УДК 531.36

ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

К. А. Абгарян

(Ереван)

Исследуются достаточные условия устойчивости движения на конечном интервале времени в постановке А. А. Лебедева [1-3]. Показано, что для устойчивости в данной постановке достаточно существования у матрицы $P(t)$ линейной части уравнений возмущенного движения в начальный момент t_0 хотя бы одного собственного значения с отрицательной вещественной частью независимо от остальных собственных значений матрицы $P(t_0)$, от матрицы $P(t) - P(t_0)$ и вектора постоянно действующих возмущений при единственном условии ограниченности по модулю составляющих этого вектора достаточно малыми положительными величинами.

А. А. Лебедев [1-3] предложил следующую постановку задачи об устойчивости движения на конечном интервале времени.

Пусть возмущенное движение некоторой динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений, имеющей в векторной записи вид

$$dx/dt = P(t)x + h(t, x) + g(t, x) \tag{1}$$

где x — столбцовая матрица отклонений (возмущений) $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $P(t)$, $h(t, x)$, $g(t, x)$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times 1$, $n \times 1$— непрерывные и вещественные функции своих аргументов в области

$$T_1 \leqslant t \leqslant T_2, \ |x_i| \leqslant a_i \ (T_2 \neq T_1, a_i \neq 0)$$

При этом $h(t, x) = 0(x)$, а вектор-функция $g(t, x)$ с компонентами $g_1(t, x), \ldots, g_n(t, x)$ характеризующая неизвестные возмущающие силы, не обязательно обращается в нуль при всех x_i, равных нулю.

Предполагается, что невозмущенному движению, устойчивость которого исследуется, соответствует нулевое решение $x \equiv 0$ уравнения

$$dx/dt = P(t)x + h(t, x) \tag{2}$$

получаемого из уравнения (1) отбрасыванием функции $g(t, x)$.

Определение [1-3]. Невозмущенное движение, определяемое нулевым решением уравнения (2), называется устойчивым на конечном интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного числа c, как бы мало оно ни было, существуют такое положительное число $\eta(c)$ и такой цикл $V(t, x) = c^2$, что на этом интервале времени диаметр $D(t)$ области

$$V(t, x) \leqslant c^2 \tag{3}$$

не превышает начального диаметра $D(t_0)$ и всякое решение $x(t)$ уравнения (1) с начальным значением $x_0 = x(t_0)$, удовлетворяющим условию $V(t_0, x_0) \leqslant c^2$, удовлетворяет неравенству (3), каковы бы ни были возмущающие силы $g_i(t, x)$, удовлетворяющие при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ в области (3) условию

$$|g_i(t, x)| \leqslant \eta(c)$$

Применительно к системе дифференциальных уравнений возмущенного движения при отсутствии возмущающих сил определение понятия устойчивости в данной постановке приведено в заметке Г. В. Каменкова и А. А. Лебедева [4]. В работе [2] А. А. Лебедевым указаны достаточные условия существования интервала устойчивости по линейному приближению: для этого достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения $\det[P(t_0) - \lambda E] = 0$ имели отрицательные вещественные части. Однако условия устойчивости в рассматриваемой постановке значительно шире.

Как показал В. П. Рудаков [5], если хоть один из элементов главной диагонали матрицы $P(t_0)$ отрицателен, то существует отличный от нулевого интервал $[t_0, t_0 + \tau]$, на котором невозмущенное движение устойчиво независимо от остальных элементов матрицы $P(t_0)$, от матрицы $P(t) - P(t_0)$ и от вектора $g(t, x)$.

Покажем, что для устойчивости на конечном интервале времени в постановке А. А. Лебедева достаточно существования хотя бы одного собственного значения матрицы $P(t_0)$ с отрицательной вещественной частью независимо от того, каковы все остальные собственные значения этой матрицы, а также независимо от матрицы $P(t) - P(t_0)$ и вектора $g(t, x)$.

Теорема. Если хоть одно из собственных значений матрицы $P(t_0)$ имеет отрицательную вещественную часть, то существует отличный от нулевого интервал $[t_0, t_0 + \tau]$, на котором невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2)) устойчиво (в смысле приведенного определения А. А. Лебедева) независимо от остальных собственных значений матрицы $P(t_0)$, от матрицы $P(t) - P(t_0)$ и от вектора $g(t, x)$.

Доказательство. Пусть λ_1 — собственное значение матрицы $P(t_0) = P_0$ и $\mathrm{Re}\lambda_1 = -\alpha$ $(\alpha > 0)$. Отвечающий этому собственному значению собственный вектор матрицы P_0 обозначим через K_1. Собственный вектор K_1 порождает одномерное инвариантное подпространство R_1 n-мерного евклидова пространства R^n над полем комплексных чисел.

