Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 62—50

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Р. Т. Янушевский

(Москва)

Исследуется существование решения задачи оптимального управления при функционале качества в виде интегральной квадратичной формы от координат и управляющих воздействий объекта, описываемого системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Устанавливается связь между данной задачей и оптимальными задачами специального вида, условия существования решений которых детально исследованы.

1. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I = \int_0^\infty (x^t(t)A^{(0)}x(t) + x^t(t)A^{(1)}u(t) + u^t(t)A^{(1)t}x(t) + u^t(t)A^{(2)}u(t))\,dt \tag{1.1}$$

в силу уравнений движения объекта

$$\begin{gathered} x^\cdot(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=0}^{r} B_i u(t-\theta_i) \\ -\tau_l \leqslant t \leqslant 0, \quad x(t) = \varphi_x(t); \quad -\theta_r \leqslant t \leqslant 0, \quad u(t) = \varphi_u(t) \\ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l, \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_r \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $u(t) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — соответственно векторы состояния и управления; $\varphi_x(t)$, $\varphi_u(t)$ — начальные функции, для которых существует непрерывное решение уравнения (1.2); τ_i, θ_j — времена запаздывания соответственно в координатах вектора состояния (l отклонений аргумента) и управляющих воздействиях (r отклонений аргумента); A_i, B_j, $A^{(s)} = \| a_{gk}^{(s)} \|$ — постоянные матрицы; верхний индекс t означает транспонирование.

Уравнения данного вида характеризуют широкий класс технологических процессов, экономических систем и т. п.

Из результатов [1–6] следует, что если оптимальное решение данной задачи как задачи аналитического конструирования [1, 6] существует, то оно имеет вид

$$\begin{gathered} u(t) = Kx(t) + \int_{-\tau_l}^{0} K_1(\xi)x(t+\xi)\,d\xi + \int_{-\theta_r}^{0} K_2(\sigma)u(t+\sigma)\,d\sigma \\ K = -(A^{(2)})^{-1}(B_0{}^tW_0 + B_{01}{}^t(0) + A^{(1)t}) \\ K_1(\xi) = -(A^{(2)})^{-1}(B_0{}^tB_{02}(\xi) + P_{03}(\xi, 0)) \\ K_2(\sigma) = -(A^{(2)})^{-1}(B_0{}^tB_{01}(\sigma) + P_{01}(0, \sigma)) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь матрицы $W_0 = W_0^t$, $B_{0i}(\xi)$, $P_{0k}(\xi, \sigma) = P_{0k}^t(\sigma, \xi)$ $(i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$ удовлетворяют системе уравнений, приведенной в [6].

Рассмотрим теперь задачу оптимизации функционала вида (1.1) в силу уравнений движения объекта, который будет, как следует из [6], приближением (1.2):

$$
\begin{aligned}
(1.4)\qquad & \dot{x}_{NN^*}(t) = A_0 x_{NN^*}(t) + \sum_{i=1}^{l} A_i z_{\tau_i}(t) + B_0 u_{NN^*}(t) + \sum_{i=1}^{r} B_i z_{\theta_i}^*(t) \\
& \tau_l N^{-1} z_i^{\cdot}(t) + z_i(t) = z_{i-1}(t), \quad i = 1, \ldots, N \\
& \theta_r (N^*)^{-1} z_i^{*\cdot}(t) + z_i^*(t) = z_{i-1}^*(t), \quad i = 1, \ldots, N^* \\
& z_0(t) = x_{NN^*}(t), \quad z_0^*(t) = u_{NN^*}(t) \\
& z_{\tau_i}(t) = z_{N\tau_i\tau_l^{-1}}(t), \quad z_{\theta_i}^*(t) = z_{N^*\theta_i\theta_r^{-1}}^*(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad & z_i(0) = \frac{N}{\tau_l}\int_{\varkappa_i}^{\varkappa_{i-1}} x(\vartheta)\, d\vartheta, \quad z_i^*(0) = \frac{N^*}{\theta_r}\int_{\chi_i}^{\chi_{i-1}} u(\vartheta)\, d\vartheta \\
& \varkappa_i = -i\tau_l N^{-1}, \quad \chi_i = -i\theta_r (N^*)^{-1}
\end{aligned}
$$

При минимизации функционала (1.1) в силу (1.4) вместо $x(t)$, $u(t)$, I используются соответственно $x_{NN^*}(t)$, $u_{NN^*}(t)$, I_{NN^*}; $z_i(t)$ и $z_i^*(t)$ — векторы размерности m и n, приближенно характеризующие эффект запаздывания в координатах вектора состояния и управляющих воздействиях.

