рассмотреть систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_\nu}\sum_{k=1}^{N_\nu} V_{ikjm}^{\nu\varepsilon} = V_{jm}^{\varepsilon} \tag{12}$$

Здесь $V_{ikjm}^{\nu\varepsilon}$ — величина скорости, индуцированной косым вихрем $\Pi_{ik}{}^{\nu}$ трапеции σ_ν в точке $P_{jm}{}^{\varepsilon}$ трапеции σ_ε.

Из свойств системы (12) аналогично предыдущему следует, что функция $\gamma(x, z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\gamma(x_+{}^{\varepsilon}(z), z) = 0, \quad \gamma(x_-{}^{\varepsilon}(z), z) = \infty, \quad z \in (l_\varepsilon{}^1, l_\varepsilon{}^2)$$

Поступила 29 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
2. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
3. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К.* Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М., «Наука», 1975.
4. *Лифанов И. К., Полонский Я. Е.* Обоснование численного метода «дискретных вихрей» решения сингулярных интегральных уравнений. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
5. *Лифанов И. К.* О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши. Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
7. *Эшли Х., Лэндал М.* Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.

УДК 534.2:532+539.3:534.1

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. С. Благовещенский

(Ленинград)

Рассматривается следующая обратная задача. Пусть функция $u(x, z, t)$ удовлетворяет в полупространстве $z > 0$, $x \in R^n$, $t \in (-\infty, \infty)$ уравнению вида

$$u_{tt} = a(z)\frac{\partial}{\partial z}(a(z)u_z) + P\left(z, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{1}$$

где $P(z, k)$ — полином произвольной степени от $k \in R^n$ с коэффициентами — функциями от z, $a(z) > 0$. Пусть u — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{t<0} = 0, \quad au_z|_{z=0} = \delta(x, t) \tag{2}$$

преобразование Фурье от которого по x; функция $v(k, z, t)$ дифференцируема по k столько раз, какова степень полинома P.

Замечание 1. Неизвестны общие условия, обеспечивающие существование такого решения, однако оно заведомо существует, если дифференциальный оператор в правой части уравнения (1) второго порядка и эллиптичен (тогда u — решение смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка [1]).

Ставится задача: определить коэффициенты оператора $P(z, i\partial / \partial x)$, если известна функция

$$f(x, t) = u(x, 0, t) \tag{3}$$

Оказывается, по функции $f(x, t)$ однозначно находятся все коэффициенты полинома $P(z, k)$, если известен коэффициент $a(z)$. Если a неизвестно, то коэффициенты полинома P находятся однозначно как функции некоторой координаты y — неизвестной монотонной функции от z. Связанные между собой функции $a(z)$ и $y(z)$ найти невозможно (отметим, однако, что если $a(z)$ и коэффициенты полинома P не независимы, то по f может быть найдена и функция a, см. замечание 3). При этом для нахождения коэффициентов полинома P достаточно знать в обоих случаях лишь первые коэффициенты $g_m(t)$ разложения преобразования Фурье $g(k, t)$ от функции $f(x, t)$ по степеням k — двойственной переменной к x — столько коэффициентов, каков порядок полинома P (ср. с [2–4]). Высказанное здесь утверждение легко доказывается при помощи метода, изложенного в статье автора [1].

Оказывается, верно следующее утверждение: если известно, что полином P имеет свободный член, равный нулю, т. е. $P(z, 0) = 0$, то все последующие коэффициенты P выражаются через функции $g_m(t)$ при помощи простых явных формул.

Приведем вывод этих формул в случае, когда x — одномерная переменная, а степень полинома P равна двум. Распространение вывода на более сложные ситуации не вносит существенно нового.

Из приведенных ниже формул следует, что искомые коэффициенты зависят от вторых производных функций $g_m(t)$ устойчиво в метрике C.

Итак, введем вместо z новую координату

$$y = \int_0^z (a(z))^{-1}\, dz$$

Тогда, перейдя к преобразованию Фурье, получим задачу

$$v_{tt} = v_{yy} + (bk + ck^2)\, v \tag{4}$$

$$v|_{t<0} = 0, \quad v_y|_{y=0} = \delta(t), \quad v|_{y=0} = g(k, t)$$

Заменяя функцию $v(k, y, t)$ ее разложением $v = v_0 + kv_1 + k^2v_2 + o(k^2)$ по степеням k, получим цепочку задач.

