ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
2. *Andoyer M. H.* Cours de mécanique céleste, T. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1923.
3. *Kinoshita H.* First-order perturbation of the two finite body problem. Publ. Astron. Soc. Japan, 1972, vol. 24, No. 4.
4. *Баркин Ю. В., Демин В. Г.* О периодических движениях твердого тела с закрепленной точкой в ньютоновском поле. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
5. *Пуанкаре А.* Избр. тр., т. 1. М., «Наука», 1971.

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В. З. ВЛАСОВА

Н. Н. Рогачева

(Москва)

Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек В. З. Власова [1] дает возможность выполнить только по два граничных условия на криволинейных краях оболочки. Два оставшихся условия выполняются за счет произволов простого краевого эффекта. По аналогии с безмоментной теорией при расчете оболочки по теории В. З. Власова на криволинейных краях обычно выполняют тангенциальные условия, а невязки, появившиеся в нетангенциальных условиях, снимаются с помощью простого краевого эффекта.

В предлагаемой работе граничные условия на криволинейных краях для системы уравнений В. З. Власова получены асимптотическим методом. В результате оказалось, что для некоторых типов закрепления краев оболочки искомые граничные условия должны содержать нетангенциальные величины. Полученные результаты подтверждены численным примером.

Теорию В. З. Власова обобщил на произвольные оболочки нулевой кривизны А. Л. Гольденвейзер. В [2] рассматриваемое напряженно-деформированное состояние названо обобщенным краевым эффектом.

Используемые ниже терминология и обозначения взяты из [2].

1. Пусть искомые величины имеют вдоль образующих (будем считать, что они совпадают с α-линиями) показатель изменяемости θ; а по направляющим (это β-линии) показатель изменяемости t. Тогда вместо α и β можно ввести новые переменные ξ и η следующим образом:

$$\alpha = Rh_*^{\theta}\xi, \quad \beta = Rh_*^{t}\eta \tag{1.1}$$

(h_* — относительная полутолщина оболочки, R —характерный радиус).

В дальнейшем будем считать, что дифференцирование по ξ и η не приводит к существенному увеличению или уменьшению искомых функций.

Величины t и θ, как показано в [2], могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. При $t = 0$ обобщенный краевой эффект полностью утрачивает способность к затуханию. В этом случае говорят, что он вырождается. Показатели изменяемости t и θ связаны следующим соотношением:

$$t = {}^1/_4 + {}^1/_2\,\theta \quad (0 \leqslant t < {}^1/_2) \tag{1.2}$$

Для искомого напряженно-деформированного состояния имеет место следующее асимптотическое представление (в несколько другом виде оно приведено в [2]):

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &u = h_*^{-1+\theta} u_*, \quad v = h_*^{-1+2\theta-t} v_*, \quad w = h_*^{-1+2\theta-2t} w_* \\ &T_1 = h_*^{0} T_{1*}, \quad T_2 = h_*^{1-2t} T_{2*}, \quad S = h_*^{1/2-t} S_* \\ &(G_1, G_2) = h_*^{1} (G_{1*}, G_{2*}), \quad H = h_*^{1+t-\theta} H_* \\ &N_1 = h_*^{3/2-2t} N_{1*}, \quad N_2 = h_*^{1-t} N_{2*} \end{aligned}$$

Здесь и ниже будем считать, что все величины со звездочками одного порядка.

Подставляя (1.3) и (1.1) в уравнения цилиндрических оболочек и задаваясь точностью до величин порядка ε, где

$$(1.4)\qquad \varepsilon = O\left(h_*^{1-2t}\right)$$

получим уравнения В. З. Власова.

Выпишем с учетом асимптотики (1.3) только те уравнения, которые потребуются при расчленении граничных условий

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} &T_{1*} - h_*^{1-2t} \nu T_{2*} = 2E \frac{\partial u_*}{\partial \xi} \\ &h_*^{2-4t} T_{2*} - h_*^{1-2t} \nu T_{1*} = 2E \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v_*}{\partial \eta} - R \frac{w_*}{R_2} \right) \end{aligned}$$

2. Предположим, что внутреннее напряженное состояние оболочки допускает расчленение на обобщенный и простые краевые эффекты.

