3. *Лебедев А. А.* Об устойчивости линейных динамических систем с переменными коэффициентами. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1960, № 121.
4. *Каменков Г. В., Лебедев А. А.* Замечания к статье об устойчивости на конечном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.
5. *Рудаков В. Р.* О существовании интервала устойчивости движения по первому приближению. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 3.

УДК 531.38

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

М. П. Цопа

(Кишинев)

Методом малого параметра Пуанкаре исследуется существование периодических движений гиростата с одной неподвижной точкой, составленного из твердого тела и ротора. Трением на оси ротора и другими диссипативными эффектами пренебрегается. Гиростатический момент предполагается постоянным. В качестве порождающего решения выбрано свободное движение по Эйлеру — Пуансо.

Движение гиростата вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле тяготения определяется гамильтонианом, который в канонических переменных Андуайе L_1, G_1, H_1, l_1, g_1, h_1 [1, 2] имеет вид

$$K = \frac{G_1^2 - L_1^2}{2AB}(A\cos^2 l_1 + B\sin^2 l_1) + \frac{L_1^2}{2C} - \tag{1}$$

$$-\sqrt{G_1^2 - L_1^2}\left(\frac{k_1}{A}\sin l_1 + \frac{k_2}{B}\cos l_1\right) - \frac{k_3}{C}L_1 - U$$

$$U = -P(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3) - \frac{3P}{2mR}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции гиростата для неподвижной точки, k_1, k_2, k_3 — проекции гиростатического момента на главные оси инерции, P, m — соответственно вес и масса гиростата, x_c, y_c, z_c — координаты центра масс гиростата в связанной системе координат, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы радиус-вектора R закрепленной точки гиростата, исходящего из притягивающего центра, в связанной системе координат.

Перейдем к каноническим переменным действие — угол L, G, H, l, g, h. В [3] получены разложения переменных Андуайе L_1, G_1, H_1, l_1, g_1, h_1 через переменные действие — угол L, G, H, l, g, h. Гамильтониан задачи в этих переменных определяется выражением

$$K = \frac{\bar{L}^2}{2D} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)G^2 + \tag{2}$$

$$+\sum_{s_1, s_2}\left[a_{s_1, s_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\sin(s_1 l + s_2 g) + b_{s_1, s_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos(s_1 l + s_2 g)\right] + \sum_{i_1, i_2} b_{i_1, i_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\cos(i_1 l + i_2 g)$$

$$(s_1 = 1, 3, 5, \ldots;\ s_2 = -1, 0, +1;\ i_1 = 0, 2, 4, \ldots;$$
$$i_2 = -2, -1, 0, +1, +2)$$

$$\bar{L} = L\left[1 + \frac{e^2}{16}(b-1)(b+3) + \ldots\right], \quad b = \frac{G^2}{L^2}$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{C} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right), \quad e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)D$$

$$a_{s_1,\mp1} = \frac{PL\sqrt{G^2-H^2}\,x_c}{2G^2}\left(\mu_{s_1,\mp1} + \frac{G}{L}\theta_{s_1,\mp1}\right)$$

$$a_{s_1,0} = \left(\frac{PHx_c}{G^2} - \frac{k_1}{A}\right)\sqrt{G^2-L^2}\,\nu_{s_1,0}$$

$$b_{s_1,\mp1} = \frac{PL\sqrt{G^2-H^2}\,y_c}{2G^2}\left(\varepsilon_{s_1,\mp1} + \frac{G}{L}\varphi_{s_1,\mp1}\right)$$

$$b_{s_1,0} = \left(\frac{PHy_c}{G^2} - \frac{k_2}{B}\right)\sqrt{G^2-L^2}\,\varkappa_{s_1,0}$$

$$b_{i_1,\mp1} = \frac{\sqrt{(G^2-L^2)(G^2-H^2)}}{G^4}\left\{\frac{3P(B-A)}{2mR}\times\right.$$

$$\left.\times\left[HL(1-2\sigma)\,\overset{\circ}{d}_{i_1,\mp1} \mp \frac{H(G\mp L)}{2}\,d^2_{i_1,\mp1}\right] + PG^2z_c\psi_{i_1,\mp1}\right\}$$

$$b_{i_1,0} = \left(\frac{PHz_c}{G^2} - \frac{k_3}{C}\right)L\alpha_{i_1,0} +$$

$$+\frac{3P(B-A)}{8mRG^4}\{G^2(G^2-H^2)(2\delta-1)\,\delta_{i_1,0} +$$

$$+[(2\delta-1)L^2\overset{\circ}{d}_{i_1,0} + (G^2-L^2)\,d^2_{i_1,0}]\}, \quad \delta = \frac{C-A}{B-A}$$

