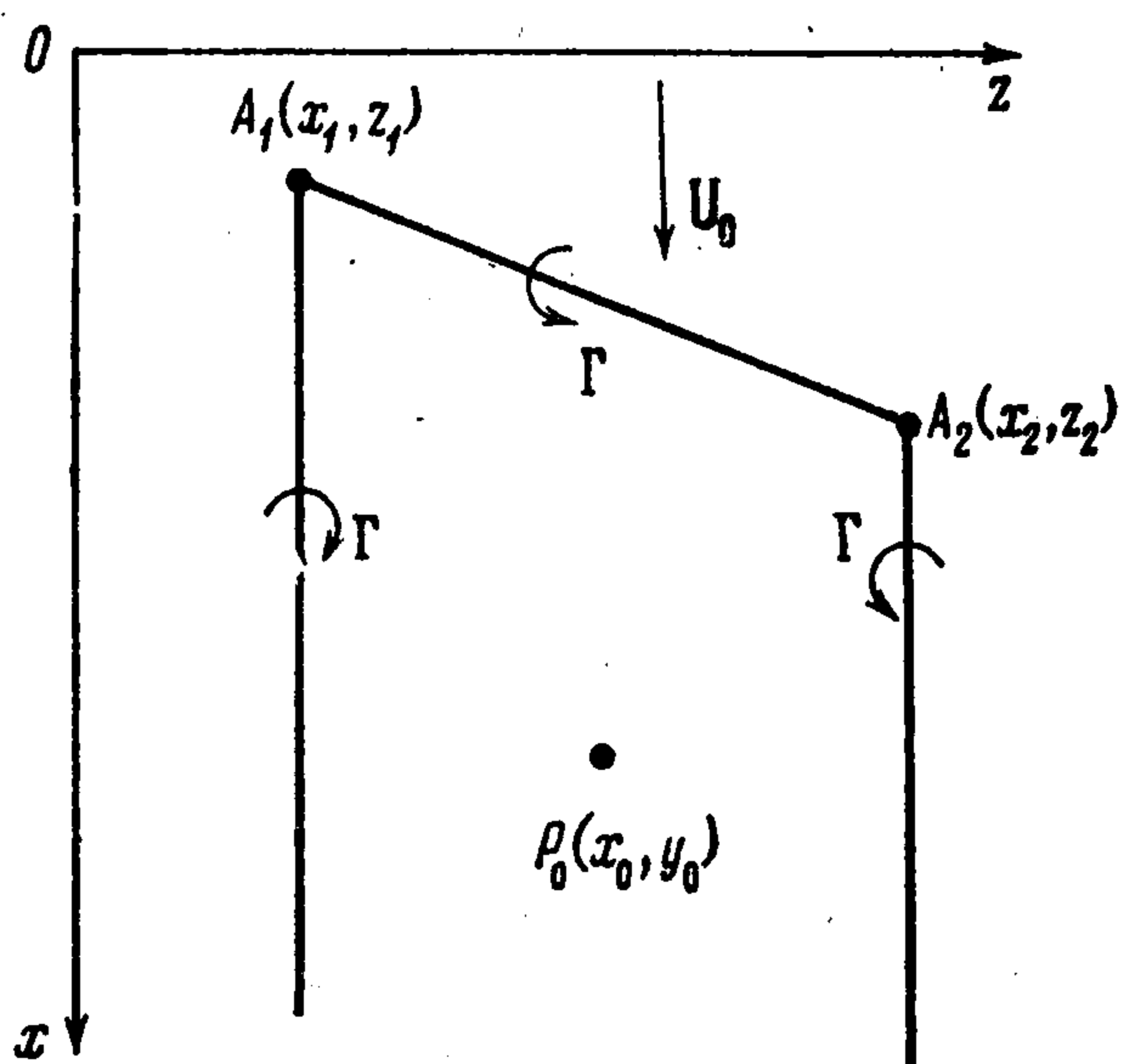


О МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

И. К. Лифанов

(Москва)

Рассматривается применение метода дискретных косых подковообразных вихрей к линейной стационарной задаче обтекания установившимся потоком крыла конечного размаха сложной формы в плане и схематизированного летательного аппарата с прямыми кромками. Получено интегральное уравнение для интенсивности вихревого слоя на крыле. Показано, что квадратурные суммы, возникающие при применении указанного метода, сходятся к интегралу, участвующему в интегральном уравнении. Дан метод численного решения указанного уравнения. Показано, что требуемый класс



решения интегрального уравнения для интенсивности вихревого слоя выделяется только взаимным расположением множеств дискретных вихрей и расчетных точек.

