^2 F d\eta = 1$$

На внешней границе пограничного слоя

$$(2.7) \quad F(\eta) \sim F(\infty) + \text{exp}, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Здесь exp означает члены, экспоненциально малые при  $\eta \rightarrow \infty$ .

Использование принципа минимальной особенности [6] и интегрального инварианта  $E_0$  [4] позволяет выразить масштаб скорости и число Рейнольдса с помощью начальных характеристик струи в виде

$$(2.8) \quad U = (E_0 / \nu L^3)^{1/4}, \quad R = (E_0 / \nu^3 L)^{1/2}$$

**3. Первое приближение.** Для первого приближения функции тока  $\Phi_1$  внешнего течения имеем

$$(3.1) \quad E^2\Phi_1 = 0$$

Граничные условия определяются сращиванием при использовании

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Phi_1(x, 0) &= AF(\infty)x^{3/4}, \quad x > 0; \quad \Phi_1(x, 0) < \infty, \quad x < 0; \\ \Phi_{1x} &\rightarrow 0, \quad \Phi_{1y} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Решение задачи (3.1), (3.2) имеет вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Phi_1(r, \alpha) &= AF(\infty)r^{3/4} \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\sin \alpha_0} \frac{P_\tau^1[-\cos(\alpha + \alpha_0)]}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} \\ \tau &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

Здесь  $P_\tau^1(-\cos \alpha)$  — обобщенные сферические функции второго рода [7].

Процедура сращивания определяет внешнее граничное условие для первого приближения пограничного слоя. Уравнения и граничные условия во внутренней области имеют вид

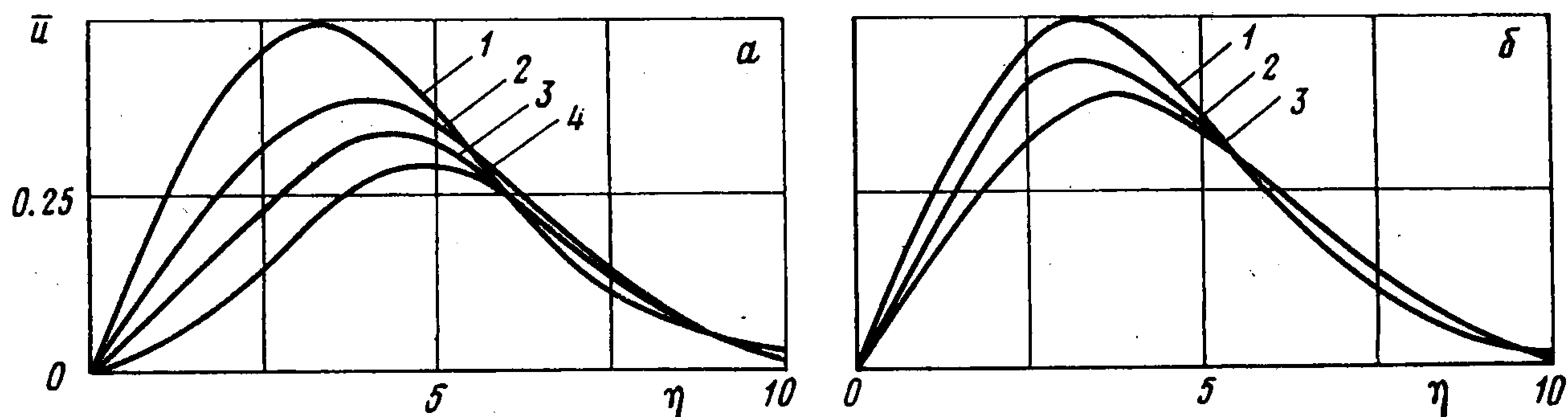
$$(3.4) \quad \begin{aligned} \psi_{1Y}YY + x^{-1}\psi_{0x}\psi_{1Y} - x^{-1}\psi_{0Y}\psi_{1x} - x^{-1}\psi_{0xY}\psi_{1Y} + \\ + 2x^{-2}\psi_{0Y}\psi_{1Y} + x^{-1}\psi_{0Y}\psi_{1x} &= \text{ctg} \alpha_0 (Yx^{-3}\psi_{0Y}^2 - Yx^{-1}\psi_{0Y}YY + \\ + x^{-2}\psi_{0x}\psi_{0Y} + x^{-1}\psi_{0Y}Y) \\ \psi_{0Y}\Theta_{1x} - \psi_{0x}\Theta_{1Y} - x\text{Pr}^{-1}\Theta_{1Y} &= \psi_{1x}\Theta_{0Y} - \psi_{1Y}\Theta_{0x} + \\ + x \text{ctg} \alpha_0 \text{Pr}^{-1}(Yx^{-1}\Theta_{0Y} + x^{-1}\Theta_{0Y}) \\ \psi_1 = \psi_{1Y} = \Theta_1 &= 0, \quad Y = 0 \\ \psi_{1Y} &\rightarrow -AF(\infty)x^{-1/4} \frac{P_\tau^2(-\cos \alpha_0)}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)}, \quad \Theta_1 \rightarrow 0, \quad Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Задача (3.4) допускает автомодельное решение