Здесь $\delta_{i_1,0}$ — символ Кронекера, а величины $d^m_{i_1,s_2}$, $\mu_{s_1,\mp1}$, $\theta_{s_1,\mp1}$, $\nu_{s_1,0}$, $\varepsilon_{s_1,\mp1}$ $\varphi_{s_1,\mp1}$, $\varkappa_{s_1,0}$ $\psi_{i_1,\mp1}$, $\alpha_{i_1,0}$ представляются известными рядами, расположенными по возрастающим степеням параметра e, коэффициенты которых зависят от b. Коэффициенты $b_{i_1,\pm2}$ не зависят от гиростатического момента и координат центра масс гиростата, поэтому совпадают с коэффициентами $U_{2m,\pm2}$ в разложении силовой функции [4]. Движение гиростата описывается каноническими уравнениями. Система уравнений допускает два первых интеграла

$$K = C_1, \; H = C_2$$

Предположим, что эллипсоид инерции для неподвижной точки гиростата мало отличается от эллипсоида вращения, т. е. разность $A - B$ мала, кроме того, центр масс гиростата расположен достаточно близко к закрепленной точке, а гиростатический момент мал. Тогда гамильтонову функцию можно разбить на две части так, чтобы функция μK_1 в области изменения канонических и переменных по модулю оставалась весьма малой по сравнению с первым членом K_0

$$K = K_0(L, G) + \mu K_1\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}, l, g\right)$$

$$K_0(L, G) = \frac{\bar{L}^2}{2D} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)G^2$$

Здесь K_0 — невозмущенный гамильтониан, определяющий эйлерово движение, μK_1 — возмущающий гамильтониан, μ — малый параметр. Гамильтониан K_0 зависит только от переменных действия L и G, и определяемое им порождающее решение имеет вид

$$l_0 = n_1^{(0)}t + \omega_1, \quad L_0 = a_1$$

$$g_0 = n_2^{(0)}t + \omega_2, \quad G_0 = a_2$$

$$h_0 = \omega_3, \quad H_0 = a_3$$

где ω_i, a_i — произвольные постоянные. Частоты угловых переменных равны

$$n_1^{(0)} = \frac{a_1}{D}\left[1 - (b_0^2 + 3)\frac{e^2}{8} + \ldots\right]$$

$$n_2^{(0)} = \frac{a_2}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) + \frac{a_2}{4D}(b_0 + 1)e^2 + \ldots, \quad b_0 = \frac{a_2^2}{a_1^2}$$

При соизмеримых частотах $n_1^{(0)}$ и $n_2^{(0)}$ движение будет периодическим.

Рассмотрим условия существования периодических решений системы уравнений с гамильтонианом (2), совпадающих с порождающим решением при $\mu = 0$. Согласно результатам Пуанкаре [5], уравнения возмущенного движения допускают периодические решения при малых значениях μ, если порождающие решения удовлетворяют условиям

$$\Delta_1(K_0) \neq 0, \quad \frac{\partial [K_1]}{\partial \omega_2} = 0, \frac{\partial [K_1]}{\partial a_3} = 0 \tag{3}$$

$$\Delta_2([K_1]) \neq 0, \quad [K_1] = \frac{1}{T}\int_0^T K_1 dt$$

Здесь Δ_1 — гессиан невозмущенного гамильтониана по L_0, G_0, Δ_2 — гессиан от среднего значения возмущающего гамильтониана $[K_1]$ по a_3, ω_2.

Первое из условий (3) выполняется всегда, за исключением случая полной динамической симметрии, поскольку с точностью до e^2

$$\Delta_1(K_0) = \frac{1}{2D}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) + \frac{e^2}{16D^2} \times$$
$$\times \left[4(3b_0 + 1) + 3D\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)(b_0^2 - 1) + \ldots\right] \neq 0$$

Для исследования оставшихся условий периодичности необходимо вычислить среднее значение возмущающей функции K_1 за период. Возможны следующие случаи

