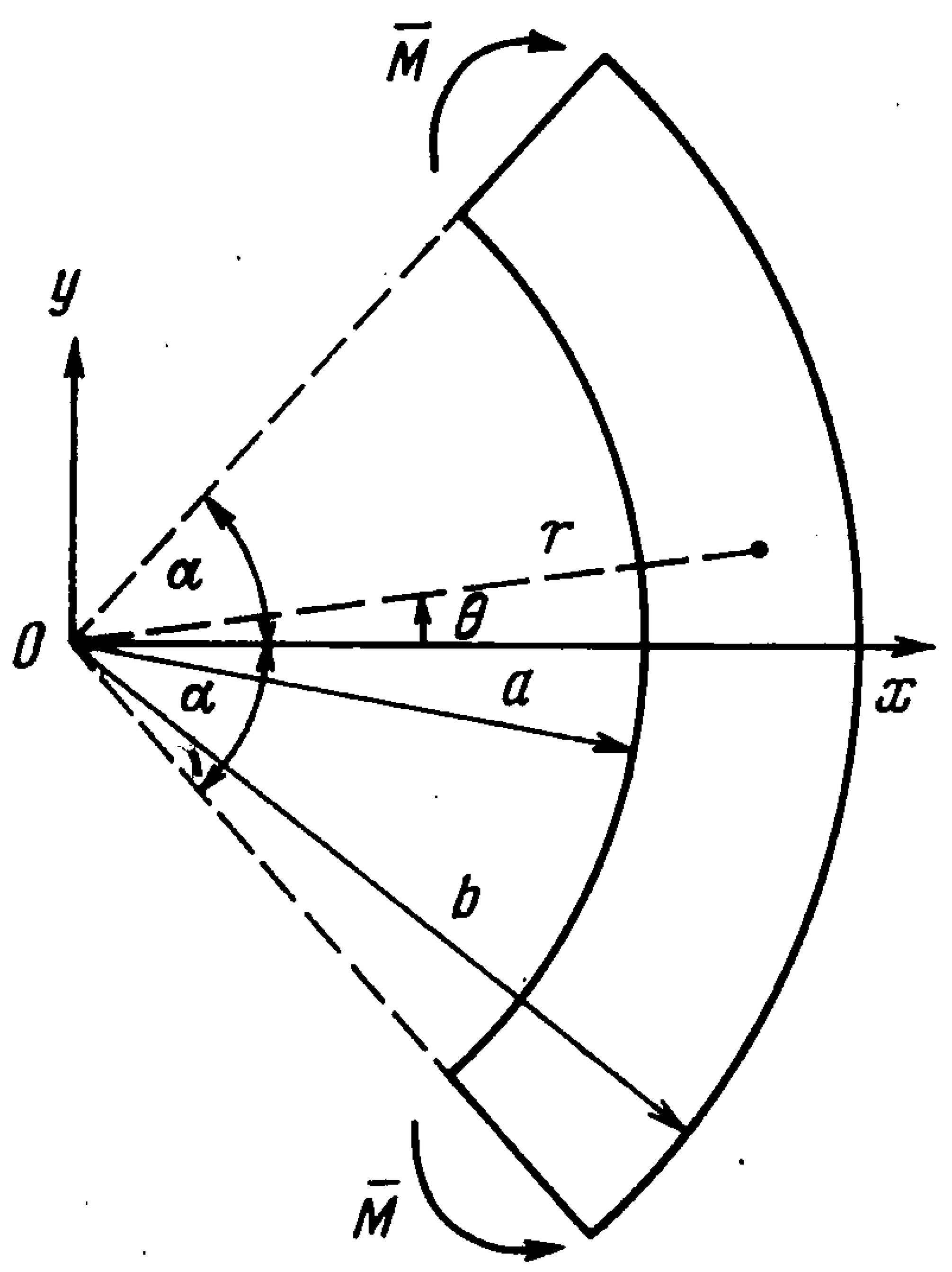
УДК 539.3

ОБ ИЗГИБЕ ПЛОСКОГО НЕОДНОРОДНОГО КРИВОГО БРУСА

С. Г. Лехницкий

(Ленинград)

Рассматривается плоская задача о чистом изгибе непрерывно-неоднородного кривого бруса, область которого ограничена двумя дугами концентрических окружностей и двумя радиусами. Предполагается, что материал является изотропным с постоянным коэффициентом Пуассона и с модулем Юнга, зависящим от координат. Показывается, что при определенном задании модуля Юнга задача имеет элементарное точное решение, которое и приводится.