В $(n-1)$-мерном инвариантном подпространстве R_2 пространства R^n, ортогональном вектору K_1, выбираем какую-нибудь систему взаимно ортогональных векторов K_2, $K_3, \ldots, K_n$, т. е. таких, что (звездочкой отмечается эрмитова сопряженная матрица)

$$K_i^* K_j = 0 \quad (i, j = 2, \ldots, n)$$

Будем считать, что все векторы K_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ нормированы, так что $\| K_j \| = \sqrt{K_j^* K_j} = 1$. В этих условиях система $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ортонормированная, а матрица $K = (K_1, K_2, \ldots, K_n)$ унитарная.

Область допустимых состояний определим посредством положительно определенной эрмитовой формы

$$V(t, x) = (K_0^{-1}(t)x,\ K_0^{-1}(t)x)$$
$$K_0(t) = K\Omega(t), \qquad \Omega(t) = \mathrm{diag}\,(1, \varepsilon(t) E_{n-1})$$

где E_{n-1} — единичная матрица порядка $n-1$, $\varepsilon(t)$ — некоторая дифференцируемая функция, ограниченная снизу положительной постоянной.

Матрица эрмитовой формы $V(t, x)$

$$A(t) = (K_0^{-1})^* K_0^{-1} = K\Omega^{-2}(t) K^{-1} \tag{4}$$

Пусть $\gamma_{\min}(t)$ — наименьшее в каждый момент времени t собственное значение матрицы $A(t)$. Тогда, как известно, диаметр области

$$V(t, x) = x^* A(t) x \leqslant c^2 \tag{5}$$

определяется формулой

$$D(t) = D(t_0) \sqrt{\gamma_{\min}(t_0) / \gamma_{\min}(t)} \tag{6}$$

Из (4) и (6) видно, что если на интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ будет $\varepsilon(t) < 1$, то область (5) сохраняет на этом интервале свой диаметр неизменным, т. е. $D(t) = D(t_0)$ $(t \in [t_0, t_0 + \tau])$.

Теперь вычислим производную от $V(t, x)$ по t в силу уравнения (1)

$$\frac{dV}{dt} = x^* \left(P_0^* A + A P_0 + \frac{dA}{dt}\right) x + S_p + S_h + S_g$$

$$S_p = x^* (\Delta P^* A + A\,\Delta P)\, x \quad (\Delta P = P(t) - P_0)$$
$$S_h = x^* A h + h^* A x, \qquad S_g = x^* A g + g^* A x$$

Принимая во внимание (4) и учитывая, что

$$K^{-1} P_0 K = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \Lambda_{n-1}), \quad K^* P_0^* K = \mathrm{diag}\,(\bar{\lambda}_1, \Lambda_{n-1}^*)$$

где Λ_{n-1} — матрица порядка $n-1$, спектр которой совпадает со спектром матрицы P_0 без собственного значения λ_1, после замены переменных

$$x = K_0 y, \quad y' = (y_1 y'_{n-1})$$

имеем

$$\frac{dV}{dt} = 2\operatorname{Re}\lambda_1 |y_1|^2 + y_{n-1}^*\left(\Lambda_{n-1} + \Lambda_{n-1}^* - 2\frac{d\ln\varepsilon}{dt}E_{n-1}\right)y_{n-1} + S_p + S_h + S_g$$

При этом

$$S_p = y^*[\Omega(K^{-1}\Delta PK)^*\Omega^{-1} + \Omega^{-1}K^{-1}\Delta PK\Omega]y$$

$$S_h = y^*\Omega^{-1}K^*h + h^*K\Omega^{-1}y, \quad S_g = y^*\Omega^{-1}K^*g + g^*K\Omega^{-1}y$$

Пусть $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение эрмитовой матрицы $^1/_2\,(\Lambda_{n-1} + \Lambda_{n-1}^*)$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 2\operatorname{Re}\lambda_1 |y_1|^2 + 2\left(\lambda_{\max} - \frac{d\ln\varepsilon}{dt}\right)\|y_{n-1}\|^2 + S_p + S_h + S_g$$

Функцию $\varepsilon(t)$ подчиним условиям

$$\lambda_{\max} - d\ln\varepsilon(t)/dt = -\alpha, \quad \varepsilon(t) \leqslant a < 1, \quad t \in [t_0, T > t_0]$$