Условия существования решения задач оптимизации этого класса приведены, например, в [7–10]; оптимальное решение имеет вид

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad & u_{NN^*}(t) = K x_{NN^*}(t) + \frac{\tau_l}{N}\sum_{i=1}^{N} K_1[1-i]\, z_i(t) + \\
& + \frac{\theta_r}{N^*}\sum_{i=1}^{N^*} K_2[1-i]\, z_i^*(t)
\end{aligned}
$$

Здесь $K_1[j]$, $K_2[j]$ — матрицы размерностей $n \times m$, $n \times n$.

Оптимальные управления (1.3) и (1.6) выбираются из класса допустимых $u_g(t) \in L_2(0, \infty)$. Уравнения (1.2) и (1.4) при выполнении (1.3) и (1.6) имеют непрерывные решения $x(t) \in L_2(0, \infty)$ и $x_{NN^*}(t) \in L_2(0, \infty)$ ($x(t)$ удовлетворяет (1.2) почти всюду).

Взаимосвязь условий существования решения оптимальных задач минимизации квадратичного функционала (1.1) в силу уравнений соответственно (1.2) и (1.4) устанавливается следующей теоремой:

Теорема. Пусть можно указать числа N_0, N_0^*, такие, что при всех $N \geqslant N_0$, $N^* \geqslant N_0^*$ существует (не существует) оптимальное решение $u_{NN^*}(t)$, $x_{NN^*}(t)$ задач вида (1.1), (1.4) — (1.6). Тогда существует (не существует) оптимальное решение $u(t)$, $x(t)$ задачи управления (1.1), (1.2), причем в случае существования оптимального решения можно указать такие $N_0(\delta)$, $N_0^*(\delta)$, что при всех $N \geqslant N_0$, $N^* \geqslant N_0^*$

$$
\begin{aligned}
(1.7)\qquad & \int_0^\infty \| u(t) - u_{NN^*}(t)\|^2 dt \leqslant \delta, \quad \int_0^\infty \| x(t) - x_{NN^*}(t)\|^2 dt \leqslant \delta \\
& |I - I_{NN^*}| \leqslant k_0\delta, \quad k_0 = \max_{ij} |a_{ij}^{(s)}|
\end{aligned}
$$

Здесь символ $\|\cdot\|^2$ означает квадрат евклидовой нормы соответствующего вектора.

В дальнейшем систему (1.2), (1.3) и соответственно задачу минимизации (1.1), (1.2) назовем исходными, а систему (1.4) — (1.6) и задачу минимизации (1.1), (1.4) — приближенными.

Отметим, что система линейных уравнений с запаздывающим аргументом (1.2), (1.3) рассматривается здесь как предельная по отношению к (1.4) — (1.6). Предполагается, что уравнение (1.3) получено формально на основе функционального уравнения Беллмана, причем систему уравнений, которой удовлетворяют матрицы W_0, $B_{0i}(\xi)$, $P_{0k}(\xi, \sigma)$ ($i = 1,2$; $k = 1, 2, 3$), аппроксимирует разностная схема, следующая из алгебраического уравнения Риккати, характеризующего приближенные оптимальные задачи (1.1), (1.4) (см., например, [6, 10]), а $K_1[1 - i]$ и $K_2[1 - j]$ являются аппроксимациями первого порядка матриц $K_1(\xi)$ и $K_2(\sigma)$ соответственно в узлах $-i\tau_l N^{-1}$, $\leqslant j\theta_r (N^*)^{-1}$, т. е. $-i\tau_l N^{-1} \leqslant \xi \leqslant -(i-1)\tau_l N^{-1}$, $-j\theta_r (N^*)^{-1} \leqslant \sigma \leqslant -(j-1)\theta_r (N^*)^{-1}$, $K_1(\xi) = K_1[i] + o(N^{-1})$, $K_2(\sigma) = K_2[j] + o(N^{*-1})$.