$$(3.5) \quad \psi_1(x, Y) = AF(\infty) x \frac{P_\tau^2(-\cos \alpha_0)}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} f(\eta) + x \operatorname{ctg} \alpha_0 G(\eta)$$

$$\Theta_1(x, Y) = AF(\infty) x^{1/4} \frac{P_\tau^2(-\cos \alpha_0)}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} h(\eta) + x^{1/4} \operatorname{ctg} \alpha_0 g(\eta)$$

При этом система (3.4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $f$ ,  $G$ ,  $h$  и  $g$ . Здесь  $f(\eta)$  и  $h(\eta)$  — функции, обусловленные вытесняющим действием пограничного слоя,  $G(\eta)$  и  $g(\eta)$  — влиянием геометрии конической поверхности.



Фиг. 1

Вследствие однородности уравнений и граничных условий нулевое и первое приближения для избыточного давления в разложениях (1.4), (1.5) тождественно равны нулю.

4. Обсуждение. Сравнение с экспериментом. В общем случае выражения для продольной и поперечной составляющей скорости и температуры в пограничном слое записываются в виде

$$(4.1) \quad \frac{u^*}{AB(E_0/\nu x^*)^{1/2}} = F' + \xi \left[ \frac{P_\tau^2(-\cos \alpha_0)}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} f' + \operatorname{ctg} \alpha_0 \left( \frac{1}{A} G' - \frac{1}{B} \eta F' \right) \right]$$

$$\frac{v^*}{1/4 A (E_0 \nu / x^{*5})^{1/4}} = -(3F - 5\eta F') - \xi \left\{ \operatorname{ctg} \alpha_0 \left[ 3\eta F - 5\eta^2 F' + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{A}{4} (G - \eta G') \right] + 4 \frac{P_\tau^2(-\cos \alpha_0)}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} (f - \eta f') \right\}$$

$$\Theta = H + \xi \left[ \operatorname{ctg} \alpha_0 g + AF(\infty) \frac{P_\tau^2(-\cos \alpha_0)}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} h \right], \quad \xi = \left( \frac{\nu^3 x^*}{E_0} \right)^{1/4}$$

Индукцированная вытесняющим действием пограничного слоя поперечная составляющая скорости во внешнем течении записывается так:

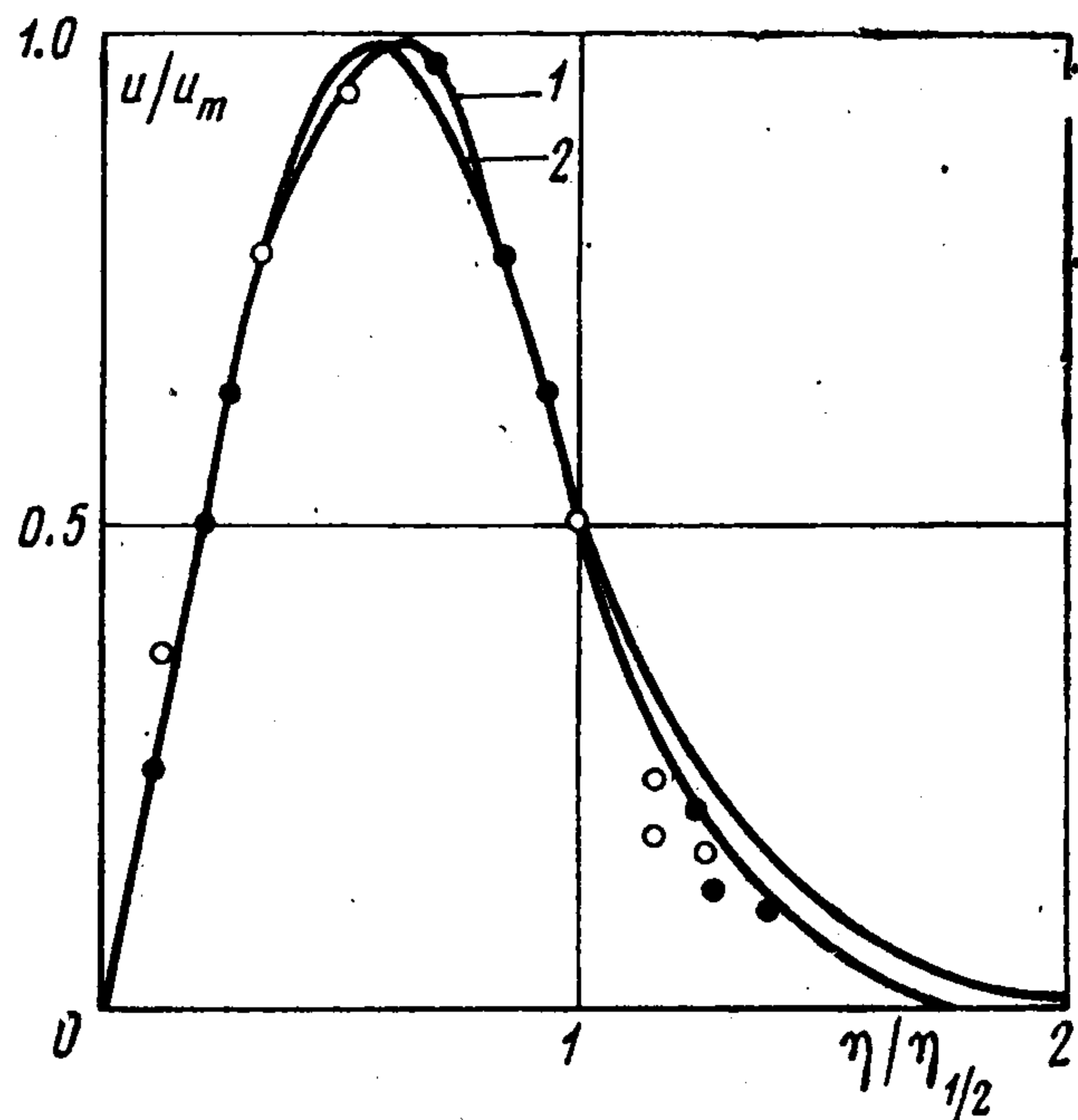
$$(4.2) \quad \frac{v^*}{1/4 A (E_0 \nu / x^{*5})^{1/4}} = - \frac{4F(\infty)}{\sin \alpha_0 + B^{-1} \xi \eta \cos \alpha_0} \left( 1 + \right.$$

$$\left. + B^{-2} \xi^2 \eta^2 \right)^{-5/4} \frac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\sin \alpha_0} \left\{ \frac{3}{4} \frac{P_\tau^1[-\cos(\alpha + \alpha_0)]}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} - \right.$$