Метод дискретных вихрей [1-3] позволяет единым способом рассматривать линейные и нелинейные задачи стационарного и нестационарного, безотрывного и отрывного обтекания невязкой несжимаемой жидкостью тонких несущих поверхностей. Непрерывный вихревой слой, моделирующий несущую поверхность, заменяется системой дискретных вихрей. На несущей поверхности выбираются точки, называемые расчетными, в которых выполняются условия непротекания. Задача

сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых циркуляций дискретных вихрей.

Рассматриваемые задачи обтекания имеют несколько решений, различаемых характером поведения интенсивности вихревого слоя при подходе к кромкам. Требуемое решение выделяется с помощью взаимного расположения множеств дискретных вихрей и расчетных точек. Математическое обоснование указанного метода в применении к линейной стационарной задаче обтекания тонкого крыла бесконечного размаха для циркуляционного обтекания дано в [4], а для бесциркуляционного и безударного обтекания — в [5].

Рассмотрим косой подковообразный вихрь Π_{12} постоянной интенсивности Γ , состоящий из присоединенного вихря (A_1, A_2) , координаты концов A_1, A_2 которого в системе xuz (ось Ox направлена вдоль невозмущенного потока) равны $(x_1, 0, z_1)$ и $(x_2, 0, z_2)$ соответственно и двух прямолинейных свободных вихрей $(A_1, +\infty)$ и $(A_2, +\infty)$, сходящихся с концов присоединенного вихря и направленных вдоль скорости невозмущенного потока U_0 (см. фигуру). Уравнение линии вихря (A_1, A_2) запишем в виде $x(z) = a + zb$. Применяя формулу Био — Савара, получим, что величина скорости V_{12} в точке $P_0(x_0, z_0)$, индуцированная вихрем Π_{12} , определяется выражением

$$(1) \quad V_{12} = \Gamma (v^2 - v^1) / (4\pi)$$

$$v^k = (\lambda + [(x_0 - x_k)^2 + (z_0 - z_k)^2]^{1/2}) / [\lambda (z_0 - z_k)], \quad k = 1, 2$$

$$\lambda = x_0 - a - z_0 b$$

Рассмотрим теперь задачу обтекания канонической трапеции σ , которую можно представлять как половину крыла, ребра которой, задаваемые уравнениями $z = 0$ и $z = b$, будем называть боковыми кромками, а ребра, задаваемые уравнениями $x_-(z) = a^0 + zb^0$ и $x_+(z) = a^1 + zb^1$, — соответственно передней и задней кромками.

Скорость U_0 установившегося потока вдали от канонической трапеции σ направлена в положительном направлении вдоль оси Ox .

Частным случаем канонической трапеции σ является прямоугольное крыло. Одна из боковых кромок σ может обращаться в точку.

Представим несущий вихревой слой, возникающий на σ , системой дискретных косых подковообразных вихрей [1]. Пусть $D = [0, 1] \times [0, l]$ — прямоугольник плоскости Ox^1z . Разделим отрезок $[0, 1]$ оси Ox^1 на $n + 1$ отрезков $[x_i^1, x_{i+1}^1]$ ($i = 0, 1, \dots, n$) длины h_1 , а отрезок $[0, l]$ оси Oz на N отрезков $[z_k, z_{k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots, N$) длины h_2 . Точки x_{0j}^1 и z_{0m} делят пополам отрезки $[x_j^1, x_{j+1}^1]$ и $[z_m, z_{m+1}]$ соответственно.

Рассмотрим отображение F прямоугольника D на σ , определяемое соотношениями

$$(2) \quad x(x^1, z) = x^1 [x_+(z) - x_-(z)] + x_-(z), \quad z = z$$

Якобиан отображения F имеет вид $J(z) = x_+(z) - x_-(z)$.