Для $v_0(y, t)$ имеем

$$v_{0tt} = v_{0yy}, \quad v_0|_{t<0} = 0, \quad v_{0y}|_{y=0} = \delta(t)$$

Отсюда $v_0 = -\varepsilon(t - y)$ и $g_0(t) = -\varepsilon(t)$ (необходимое условие разрешимости обратной задачи). Здесь $\varepsilon(t)$ — функция Хевисайда.

Для $v_1(y, t)$ имеем

$$v_{1tt} = v_{1yy} + bv_0, \quad v_1|_{t<0} = 0, \quad v_{1y}|_{y=0} = 0$$

Отсюда при $t > y$

$$v_1(y, t) = -\frac{1}{2}\int_0^{{}^1\!/_2(t-y)} b(\eta)(t - y - 2\eta)\, d\eta - \frac{t-y}{2}\int_0^y b(\eta)\, d\eta - \tag{5}$$

$$-\frac{1}{2}\int_y^{{}^1\!/_2(t+y)} b(\eta)(t + y - 2\eta)\, d\eta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} Mb$$

$$v_1(0, t) = g_1(t) = -\int_0^{{}^1\!/_2 t} b(\eta)(t - 2\eta)\, d\eta \tag{6}$$

Из формулы (6) видно, что $g_1 = g_1^{\cdot} = 0$ при $t = 0$. Дифференцируя (6) дважды по t, найдем

$$-2g_1^{\cdot\cdot}(t) = b(t/2) \tag{7}$$

---

[1] *Благовещенский А. С.* Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та, 1969, т. 15.

Подставляя в (5) выражение (7), найдем представление для v_1

$$v_1 = {}^1/_2\,[g_1(t+y) + g_1(t-y) - g_1(2y)]\varepsilon(t-y)\,.$$

Для $v_2(y, t)$ имеем

$$v_{2tt} = v_{2yy} + cv_0 + bv_1, \quad v_2|_{t<0} = 0, \quad v_{2y}|_{y=0} = 0$$

Аналогично предыдущему получим

$$v_2(y, t) = Mc + Nbv_1 \tag{8}$$

где Nbv_1 явно выражается через b и v_1, а следовательно, в силу (5) и (7) — через g_1. Полагая в (8) $y = 0$ и дважды дифференцируя по t, получим после вычислений

$$c\left(\frac{t}{2}\right) = -2g_2^{\cdot\cdot}(t) - g_1^{\cdot 2}(t) - \int_0^t d\tau g_1^{\cdot\cdot}(\tau)\,g_1^{\cdot}(t-\tau) \tag{9}$$

Формулы (7) и (9) дают искомый ответ.

Замечание 2. Условие $P(z, 0) = 0$ можно ослабить, потребовав вместо него чтобы коэффициенты полинома P были линейно-зависимыми функциями от z и $P(z, k_0) \equiv 0$ при некотором k_0. Тогда коэффициенты P находятся явно по коэффициентам разложения $g(k, t)$ по степеням $k - k_0$.

Замечание 3. Рассмотрим следующий пример. Как известно [5], уравнение акустики имеет вид

$$u_{tt} = \rho a^2 \operatorname{div}(\rho^{-1} \operatorname{grad} u) \tag{10}$$

где ρ — плотность среды, a — скорость звука. Пусть среда такова, что $\rho = \lambda/a$, a — функция от z, $\lambda = \mathrm{const}$. Тогда в двумерном случае (как, впрочем, и в трехмерном) обратная задача приводит к задаче вида (4), где $b \equiv 0$, $c = -a^2$. Из формулы (9) следует, что $a^2(t/2) = 2g_2^{\cdot\cdot}(t)$ (g_1 с необходимостью равна нулю)

$$z = \int_0^y a(t)\,dt$$

Замечание 4. Уравнение (10) описывает также (см. [2]) распространение упругих волн типа SH в слоисто-неоднородной среде, если в нем заменить ρ^{-1} на μ, ρa^2 на $(\rho')^{-1}$, где $\rho'(z)$ и $\mu(z)$ — соответственно плотность и параметр Ламе упругой среды. Полученные выше результаты применимы, если среда такова, что $\rho'\mu = \mathrm{const}$.

Поступила 10 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. *Алексеев А. С.* Некоторые обратные задачи теории распространения волн. Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962, т. 15, № 11.
3. *Благовещенский А. С.* Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн. В сб.: Проблемы математической физики, вып. 1, Изд-во ЛГУ, 1966.
4. *Благовещенский А. С.* Обратная задача для волнового уравнения с неизвестным источником. В сб.: Проблемы математической физики, вып. 4. Изд-во ЛГУ, 1970.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.