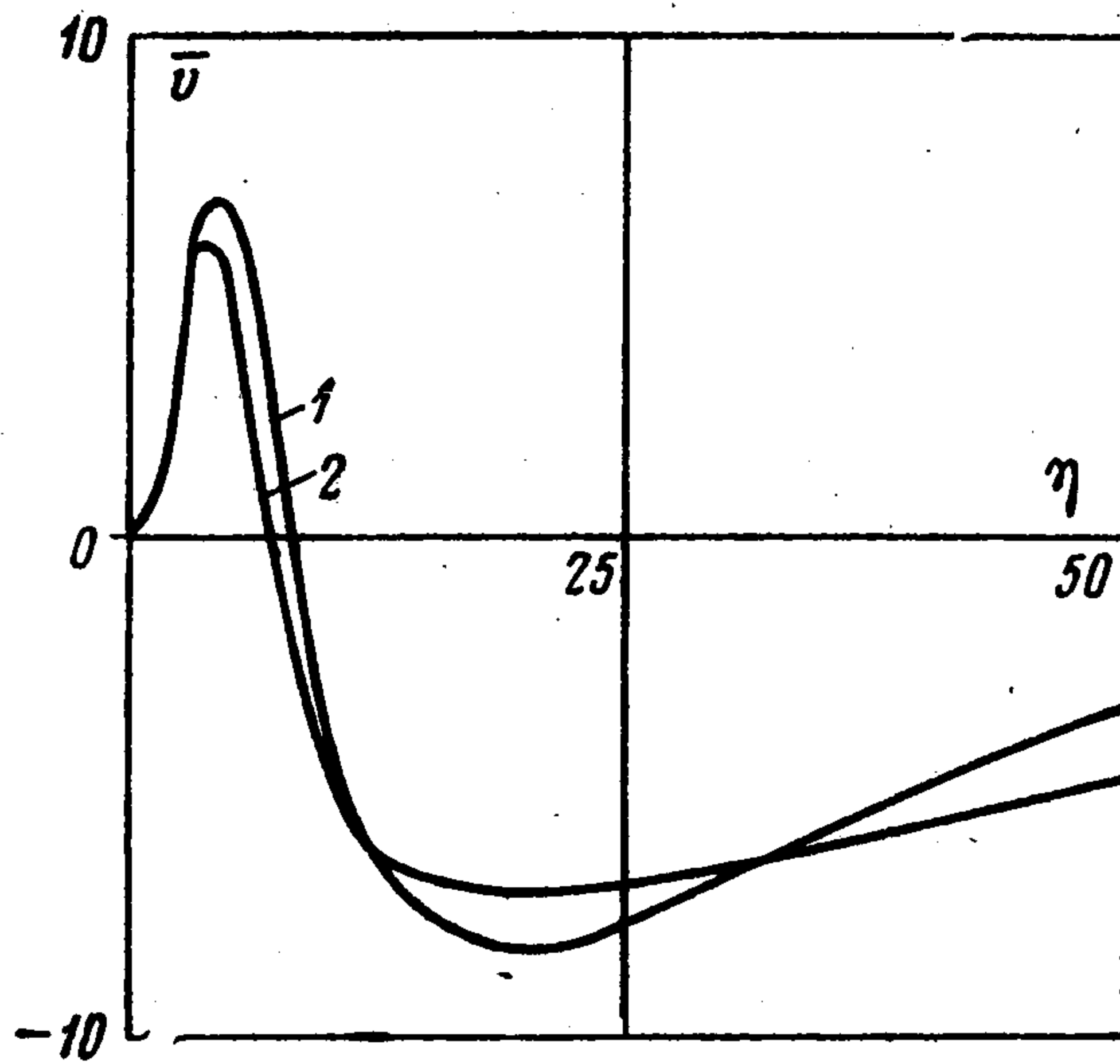
$$\left. - B^{-1} \xi \eta \frac{P_\tau^2[-\cos(\alpha + \alpha_0)]}{P_\tau^1(-\cos \alpha_0)} \right\}$$

Численные расчеты полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений производились методом сведения краевой задачи к задаче Коши [8], вычисление отношений сферических функций проводилось с помощью таблиц [9]. На фиг. 1 а представлены безразмерные профили продольных скоростей  $\bar{u} = u^*[3E_0/\nu x^{*3}]^{-1/2}$  для раз-

ных углов полураствора конуса при закреплённом параметре  $\xi$ . Видно, что с увеличением угла  $\alpha_0$  профили становятся более градиентными, максимум скорости увеличивается и сдвигается в сторону стенки. Кривая 1 соответствует теории пограничного слоя, для кривых 2, 3, 4, значения  $\alpha_0$  равны соответственно:  $\pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/4$ .