Этим условиям удовлетворяет, например, функция

$$\varepsilon(t) = a\exp[-(\lambda_{\max} + \alpha(T-t)] \quad (t \in [t_0, T])$$

При таком выборе $\varepsilon(t)$

$$dV/dt \leqslant -2\alpha\|y\|^2 + S_p + S_h + S_g$$

Так как $S_p|_{t=t_0} = 0$, то, по непрерывности, в пределах некоторого конечного интервала $[t_0, t_0+\tau] \subset [t_0, T]$ для любого достаточно малого c

$$S_p|_{V=c^2} \leqslant {}^1/_3\,\alpha c^2$$

В силу $h(t, x) = 0\,(x)$ для любого достаточно малого числа c будет выполняться неравенство

$$S_h|_{V=c^2} \leqslant {}^1/_3\,\alpha c^2, \quad t \in [t_0, t_0+\tau]$$

Наконец, для любого c найдется такое достаточно малое число $\eta(c)$, что при усл о вии $|g_i(t, x)| \leqslant \eta(c)$ будем иметь

$$S_g|_{V=c^2} \leqslant {}^1/_3\,\alpha c^2$$

В силу изложенного для любых достаточно малых c и $\eta(c)$

$$dV/dt|_{V=c^2} \leqslant -\alpha c^2 < 0$$

и, значит, на интервале $[t_0, t_0+\tau]$ все интегральные кривые системы (1), пересекающие поверхность $V(t, x) = c^2$, пересекают ее снаружи вовнутрь. Таким образом все условия определения устойчивости выполняются. Теорема доказана.

Практически все реальные системы удовлетворяют условиям доказанной теоремы и потому все они (за редким исключением) устойчивы в смысле определения А. А. Лебедева.

Поступила 5 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев А. А.* Об устойчивости неустановившегося движения на конечном интервале времени. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1955, № 50.
2. *Лебедев А. А.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1959, № 112.

3. *Лебедев А. А.* Об устойчивости линейных динамических систем с переменными коэффициентами. Тр. Моск. авиац. ин-та, 1960, № 121.
4. *Каменков Г. В., Лебедев А. А.* Замечания к статье об устойчивости на конечном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.
5. *Рудаков В. Р.* О существовании интервала устойчивости движения по первому приближению. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 3.

УДК 531.38

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

М. П. Цопа

(Кишинев)

Методом малого параметра Пуанкаре исследуется существование периодических движений гиростата с одной неподвижной точкой, составленного из твердого тела и ротора. Трением на оси ротора и другими диссипативными эффектами пренебрегается. Гиростатический момент предполагается постоянным. В качестве порождающего решения выбрано свободное движение по Эйлеру — Пуансо.

Движение гиростата вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле тяготения определяется гамильтонианом, который в канонических переменных Андуайе L_1, G_1, H_1, l_1, g_1, h_1 [1, 2] имеет вид

$$K = \frac{G_1^2 - L_1^2}{2AB}(A\cos^2 l_1 + B\sin^2 l_1) + \frac{L_1^2}{2C} - \sqrt{G_1^2 - L_1^2}\left(\frac{k_1}{A}\sin l_1 + \frac{k_2}{B}\cos l_1\right) - \frac{k_3}{C}L_1 - U \tag{1}$$

$$U = -P(x_c\gamma_1 + y_c\gamma_2 + z_c\gamma_3) - \frac{3P}{2mR}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции гиростата для неподвижной точки, k_1, k_2, k_3 — проекции гиростатического момента на главные оси инерции, P, m — соответственно вес и масса гиростата, x_c, y_c, z_c — координаты центра масс гиростата в связанной системе координат, γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы радиус-вектора R закрепленной точки гиростата, исходящего из притягивающего центра, в связанной системе координат.

Перейдем к каноническим переменным действие — угол L, G, H, l, g, h. В [3] получены разложения переменных Андуайе L_1, G_1, H_1, l_1, g_1, h_1 через переменные действие — угол L, G, H, l, g, h. Гамильтониан задачи в этих переменных определяется выражением

$$K = \frac{\bar{L}^2}{2D} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)G^2 + \sum_{s_1, s_2}\left[a_{s_1, s_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\sin(s_1 l + s_2 g) + b_{s_1, s_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\times \cos(s_1 l + s_2 g)\right] + \sum_{i_1, i_2} b_{i_1, i_2}\left(\frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)\cos(i_1 l + i_2 g) \tag{2}$$

$(s_1 = 1, 3, 5, \ldots;\ s_2 = -1, 0, +1;\ i_1 = 0, 2, 4, \ldots;$
$i_2 = -2, -1, 0, +1, +2)$