Лемма 1. Пусть $u(t)$, $x(t)$ и $u_{NN^*}(t)$, $x_{NN^*}(t)$ — асимптотически устойчивые решения соответственно исходной и приближенной задач (1.2), (1.3) и (1.4), (1.6), а I и I_{NN^*} — значения функционала (1.1) при указанных величинах. Тогда для всякого сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют числа $N_0(\delta)$, $N_0^*(\delta)$, для которых справедливы неравенства (1.7).

Отметим, что аналогично [11-14] устанавливается близость решений исходной системы уравнений с запаздывающим аргументом (1.2) и приближенных систем (1.4) при $N \geqslant N_0$, $N^* \geqslant N_0^*$ для произвольного конечного интервала $[0, T_0]$, т. е. для любого сколь угодно малого δ_1 и произвольной ограниченной области начальных условий системы (1.2), а также ограниченной нормы $u(t) \in L_2(0, T_0)$, можно указать такие $N_0(\delta_1)$, $N_0^*(\delta_1)$, что $\| x(t) - x_{NN^*}(t) \|_{L_2(0, T_0)} \leqslant \delta_1$.

Выражения, позволяющие непосредственно сопоставить траектории $x(t)$ и $x_{NN^*}(t)$, следуют из (1.3) и (1.6) при подстановке соответствующих значений координат исходного и приближенного объектов, определяющихся разрешением уравнений (1.2) и (1.4) относительно $x(t)$ и $x_{NN^*}(t)$. Разность $e_u(t) = u(t) - u_{NN^*}(t)$ оценим последовательно на двух интервалах $[0, T_0]$ и $[T_0, \infty)$. В силу асимптотической устойчивости систем интегральную квадратичную оценку $e_u(t)$ на интервале $[T_0, \infty)$ можно сделать сколь угодно малой посредством выбора T_0. Оценим решение $e_u(t)$ на интервале $[0, T_0]$, исследуя на интервале $[-\theta, T_0]$, $\theta = \max\{\theta_r, \tau_l\}$ уравнение относительно $e_u(t)$ как интегральное уравнение Вольтерра второго рода. В силу квадратичной суммируемости ядра этого уравнения и равномерного по $t < T_0$ стремления к нулю его свободного члена при стремлении N, N^* к бесконечности [12, 15] из свойств решения уравнения Вольтерра [15] вытекает малость $\| e_u(t) \|_{L_2(0, T_0)}$ и, следовательно, выполнение первого из условий (1.7). Аналогично производится оценка и для разности $e_x(t) = x(t) - x_{NN^*}(t)$. Результирующее последнее неравенство (1.7) следует из двух предыдущих.

Лемма 2. Если система (1.2), (1.3) асимптотически устойчива, то для существования оптимального управления (1.3) необходимо и достаточно существование матриц $W_0 = W_0^t$, $B_{0i}(\xi)$, $i = 1, 2$, $P_{0k}(\xi, \sigma) = P_{0k}^t(\sigma, \xi)$, $k = 1, 2, 3$, удовлетворяющих системе уравнений типа Риккати [6].

Доказательство аналогично приведенному в [1, 2].

2. В основе доказательства сформулированной в п. 1 теоремы лежит исследование асимптотической устойчивости (неустойчивости) системы (1.2), (1.3). Считаем, что случай неустойчивости системы включает в себя также и случай неасимптотической устойчивости.

В случае асимптотической устойчивости из леммы 1 вытекает близость (в смысле (1.7)) решений систем уравнений (1.2), (1.3) и (1.4), (1.6). Если учесть, что $u(t)$ в виде (1.3) записано на основе функционального уравнения Беллмана, то из леммы 2 следует, что данное $u(t)$ является оптимальным управлением.

В случае неустойчивости системы (1.2), (1.3) функционал (1.1) при $u(t)$ в виде (1.3) неограничен, т. е. оптимальное решение отсутствует.