Пусть $A_{ik}(x_{ik}, z_k)$, $A_{im}(x_{im}, z_{0m})$, $A_{jm}(x_{jm}, z_{0m})$ — соответственно образы точек

$$A_{ik}^1(x_i^1, z_k), \quad A_{im}^1(x_i^1, z_{0m}), \quad A_{jm}^1(x_{0j}^1, z_{0m})$$

Рассмотрим косой вихрь Π_{ik} , у которого присоединенным является вихрь $(A_{ik}, A_{ik} + 1)$. Так как $x(x^1, z) = a(x^1) + zb(x^1)$, $a(x^1) = a^0 + x^1(a^1 - a^0)$, $b(x^1) = b^0 + x^1(b^1 - b^0)$, то уравнение линии присоединенного вихря $(A_{ik}, A_{i,k+1})$ имеет вид $x_i(z) = x(x_i^1, z)$. Интенсивность вихря Π_{ik} определяется соотношением $\Gamma_{ik} = \Phi_{ik}h_1$, $\Phi_{ik} = J(z_{0k})\gamma(x_{im}, z_{0m})$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$. Здесь $\gamma(x, z)$ — составляющая по координате z интенсивности вихревого слоя в точке $A(x, z)$ канонической трапеции σ . Величины скоростей, индуцированных косыми вихрями, определяем в расчетных точках $P_{jm}(x_{jm}, z_{0m})$, являющихся образами точек $P_{jm}^1(x_{0j}^1, z_{0m})$. Обозначим через V_{jm}^{ik} величину скорости, индуцированную косым вихрем Π_{ik} в точке P_{jm} . Величина скорости V_{jm} , индуцированная в точке P_{jm} всей системой косых вихрей, определяется, согласно формуле (1) и соотношению $x_{jm} = a(x_{0j}^1) - z_{0m}b(x_{0j}^1)$, выражением

$$(3) \quad 4\pi V_{jm} = \sum_{l=1}^3 C_l, \quad C_1 = \sum_{i=1}^n \Phi_{i1} \Lambda_{jm}^{i1} h_1$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^N (\Phi_{ik} - \Phi_{i,k-1}) \Lambda_{jm}^{ik} h_1, \quad C_3 = \sum_{i=1}^n \Phi_{iN} \Lambda_{jm}^{i,N+1} h_1$$

$$\Lambda_{jm}^{ik} = \{\lambda_{jmi} + [(x_{jm} - x_{ik})^2 + (z_{0m} - z_k)^2]^{1/2}\} / [\lambda_{jmi} (z_{0m} - z_k)]$$

$$\lambda_{jmi} = x_{jm} - a(x_i^1) - z_{0m}b(x_{0j}^1) = J(z_{0m})(x_{0j}^1 - x_i^1)$$

Предположим, что функция $\partial\gamma(x(x^1, z), z) / \partial z$ принадлежит классу H^* на прямоугольнике $D = [0, 1] \times [0, l]$ плоскости Ox^1z . Функция $\psi^*(x^1, z)$ принадлежит классу H^* [5] на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, если она имеет вид $\psi^*(x^1, z) = \psi(x^1, z) \times (x^1 - a)^{-\nu_1} (b - x^1)^{-\mu_1} (z - c)^{-\nu_2} (d - z)^{-\mu_2}$, $0 \leq \nu_k, \mu_k < 1$, $k = 1, 2$ и $\psi(x^1, z) \in H$ на $[a, b] \times [c, d]$, т. е. удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных [6]. Тогда, применяя результаты работы [4] и обобщая результаты для двумерного сингулярного интеграла типа Коши [5], получим, что при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$, $0 < \delta \leq h_1 / h_2 \leq T < +\infty$ равенство (3) для величины скорости $V(x_0, z_0)$ в точке $P_0(x_0, z_0)$ на σ примет вид

$$(4) \quad 4\pi V(x_0, z_0) = \sum_{l=1}^3 I_l$$

$$I_1 = \int_0^1 \Lambda(\lambda, x, x_0, 0, z_0) \varphi(x, 0) dx^1$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^l \Lambda(\lambda, x, x_0, z, z_0) \left[\frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} \right] dx^1 dz$$

$$I_3 = \int_0^1 \Lambda(\lambda, x, x_0, l, z_0) \varphi(x, l) dx^1$$

$$\Lambda(\lambda, x, x_0, z, z_0) = \{\lambda + [(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]\}^{1/2} / [\lambda(z_0 - z)]$$

$$\lambda = J(z_0)(x_0^1 - x^1), \quad x_0 = x(x_0^1, z_0), \quad x = x(x^1, z)$$