Следуя [2], представим все искомые величины в виде суммы двух слагаемых

$$(2.1)\qquad P = P^{(g)} + h_*^{a} P^{(s)}$$

Здесь P — любая из величин (перемещения, усилия, моменты), определяющих напряженно-деформированное состояние оболочки. Индексы (g) и (s) означают принадлежность данной величины к обобщенному или простому краевым эффектам соответственно. Считается, что $P^{(g)}$ можно строить, исходя из неоднородных уравнений обобщенного краевого эффекта, а $P^{(s)}$ строится из однородных уравнений простого краевого эффекта, поэтому при $P^{(s)}$ стоит масштабный множитель h_*^{a}, где a — общее для всех величин число, которое будет подбираться в зависимости от граничных условий.

Как показано в [2], для величин простого краевого эффекта имеет место следующая асимптотика:

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &u = h_*^{1/2} u_*, \quad v = h_*^{1-t} v_*, \quad w = h_*^{0} w_*, \quad \gamma_1 = h_*^{-1/2} \gamma_{1*} \\ &T_1 = h_*^{2-2t} T_{1*}, \quad T_2 = h_*^{1} T_{2*}, \quad S = h_*^{3/2-t} S_*, \quad G_1 = h_*^{2} G_{1*} \\ &N_1 = h_*^{3/2} N_{1*}, \quad N_2 = h_*^{2-t} N_{2*}, \quad H = h_*^{5/2-t} H_* \end{aligned}$$

Рассмотрим различные граничные условия.

Шарнирно-опертый край. Граничные условия на краю $\alpha = \alpha_0$ имеют вид

$$T_1 = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad G_1 = 0$$

Учитывая (2.1), (2.2), (1.3), их можно представить в виде

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &h_*^{-1+2\theta-t} v_*^{(g)} + h_*^{a+1-t} v_*^{(s)} = 0, \quad h_*^{0} T_{1*}^{(g)} + h_*^{a+2-2t} T_{1*}^{(s)} = 0 \\ &h_*^{-2+2t} w_*^{(g)} + h_*^{a} w_*^{(s)} = 0, \quad h_*^{1} G_{1*}^{(g)} + h_*^{a+2} G_{1*}^{(s)} = 0 \end{aligned}$$

Непротиворечивую краевую задачу получим, положив $a = -2t$. Тогда из первых двух формул (2.3) с точностью (1.4) вытекают следующие граничные условия для обобщенного краевого эффекта:

$$(2.4)\qquad v^{(g)} = 0, \quad T_1^{(g)} = 0$$

Из (2.3), (1.5) следует, что смещение $v_*^{(g)}$, а значит, $\partial v_*^{(g)}/\partial\eta$, $T_{1*}^{(g)}$ и $\varepsilon_{1*}^{(g)}$ с некоторой точностью равны нулю на краю. Тогда из (1.5) и последних двух формул (2.3) можно получить, что на краю уменьшатся $w^{(g)}$ и $G_1^{(g)}$ следующим образом: вместо $h_*^{-2+2t}w_*^{(g)}$ будет $h_*^{-2t}w_*^{(g)}$, а вместо $h_*^{1}G_{1*}^{(g)}$ будет $h_*^{2-2t}G_{1*}^{(g)}$. В результате граничные условия для простого краевого эффекта запишутся так:

$$w^{(s)} = R_2T_2^{(g)}/(2Eh), \quad G_1^{(s)} = -G_1^{(g)} \tag{2.5}$$

Отметим, что при выводе граничных условий использовались полные уравнения цилиндрических оболочек.

Для рассмотренного закрепления края главные напряжения простого краевого эффекта в h_*^{-1+2t} раз меньше главных напряжений обобщенного краевого эффекта. Это соответствует существующему представлению о малости простого краевого эффекта вблизи шарнирно-опертого края.

Рассмотрим другой вид граничных условий, описывающих шарнирное опирание на краю $\alpha = \alpha_0$

$$S = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad G_1 = 0 \tag{2.6}$$

Возьмем $a = -1$. Поступая так же, как в предыдущем случае, получим граничные условия для обобщенного краевого эффекта и граничные условия для простого эффекта

$$u^{(g)} = 0, \quad w^{(g)} = 0 \tag{2.7}$$

$$S^{(s)} = -S^{(g)}, \quad G_1^{(s)} = 0 \tag{2.8}$$

Интенсивность простого краевого эффекта по главным напряжениям такая же, как и обобщенного краевого эффекта.