Действительно, в виду неустойчивости системы (1.2), (1.3) для счетного множества t_k выполняется неравенство $\| x(t_k) \|^2 \geqslant 2\delta_0 > 0$. Используя (1.2), (1.3) и выражение $x(t_k + \varepsilon) - x(t_k) \approx \varepsilon x^{\cdot}(t_k)$, выберем величину интервала $(t_k - \varepsilon_k, t_k + \varepsilon_k)$, на котором $\| x(t) \|^2 \geqslant \delta_0$, при помощи соотношения

$$0 < \delta_2 = \varepsilon_k^2 \| x^{\cdot}(t_k) \|^2 \leqslant M\varepsilon_k^2 \max_{t \leqslant t_k} \| x(t) \|^2 \leqslant \delta_0, \qquad M > 0$$

Если производные $x^{\cdot}(t_k)$ ограничены, то $\varepsilon_k \leqslant \varepsilon > 0$, следовательно, интеграл

$$I > \sum_k 2\varepsilon_k \delta_0$$

расходится. Если для какой-либо из точек подпоследовательности t_{k_0} $\lim_{k \to k_0} \|x(t_k)\|^2 = \infty$, то согласно приведенному соотношению $\lim_{k \to k_0} \varepsilon_k = 0$, в то время как $\lim_{k \to k_0} M\varepsilon_k^2 \| x(t_k) \|^2 \geqslant \delta_2$. Тогда неограничен интеграл

$$I \geqslant \lim_{k \to k_0} \int_{t_k}^{t_k + \varepsilon_k} \| x(t) \|^2 dt = \lim_{k \to k_0} \| x(t_k) \|^2 \varepsilon_k \geqslant \lim_{k \to k_0} \frac{\delta_2}{M\varepsilon_k}$$

Исследование системы (1.2), (1.3) проводится путем сравнения с приближенными системами (1.4), (1.6), причем неустойчивость приближенной системы указывает на отсутствие оптимального решения у соответствующей приближенной задачи.

Сопоставим траектории $x_0(t) = \{x_{NN^*}(t), z_1(t), \ldots, z_{N^*}^*(t)\}$ оптимальной приближенной системы и $x(t)$ — системы (1.2), (1.3). Из (1.2) — (1.6) следуют неравенства

$$\| x(t) - x_{NN^*}(t) \| \leqslant \sum_{i=0}^{l} \| A_i \| \int_{t_1}^{t} \| x(\xi - \tau_i) - z_{\tau_i}(\xi) \| d\xi + \tag{2.1}$$

$$+ \sum_{i=0}^{r} \| B_i \| \int_{t_1}^{t} \| u(\sigma - \theta_i) - z_{\theta_i}^*(\sigma) \| d\sigma$$

$$S_x(t) \leqslant G_x(t) + \| x_0(t) \|, \quad S_u(t) \leqslant G_u(t) + \| u_{NN^*}(t) \|$$

$$\| u(t - \theta_i) - z_{\theta_i}^*(t) \| \leqslant G_u(t) + 2n\theta_i \gamma_u(t) / \sqrt{N^*} \tag{2.2}$$

$$\| x(t - \tau_i) - z_{\tau_i}(t) \| \leqslant G_x(t) + 2m\tau_i \gamma_x(t) / \sqrt{N}$$

Здесь

$$S_y(t) = \max_{\xi} \| y(\xi) \|, \quad t_0 \leqslant \xi \leqslant t; \quad \| y(t) \| = \max_i | y_i(t) |$$

$$y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_k(t)\}; \quad G_x(t) = \max_{\xi} \| x(\xi) - x_{NN^*}(\xi) \|$$

$$G_u(t) = \max_{\xi} \| u(\xi) - u_{NN^*}(\xi) \|, \quad t_0 \leqslant \xi \leqslant t, \quad t_1 \geqslant t_0$$

Неравенства (2.2) записаны в предположениях $\xi \leqslant t$, $\| x_{NN^*}(\xi) \| \leqslant \leqslant \gamma_x(t)$, $\| u_{NN^*}(\xi) \| \leqslant \gamma_u(t)$, причем из уравнения (1.6) следует, что если $\| x_{NN^*}(\xi) \| \leqslant \gamma_x(t)$, то существует постоянная M_1, для которой выполняется соотношение

$$\gamma_u(t) \leqslant M_1 \gamma_x(t)$$

Здесь и далее при оценках неравенств постоянные $M_i > 0$ используются без детальной расшифровки.