Применяя теперь понятие интеграла в смысле конечной части по Адамару [7], учитывая соотношение, $\varphi(x, z) = \gamma(x(x^1, z), z)J(z)$ и переходя к переменным x, z при помощи замены переменных, задаваемой отображением F , получим интегральное уравнение для интенсивности $\gamma(x, z)$ ($(x_0, z_0) \in \sigma$)

$$(5) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{(\sigma)} \gamma(x, z) \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}} \right) dx dz = V(x_0, z_0)$$

Для определения численного значения интенсивности $\gamma(x, z)$ вихревого слоя в расчетных точках рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N V_{jm}^{ik} = V_{jm}, \quad j = 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N$$

Здесь значения V_{jm} считаем известными в точках P_{jm} из условия непротекания на поверхности σ ; при этом множества вихрей $\{(A_{ik}, A_{i,k+1}), i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, \dots, N\}$ и расчетных точек $\{P_{jm}, j = 1, \dots, n, m = 1, \dots, N\}$ расположены так, что ближайшими к передней кромке лежат вихри, а к задней кромке — расчетные точки.

Для исследования поведения $\gamma(x, z)$ при подходе к передней и задней кромкам запишем систему (6) с учетом (3) в виде

$$(7) \quad -2 \sum_{i=1}^n \gamma(x_{im}, z_{0m}) \theta(x_i^1) \frac{h_1}{x_{0j}^1 - x_i^1} = 4\pi V_{jm} + S_{jm}$$

$$S_{jm} = \sum_{l=1}^3 S^l, \quad S^1 = \sum_{i=1}^n \varphi_{i1} (\Lambda_{jm}^{i1} - \Phi_{jm}^{i1}) h_1$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^N (\varphi_{ik} - \varphi_{i,k-1}) (\Lambda_{jm}^{ik} - \Phi_{jm}^{ik}) h_1$$

$$S^3 = \sum_{i=1}^n \varphi_{iN} (\Lambda_{jm}^{i,N+1} - \Phi_{jm}^{i,N+1}) h_1$$

$$\Phi_{jm}^{ik} = |z_{0m} - z_k| \theta(x_i^1) / [\lambda_{jmi}(z_{0m} - z_k)]$$

$$\theta^2(x_i^1) = 1 + b^2(x_i^1), \quad j = 1, \dots, n; \quad m = 1, \dots, N$$

При каждом фиксированном m , согласно результатам [4], получим

$$(8) \quad 2\gamma(x_{im}, z_{0m}) \theta(x_i^1) = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1 - x_i^1}{x_i^1}} \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{x_{0j}^1}{1 - x_{0j}^1}} \times$$

$$\times (4\pi V_{jm} + S_{jm}) \frac{h_1}{x_i^1 - x_{0j}^1} + \alpha(i, m); \quad i = 1, \dots, n, \quad m = 1, \dots, N$$

Здесь $\alpha(i, m) \rightarrow 0$ равномерно для всех $(x_i^1, z_{0m}) \in [\delta, 1 - \delta] \times [\delta, l - \delta]$ для любого числа $\delta > 0$.

Система (8) показывает, что если решение системы (6) существует, то функция $\gamma(x, z)$, являющаяся пределом этого решения при $n \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$, при любом $z \in (0, l)$ удовлетворяет соотношениям

$$\gamma(x(x^1, z), z) |_{x^1=1} = \gamma(x_+(z), z) = 0$$

$$\gamma(x(x^1, z), z) |_{x^1=0} = \gamma(x_-(z), z) = 0$$

Рассмотрим теперь в качестве несущей поверхности σ крыло сложной формы в плане с прямыми кромками или схематизированный летательный аппарат [3].