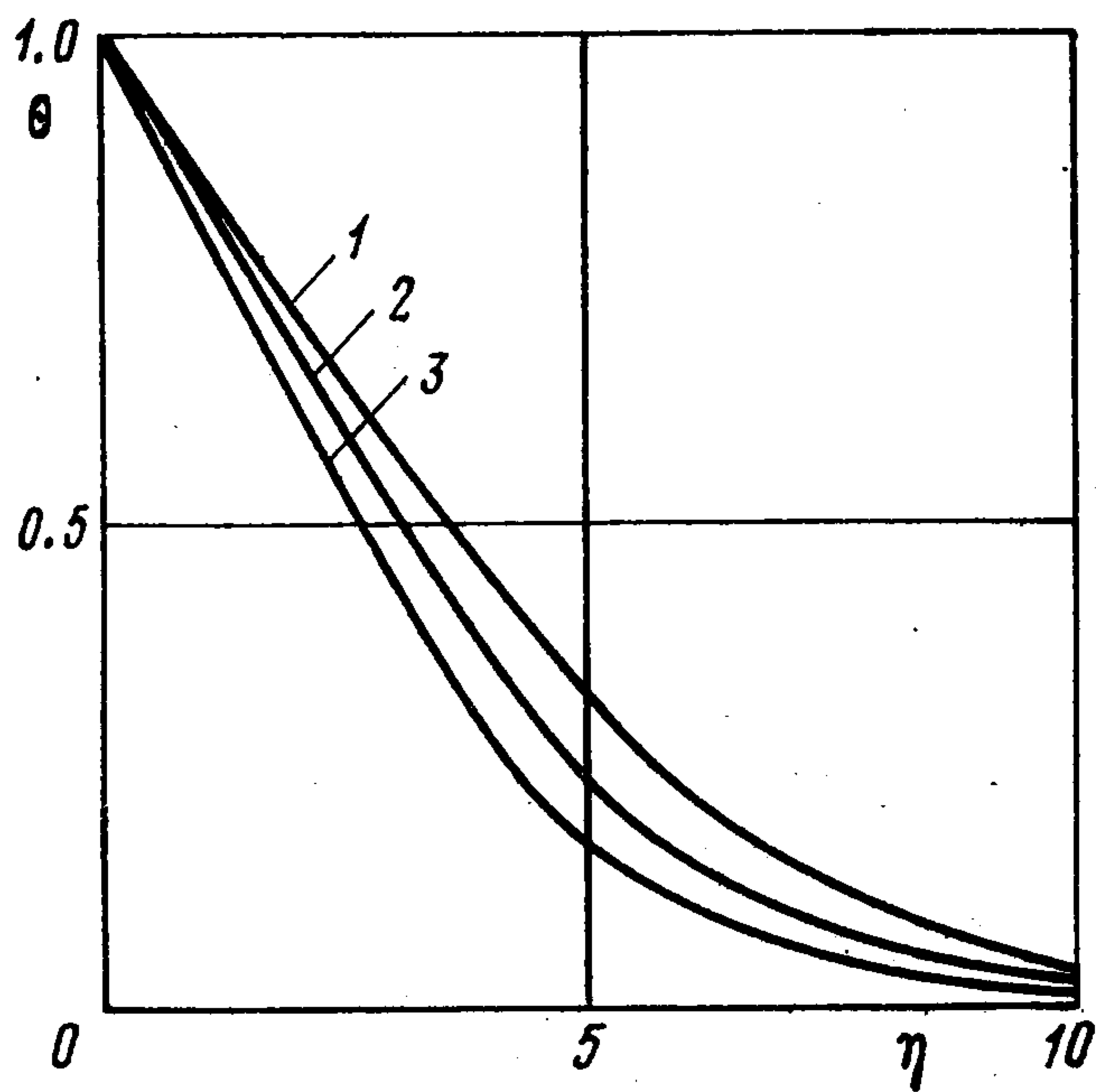
Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 1, б представлены безразмерные профили продольных скоростей для различных значений параметра  $\xi$  в случае веерной струи ( $\alpha_0 = \pi/2$ ). С увеличением параметра  $\xi$  (т. е. с увеличением расстояния от носика конуса при закреплённых других параметрах) наблюдается уменьшение максимума скорости и удаление его от стенки.