Согласно уравнению (1.2) имеем

$$t \geqslant t_0 + \theta, \quad \| x^{\cdot}(t) \| \leqslant M_2 S_x(t) + M_3 S_u(t) \leqslant M_2 G_x(t) + + M_3 G_u(t) + M_4 (\| x(t) \| + \| u(t) \|), \quad \theta = \max(\tau_l, \theta_r) \tag{2.3}$$

Подставив соответствующие величины в выражение (2.1), представим последнее в форме

$$G_x(t) \leqslant M_5 \int_{t_1}^{t} G_x(\xi)\, d\xi + M_6 \int_{t_1}^{t} G_u(\xi)\, d\xi + + \left(\frac{M_7}{\sqrt{N}} + \frac{M_8}{\sqrt{N^*}} \right) \int_{t_1}^{t} (\| x(\xi) \| + \| u(\xi) \|)\, d\xi \tag{2.4}$$

Из выражений (1.3), (1.6) следует

$$\| u(t) - u_{NN^*}(t) \| \leqslant \| K(x(t) - x_{NN^*}(t)) \| + \| Q_1 \| + \| Q_2 \| + o(N_-^{-1}) \tag{2.5}$$

$$Q_1 = \frac{\tau_l}{N} \sum_{i=1}^{N} K_1 [1 - i] \left(\frac{N}{\tau_l} \int_{\varkappa_i}^{\varkappa_{i-1}} x(t + \xi)\, d\xi - z_i(t) \right)$$

$$Q_2 = \frac{\theta_r}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} K_2 [1 - i] \left(\frac{N^*}{\theta_r} \int_{\chi_i}^{\chi_{i-1}} u(t + \sigma)\, d\sigma - z_i^*(t) \right)$$

$$N_- = \min(N, N^*)$$

Используя соотношения

$$\left\| \frac{N}{\tau_l} \int_{\varkappa_i}^{\varkappa_{i-1}} (x(t + \xi) - x_{NN^*}(t + \xi))\, d\xi + \frac{N}{\tau_l} \int_{\varkappa_i}^{\varkappa_{i-1}} x_{NN^*}(t + \xi)\, d\xi - z_i(t) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{\tau_l} \int_{t+\varkappa_i}^{t+\varkappa_{i-1}} G_x(\xi)\, d\xi + \frac{2 m a_i}{\sqrt{N}} \gamma_x(t), \quad \frac{(i-1)\tau_l}{N} \leqslant a_i \leqslant \frac{i \tau_l}{N}$$

приведем выражение (2.5) к виду

$$G_u(t) \leqslant M_9 G_x(t) + M_{10} \int_{t_1}^{t} G_u(\xi)\, d\xi + o(N_-^{-1}) \tag{2.6}$$

Из неравенств (2.4), (2.5) и леммы [11] следует, что при $\| x(t) \| + \| u(t) \| \leqslant \delta$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$

$$G_{xu}(t) = G_x(t) + G_u(t) \leqslant (M_{12}N^{-1/2} + M_{13}N^{*-1/2})(J_1 + M_{14}J_2) + o(N_-^{-1})$$

$$J_1 = \int_{t_1}^{t} (\| x(\xi) \| + \| u(\xi) \|)\, d\xi, \quad J_2 = \int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{\xi} (\| x(\sigma) \| + \| u(\sigma) \|) \times$$
$$\times \exp[(M_{12}N^{-1/2} + M_{13}N^{*-1/2})(t - \xi)]\, d\sigma\, d\xi$$

Учитывая, что решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающей приближенную оптимальную систему, мажорируется затухающей экспонентой, имеем

$$\| x_{NN^*}(t) \| + \| u_{NN^*}(t) \| \leqslant k_1\delta_1 e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad k_1 > 1, \quad \alpha > 0$$
$$\| x_0(t_0) \| \leqslant \delta_1$$

Пусть начальные условия системы (1.2), (1.3) таковы, что

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta, \quad S_x(t) + S_u(t) \leqslant {}^1/_2\, \delta / k_1$$

Определим начальные условия $x_0(t)$ в момент $t_0 + \theta$ по соответствующим значениям $x(t)$, $u(t)$ согласно (1.5). Пусть $t_0 + T = \alpha^{-1}\ln(4k_1)$ и N_- настолько велико, что

$$t_0 + \theta \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + T, \quad M_0(T) / \sqrt{N_-} \leqslant {}^1/_4$$