Отметим, что в случае закрепления (2.6) граничные условия расчленяются не обычным образом: в условия для обобщенного краевого эффекта (2.7) наряду с тангенциальным смещением $u^{(g)}$ вошло нетангенциальное смещение $w^{(g)}$, а в условия для простого краевого эффекта (2.8) вошло тангенциальное усилие $S^{(s)}$.

Свободный край ($\alpha = \alpha_0$)

$$S = 0, \quad T_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

Полагая в (2.1) $a = -1$, получим тангенциальные условия для обобщенного краевого эффекта и нетангенциальные условия для простого краевого эффекта

$$T_1^{(g)} = 0, \quad S^{(g)} = 0 \tag{2.9}$$

$$G_1^{(s)} = -G_1^{(g)}, \quad N_1^{(s)} = 0 \tag{2.10}$$

Защемленный край ($\alpha = \alpha_{10}$)

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \gamma_1 = 0$$

или с учетом асимптотики

$$h_*^{-1+\theta}u_*^{(g)} + h_*^{a+1/2}u_*^{(s)} = 0, \quad h_*^{-1+2\theta-t}v_*^{(g)} + h_*^{a+1-t}v_*^{(s)} = 0$$

$$h_*^{-1+2\theta-2t}w_*^{(g)} + h_*^{a}w_*^{(s)} = 0, \quad h_*^{-2+t}\gamma_{1*}^{(g)} + h_*^{a-1/2}\gamma_{1*}^{(s)} = 0$$

Положим $a = -3/2 + t$. Тогда с точностью до величин $O(h_*^{1/2-t})$ получим условия для обобщенного краевого эффекта и для простого краевого эффекта

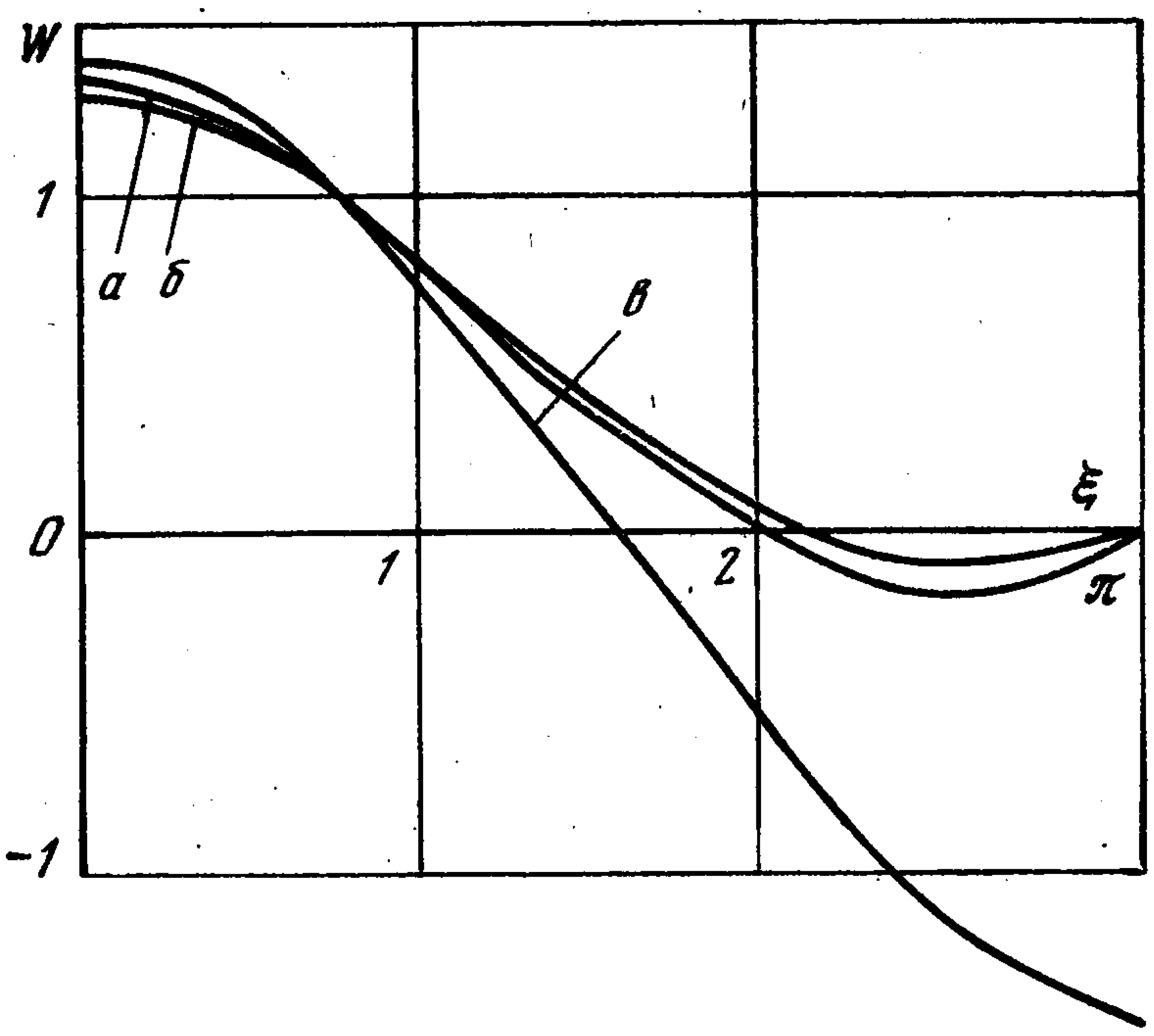
$$\begin{gathered} u^{(g)} = 0, \quad v^{(g)} = 0 \\ w^{(s)} = 0, \quad \gamma_1^{(s)} = -\gamma_1^{(g)} \end{gathered} \tag{2.11}$$