1) $(2N - 1)\, n_1^{(0)} = n_2^{(0)}$, 2) $2N n_1^{(0)} = n_2^{(0)}$

Для функции $[K_1]$ соответственно получим

$$1)\ [K_1] = b_{0,0}\left(\frac{L_0}{G_0}, \frac{H_0}{G_0}, k_3, z_c\right) + a_{2N-1,\,-1}\sin\eta +$$
$$+ b_{2N-1,\,-1}\cos\eta + b_{2(2N-1),\,-2}\cos 2\eta, \quad \eta = (2N-1)\,l_0 - g_0$$

$$2)\ [K_1] = b_{0,0}\left(\frac{L_0}{G_0}, \frac{H_0}{G_0}, k_3, z_c\right) + b_{2N,\,-1}\cos\xi + b_{4N,\,-2}\cos 2\xi$$
$$\xi = 2N l_0 - g_0$$

где N — целое положительное число. Коэффициенты $a_{2N-1,-1}, b_{0,0}, b_{2N-1,-1}, b_{2(2N-1),-2}$, $b_{2N,-1}$, $b_{4N,-2}$ вычисляются по (2) при порождающих значениях переменных действия L_0, G_0, H_0.

Второе из условий (3) дает соотношение для порождающих значений угловых переменных l, g, h. В случае соизмеримости 1) это соотношение имеет вид

$$a_{2N-1,\,-1}\cos\eta - b_{2N-1,\,-1}\sin\eta - 2b_{2(2N-1),\,-2}\sin 2\eta = 0$$

В случае соизмеримости 2) значения l_0, g_0, h_0 совпадают с соответствующими значениями, полученными в [4]. Третье из условий (3) в случае соизмеримости 1) выполняется, если $z_c = 0$ и $H_0 = 0$, при этом x_c, y_c произвольны. Последнее из условий (3) выполняется всегда.

Итак, показано, что задача о движении гиростата в центральном ньютоновском поле сил допускает семейство периодических решений Пуанкаре.

Поступила 15 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
2. *Andoyer M. H.* Cours de mécanique céleste, T. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1923.
3. *Kinoshita H.* First-order perturbation of the two finite body problem. Publ. Astron. Soc. Japan, 1972, vol. 24, No. 4.
4. *Баркин Ю. В., Демин В. Г.* О периодических движениях твердого тела с закрепленной точкой в ньютоновском поле. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.
5. *Пуанкаре А.* Избр. тр., т. 1. М., «Наука», 1971.

УДК 539.3

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В. З. ВЛАСОВА

Н. Н. Рогачева

(Москва)

Полубезмоментная теория цилиндрических оболочек В. З. Власова [1] дает возможность выполнить только по два граничных условия на криволинейных краях оболочки. Два оставшихся условия выполняются за счет произволов простого краевого эффекта. По аналогии с безмоментной теорией при расчете оболочки по теории В. З. Власова на криволинейных краях обычно выполняют тангенциальные условия, а невязки, появившиеся в нетангенциальных условиях, снимаются с помощью простого краевого эффекта.

В предлагаемой работе граничные условия на криволинейных краях для системы уравнений В. З. Власова получены асимптотическим методом. В результате оказалось, что для некоторых типов закрепления краев оболочки искомые граничные условия должны содержать нетангенциальные величины. Полученные результаты подтверждены численным примером.

Теорию В. З. Власова обобщил на произвольные оболочки нулевой кривизны А. Л. Гольденвейзер. В [2] рассматриваемое напряженно-деформированное состояние названо обобщенным краевым эффектом.

Используемые ниже терминология и обозначения взяты из [2].

1. Пусть искомые величины имеют вдоль образующих (будем считать, что они совпадают с α-линиями) показатель изменяемости θ; а по направляющим (это β-линии) показатель изменяемости t. Тогда вместо α и β можно ввести новые переменные ξ и η следующим образом:

$$\alpha = Rh_*^{\theta}\xi, \quad \beta = Rh_*^{t}\eta \tag{1.1}$$

(h_* — относительная полутолщина оболочки, R — характерный радиус).

В дальнейшем будем считать, что дифференцирование по ξ и η не приводит к существенному увеличению или уменьшению искомых функций.

Величины t и θ, как показано в [2], могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. При $t = 0$ обобщенный краевой эффект полностью утрачивает способность к затуханию. В этом случае говорят, что он вырождается. Показатели изменяемости t и θ связаны следующим соотношением:

$$t = {}^1/_4 + {}^1/_2\,\theta \quad (0 \leqslant t < {}^1/_2) \tag{1.2}$$