Тогда с точностью до величин порядка малости $o(N_-^{-1})$ выполняются неравенства

$$t_0 + \theta \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + T, \quad \| x(t) \| + \| u(t) \| \leqslant G_{xu}(t) + \| x_{NN^*}(t) \| + \| u_{NN^*}(t) \| < \delta$$
$$t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + T, \quad \| x(t) \| + \| u(t) \| \leqslant \delta / 4$$

Полагая теперь $t_0 + \theta + T$ начальным моментом t_1, определим начальные значения $x_0(t)$ по соответствующим значениям $x(t)$, $u(t)$. Аналогично получим

$$t_0 + \theta + T \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2T, \quad \| x(t) \| + \| u(t) \| \leqslant \delta / 4 + G_{xu}(t) < \delta / 2$$
$$t_0 + 2T \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2T, \quad \| x(t) \| + \| u(t) \| \leqslant \delta / 8$$

Повторяя и далее шаги T, найдем

$$t_0 + kT \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + kT, \quad \| u(t) \| + \| x(t) \| \leqslant 2^{-k-1}\delta$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, для произвольной ограниченной области начальных условий системы (1.2), (1.3) можно указать такой интервал времени kT, по истечении которого траектории координат и управляющих воздействий системы будут принадлежать сколь угодно малой окрестности начала координат (порядка $o(N_-^{-1})$), что свидетельствует об асимптотической устойчивости данной системы.

Назначительное изменение приведенной схемы доказательства (см., например, [11]) показывает, что если система (1.2), (1.3) асимптотически устойчива, то можно указать такие N_0, N_0^*, что при $N \geqslant N_0$, $N^* \geqslant N_0^*$ асимптотически устойчивы и приближенные системы (1.4), (1.6). Наконец, неустойчивость системы (1.2), (1.3) при неустойчивости приближенных систем (1.4), (1.6) доказывается от противного.

В заключение укажем, что установленный выше результат служит обоснованием возможности исследования рассмотренного класса задач оптимального управления объектами с запаздыванием в управлении и в координатах на базе исследования оптимальных задач управления линейными динамическими объектами без запаздывания, причем специальный вид матриц уравнений динамики этих объектов позволяет ограничиться конечными, зачастую небольшими, величинами N, N^*. Более подробно этот вопрос затронут в [6], где приведены расчеты ряда конкретных систем управления с запаздыванием. В [6] рассмотрена также задача субоптимального управления, когда объект (1.2) управления регулятором (1.6), параметры которого определяются из решения приближенной оптимальной задачи. Отметим также работу [16], в которой рассмотрен метод исследования одного класса задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами на основе исследования последовательности конечномерных оптимальных задач.

Поступила 13 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1
2. *Ross D. W., Flügge-Lotz I.* An optimal control problem for systems with differential-difference equation dynamics. SIAM J. Control, 1969, vol. 7, No. 4.
3. *Lee E. B.* Variational problems for systems having delay in control action. IEEE Trans., 1969, AC-13, No. 6.
4. *Koivo H., Lee E. B.* Feedback controller synthesis for systems with control delay. IFAC Sympos. control of distributed parameter systems. Banff, Canada, 1971.
5. *Alekal Y., Brunovsky P., Chyung D. H., Lee E. B.* The quadratic problem for systems with delays. IEEE Trans., 1971, AC-16, No. 6.
6. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием. М., «Наука», 1978.
7. *Кириллова Ф. М.* К задаче об аналитическом конструировании регуляторов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
8. *Янушевский Р. Т.* Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления. М., «Наука», 1973.
9. *Kalman R. E.* Contributions to the theory of optimal control. Bol. Soc. Mat. Mech., 1960, No. 5.
10. *Willems J. C.* Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. IEEE Trans., Automatic Control, 1971, vol. 16, No. 6.
11. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
12. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
13. *Куржанский А. Б.* К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 12.
14. *Колмановский В. Б.* Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием. Problems of control and information theory, 1974, vol. 3, No. 1.
15. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4, ч. 1. М., «Наука», 1974.
16. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.