Точность условий (2.11) ниже, чем точность (1.4) уравнений обобщенного краевого эффекта и граничных условий (2.4), (2.7), (2.9). Ее можно повысить до величин $O(h_*^{1-2t})$, если воспользоваться способом, приведенным в [2] (стр. 303). В результате простых выкладок, состоящих в алгебраическом исключении величин простого краевого эффекта из полных граничных условий, получим для обобщенного краевого эффекта с точностью (1.4) следующие условия:

$$u^{(g)} - \frac{\xi\nu h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\gamma_1^{(g)} = 0, \quad v^{(g)} = 0$$

которые, вообще говоря, нельзя считать тангенциальными.

Выше рассмотрено четыре вида закрепления края оболочки. В результате оказалось, что в двух случаях — для шарнирно-опертого (2.6) и закрепленного краев — граничные условия расчленяются необычным образом. Здесь не были рассмотрены многочисленные варианты граничных условий, описывающих упругую заделку края и различные типы шарнирного опирания. Можно ожидать, что расчленение граничных условий в некоторых из этих случаев приведет к новым результатам.



Замечание. Можно показать, что полученное для цилиндрических оболочек расчленение граничных условий сохраняет силу для произвольных оболочек нулевой кривизны.

3. Выполним численный расчет напряженного состояния круговой цилиндрической оболочки, шарнирно-опертой по краям (2.6), с относительной толщиной $2h/R = 0.01$, длиной $2l = 2\pi R$, нагруженной нормальной нагрузкой $p_n = q \cos 5\beta \cos \xi$. Координата ξ направлена вдоль оси цилиндра $-l/R \leqslant \xi \leqslant l/R$, β — окружная координата, $\nu = 0.3$.

Определим для этой оболочки прогиб: а) по классической теории, б) по теории обобщенного краевого эффекта с граничными условиями (2.7), в) по этой же теории с тангенциальными граничными условиями $u^{(\ )} = 0$, $S^{(g)} = 0$.

Результаты расчета представлены графиками зависимости $W = [wE/rq]\cdot 10^{-4}$ от ξ(см. фигуру). Они показывают, что кривая *б* удовлетворительно описывает прогибы, а кривая *в* дает совершенно неверную картину прогибов.

Поступила 13 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Строительная механика оболочек. М.— Л., Стройиздат, 1936.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.