Предположим, что σ лежит в плоскости Oxz . Через все угловые точки контура σ проведем прямые, параллельные оси Ox . Тогда вся поверхность σ разобьется на канонические трапеции σ_ε , $\varepsilon = 1, \dots, p$, пересекающиеся только по боковым кромкам. Пусть боковые кромки σ_ε задаются уравнениями $z = l_\varepsilon^1$, $z = l_\varepsilon^2$, а передняя и задняя кромки — соответственно уравнениями $x_-^\varepsilon(z) = a_\varepsilon^0 + zb_\varepsilon^0$, $x_+^\varepsilon(z) = a_\varepsilon^1 + zb_\varepsilon^1$, $\varepsilon = 1, \dots, p$.

Рассмотрим p экземпляров плоскостей $Ox^\varepsilon z$ и прямоугольников $D_\varepsilon = [0, 1] \times [l_\varepsilon^1, l_\varepsilon^2]$ в каждой из них. Разобьем отрезок $[0, 1]$ оси Ox^ε точками x_i^ε , x_{0i}^ε ($i=1, \dots, n_\varepsilon$ для данного ε) с шагом h_1^ε , а отрезок $[l_\varepsilon^1, l_\varepsilon^2]$ — точками z_k^ε , z_{0k}^ε ($k=1, \dots, N_\varepsilon$) с шагом h_2^ε . Если σ_ε и σ_ν лежат друг за другом по потоку, т. е. $l_\varepsilon^k = l_\nu^k$, $k = 1, 2$, положим $h_2^\varepsilon = h_2^\nu$, а следовательно, $N_\varepsilon = N_\nu$. Последнее требование наложено для того, чтобы линии свободных вихрей, сходящих с σ_ε и σ_ν , совпадали.

Косые вихри Π_{ik}^ε на трапеции σ_ε определим с помощью отображения F_ε прямоугольника D_ε на σ_ε , определяемого соотношениями $x(x^\varepsilon, z) = x^\varepsilon [x_+^\varepsilon(z) - x_-^\varepsilon(z)] + x_-^\varepsilon(z)$, $z = z$. Якобиан отображения F_ε имеет вид $J_\varepsilon(z) = x_+^\varepsilon(z) - x_-^\varepsilon(z)$.

Учитывая следующее из (1) соотношение

$$(9) \quad V_{12} = \Gamma w(x(z), x_0, z, z_0) / (4\pi)$$

$$w(x(z), x_0, z_1, z_2, z_0) = \int_{z_1}^{z_2} R(x(z), x_0, z, z_0) dz$$

$$R(x(z), x_0, z, z_0) = \frac{1}{(z_0 - z)^2} \left(1 + \frac{x_0 - x(z)}{\sqrt{[x_0 - x(z)]^2 + (z_0 - z)^2}} \right)$$

для величины скорости V_{jm}^ε , индуцированной в точке $P_{jm}^\varepsilon(x_{jm}^\varepsilon, z_{0m}^\varepsilon)$ трапеции σ_ε всей системой косых вихрей на σ , найдем

$$(10) \quad V_{jm}^\varepsilon = V_{jm}^{\varepsilon\varepsilon} + \sum_{\nu=1, \nu \neq \varepsilon}^p \sum_{i=1}^{n_\nu} \sum_{k=1}^{N_\nu} \frac{\Gamma_{ik}^\nu}{4\pi} w_{ikjm}^{\nu\varepsilon}$$

$$w_{ikjm}^{\nu\varepsilon} = w(x_i^\nu(z), x_{jm}^\varepsilon, z_k^\nu, z_{k+1}^\nu, z_{0m}^\varepsilon), \quad x_i^\nu(z) = x(x_i^\nu, z)$$

Здесь $V_{jm}^{\nu\varepsilon}$ — величина скорости, индуцированная в точке P_{jm}^ε трапеции σ_ε системой дискретных вихрей на трапеции σ_ν , $x_i^\nu(z)$ — уравнение линии присоединенного вихря $(A_{ik}^\nu, A_{i,k+1}^\nu)$ на этой трапеции, концы которого имеют координаты $(x_{ik}^\nu = x_i^\nu(z_k), z_k)$ и $(x_{ik+1}^\nu = x_i^\nu(z_{k+1}), z_{k+1})$.