Кривая 1 соответствует автомодельному решению, для кривой 2  $\xi = 0.005$ , для кривой 3  $\xi = 0.01$ .



Фиг. 4

На фиг. 2 приведен универсальный профиль скорости, рассчитанный по данной теории (кривая 1) и по теории пограничного слоя (кривая 2). В качестве масштаба скорости выбирается значение максимальной скорости в данном сечении, а для поперечной координаты — ординаты, в которой скорость принимает значение, равное половине максимальной. Здесь же приводятся экспериментальные данные работы [6] для случая растекания ламинарной веерной струи (светлые точки —  $R_{x^*} = 0.58 \cdot 10^3$ , темные точки —  $R_{x^*} = 6.3 \cdot 10^3$ ;  $R_{x^*} = U_{s^*} x^* / \nu$ ). Сопоставление с экспериментальными данными указывает на лучшее соответствие данной теории с экспериментом при  $\eta / \eta_{1/2} \geq 1.1$ .

На фиг. 3 представлены профили безразмерной поперечной составляющей скорости  $\bar{v} = 4\nu^* [(E_0 \nu / (3x^5))]^{-1/4}$  в зависимости от параметра  $\xi$  (кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\xi$ , равным 0.01 и 0.005) при  $\alpha_0 = \pi/2$ . С ростом  $\xi$  абсолютные значения скорости во внутренней области увеличиваются, во внешней области уменьшаются вследствие взаимодействия со стенкой и окружающей жидкостью.

Безразмерные профили температур для числа Прандтля  $Pr = 0.7$  при разных углах полураствора конуса и при фиксированном значении  $\xi$  приведены на фиг. 4. Теплоотвод с конической поверхностью становится более интенсивным с увеличением угла  $\alpha_0$ .

(кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\alpha_0$ , равным  $\pi/4$  и  $\pi/2$ ; кривая 3 соответствует теории пограничного слоя).

Рассмотрение вопроса о продольном струйном обтекании кругового конуса показывает, что вытеснение пограничного слоя способствует уменьшению значения напряжения трения на стенке и теплоотвода с поверхности, влияние угла полураствора конуса обратное. С учетом высших приближений выражение для напряжения трения на поверхности конуса записывается в виде

$$\frac{\tau_w}{AB^2 \mu [E_0^3 / (\nu^5 x^{*11})]^{1/4}} = 0.221 + \xi \left[ 0.408 \operatorname{ctg} \alpha_0 - 2.206 \frac{P_\tau^2 (-\cos \alpha_0)}{|P_\tau^1 (-\cos \alpha_0)|} \right]$$

Авторы благодарят Н. И. Акатнова за помощь в постановке задачи и обсуждение результатов.

Поступила 18 IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., Физматгиз, 1965.
2. Plotkin A. A second-order correction to the Glauert wall jet solution. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 1.
3. Plotkin A. The flow of a laminar incompressible jet along a parabola. Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 1.
4. Цуккер М. С. Ламинарная несжимаемая струя, бьющая из радиального диффузора вдоль стенок. ПММ, 1954, т. 8, вып. 6.
5. Tsuji Y., Morikawa Y., Sakou M. The stability of a radial wall jet. Aeronaut. Quart., 1977, vol. 28, No. 4.
6. Van Dyke M. D. Perturbation methods in fluid mechanics. New York — London, Acad. Press., 1964. (Рус. перев.: Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967).
7. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.—Л., Физматгиз, 1963.
8. Collatz L. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, Springer, 1951. (Рус. перев.: М., Изд-во иностр. лит., 1953).
9. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы и формулы для сферических функций  $P_{-\frac{1}{2}+it}^m(z)$ . М., ВЦ АН СССР, 1962.