1. Примем центр окружностей $r = a$ и $r = b\,(a < b)$ за начало координат и направим полярную ось x по оси симметрии области бруса (фигура). Угол 2α между двумя крайними радиальными сечениями (торцами) считаем произвольным, но меньшим 2π. Нагрузка задается в виде изгибающих моментов $\bar{M}$ (на единицу площади), приложенных к торцам $\theta = \pm\alpha$. Задача рассматривается в линейной постановке (предполагается, что материал испытывает малые деформации и следует обобщенному закону Гука)

$$\varepsilon_r = e\,(\sigma_r - \mu\sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = e\,(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \tag{1.1}$$

$$\gamma_{r\theta} = 2e\,(1+\mu)\,\tau_{r\theta}$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния $e = 1/E$, $\mu = \nu$, в случае плоской деформации $e = (1-\nu^2)/E$, $\mu = \nu/(1-\nu)$. Условие совместности деформаций имеет вид (см. [1], § 23)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\right)\varepsilon_r + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varepsilon_\theta) - \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\gamma_{r\theta}) = 0 \tag{1.2}$$

В однородном и непрерывно-неоднородном брусе с упругими характеристиками E (модуль Юнга) или β_{ij}, зависящими только от расстояния r, напряжения одинаковы во всех радиальных сечениях. Функция напряжений зависит только от r, т. е.

$$F = f(r), \quad \sigma_r = f'(r)/r, \quad \sigma_\theta = f''(r), \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{1.3}$$

На криволинейных сторонах $\sigma_r = 0$, а на торцах σ_θ приводится к изгибающему моменту $\bar{M}$. Отсюда получаем окончательно три условия (см. [2], § 24 и [3], гл. III)

$$f'(a) = f'(b) = 0, \quad f(b) - f(a) = \bar{M} \tag{1.4}$$

2. Поставим задачу таким образом: 1) определить, какой должна быть функция $e\,(r, \theta)$, чтобы напряжения в рассматриваемом брусе имели вид (1.3) и 2) найти соответствующую функцию f' и составляющие напряжения. Для этого нужно найти решения уравнения (1.2) — функции $e\,(r, \theta)$ и $f'(r)$ и удовлетворить условиям (1.4).

Уравнение (1.2) перепишется так:

$$\left(\frac{f'}{r} - \mu f''\right)\frac{\partial^2 e}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left[e\left(\frac{f'}{r} - \mu f''\right)\right] + r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[e\,(rf'' - \mu f')\right] = 0 \tag{2.1}$$

Функция e должна быть положительной во всех точках r, θ области бруса, так как $E > 0$ и только на торцах $\theta = \pm\alpha$ допустим, что e может обратиться в нуль ($E = \infty$).

Не исследуя вопроса во всей его полноте, укажем только класс частных случаев неоднородности, для которого точное решение находится элементарным путем. Будем искать решение уравнения (2.1) в виде произведения

$$e = R(r)\Phi(\theta)$$

После подстановки в (2.1) переменные разделяются, и получим два уравнения

(2.2) $$\Phi'' + n^2\Phi = 0$$

(2.3) $$f^{\mathrm{IV}} + 2\left(\frac{R'}{R} + \frac{1}{r}\right)f''' + \left(\frac{R''}{R} + \frac{2-\mu}{r}\frac{R'}{R} + \frac{\mu n^2 - 1}{r^2}\right)f'' - \left(\frac{\mu}{r}\frac{R''}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{R'}{R} + \frac{n^2-1}{r^3}\right)f' = 0$$

(n — любое вещественное или чисто мнимое число или нуль). Очевидно, Φ выражается через элементарные функции, а f' определится как общий интеграл линейного уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами. Входящие в него три постоянные найдутся из условий (1.4). Таким образом, получаем выражение для упругой характеристики e, при которой напряжения имеют вид (1.3)

(2.4) $$e = R(r)(A\cos n\theta + B\sin n\theta), \quad n \neq 0$$

(2.5) $$e = R(r)(A + B\theta), \quad n = 0$$

Постоянные A, B, n и функция R не могут быть совершенно произвольными, так как во всех случаях $e > 0$ (за исключением, может быть, точек торцов $\theta = \pm\alpha$).

При произвольном задании R отыскание решения уравнения (2.3) сопряжено с трудностями, но если функция R задана в виде степенной функции $R = r^m$ (m — вещественное число), то это уравнение легко решается. Решение зависит от корней уравнения третьей степени, которое получается из (2.3). Если среди корней s_j нет кратных, то

$$f' = C_1 r^{s_1} + C_2 r^{s_2} + C_3 r^{s_3}$$

Самыми простыми будут случаи, когда $m = n$, $m = -n$ и $m = 0$.

1) $m = n, \quad s_1 = 1, \quad s_{2,3} = -n \pm \sqrt{1 - n(1-\mu) - \mu n^2}$

2) $m = -n, \quad s_1 = 1, \quad s_{2,3} = n \pm \sqrt{1 + n(1-\mu) - \mu n^2}$

3) $m = n = 0, \quad s_1 = s_2 = 1, \quad s_3 = -1$

В последнем случае (формула (2.5), где $R = 1$) распределение напряжений в неоднородном изотропном брусе не будет отличаться от распределения в таком же однородном изотропном брусе.

Заметим, что решения (2.4), (2.5) непригодны для полого цилиндра, у которого поперечное сечение есть сплошное, неразрезанное кольцо. Если допустить, что существуют упругие характеристики вида (2.4) и (2.5), то это будет означать, что в области поперечного сечения имеются участки, где $E < 0$, т. е решения не будут иметь физического смысла.

Поступила 4 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2. М., «Наука», 1977.
2. *Колчин Г. Б.* Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Кишинев, «Картя Молдовеняскэ», 1971.
3. *Колчин Г. Б.* Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев, «Штиинца», 1977.