Предположим, что функция $\gamma(x(x^\varepsilon, z), z)$ принадлежит классу H^* на прямоугольнике D_ε . Применяя к $V_{jm}^{\varepsilon\varepsilon}$ рассуждения, аналогичные приведенным выше для случая канонической трапеции, а для $\nu \neq \varepsilon$, замечая, что либо $z_0 - z$, либо $l_\varepsilon^\nu = x(x_0^\varepsilon, z_0) - a(x^\nu) - z_0 b(x^\nu)$ не меняют знака при $z_0 \in (l_\varepsilon^1, l_\varepsilon^2)$, $z \in [l_\nu^1, l_\nu^2]$, и переходя к пределу при $n_\varepsilon \rightarrow \infty$, $N_\varepsilon \rightarrow \infty$, $0 < \delta \leq h_1^\varepsilon / h_2^\varepsilon$, $h_k^2 / h_k^\nu \leq T < +\infty$, $\varepsilon, \nu = 1, \dots, p$; $k = 1, 2$ для величины скорости $V(x_0, z_0)$ в точке $P_0(x_0, z_0)$ несущей поверхности, получим

$$(11) \quad V(x_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^p \iint_{(\sigma_\nu)} \gamma(x, z) R(x, x_0, z, z_0) dx dz$$

Из формулы (11) следует, что уравнение (5) справедливо и для рассматриваемой несущей поверхности σ сложной формы.

Для определения численного значения решения $\gamma(x, z)$ в расчетных точках P_{jm}^ε , $\varepsilon = 1, \dots, p$ ($j = 1, \dots, n_\varepsilon$, $m = 1, \dots, N_\varepsilon$ для данного ε) поверхности σ следует

рассмотреть систему линейных алгебраических уравнений

$$(12) \quad \sum_{v=1}^p \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{k=1}^{N_v} V_{ikjm}^{ve} = V_{jm}^e$$

Здесь V_{ikjm}^{ve} — величина скорости, индуцированной косым вихрем Π_{ik}^v трапеции σ_v в точке P_{jm}^e трапеции σ_e .

Из свойств системы (12) аналогично предыдущему следует, что функция $\gamma(x, z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\gamma(x_+^e(z), z) = 0, \quad \gamma(x_-^e(z), z) = \infty, \quad z \in (l_e^1, l_e^2)$$

Поступила 29 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
2. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
3. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях. М., «Наука», 1975.
4. Лифанов И. К., Полонский Я. Е. Обоснование численного метода «дискретных вихрей» решения сингулярных интегральных уравнений. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
5. Лифанов И. К. О сингулярных интегральных уравнениях с одномерными и кратными интегралами типа Коши. Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
7. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.

УДК 534.2:532+539.3:534.1

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. С. Благовещенский

(Ленинград)

Рассматривается следующая обратная задача. Пусть функция $u(x, z, t)$ удовлетворяет в полупространстве $z > 0$, $x \in R^n$, $t \in (-\infty, \infty)$ уравнению вида

$$(1) \quad u_{tt} = a(z) \frac{\partial}{\partial z} (a(z) u_z) + P\left(z, i \frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

где $P(z, k)$ — полином произвольной степени от $k \in R^n$ с коэффициентами — функциями от z , $a(z) > 0$. Пусть u — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$(2) \quad u|_{t < 0} = 0, \quad au_z|_{z=0} = \delta(x, t)$$

преобразование Фурье от которого по x ; функция $v(k, z, t)$ дифференцируема по k столько раз, какова степень полинома P .

Замечание 1. Неизвестны общие условия, обеспечивающие существование такого решения, однако оно заведомо существует, если дифференциальный оператор в правой части уравнения (1) второго порядка и эллиптический (тогда u — решение смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка [1]).

Ставится задача: определить коэффициенты оператора $P(z, i\partial/\partial x)$, если известна функция

$$3) \quad f(x, t) = u(x, 0, t)$$