

О ТОЧНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ АМПЛИТУДНЫМ СПЕКТРОМ

В. М. Кейн, А. Н. Париков

(Ленинград)

Рассматривается задача определения максимальной ошибки линейной системы при действии возмущений с ограниченным амплитудным спектром. Предлагается способ построения наиболее неблагоприятного, в смысле выбранного критерия точности, возмущения из класса допустимых. Приводится пример определения максимального бокового отклонения самолета с бортовой системой управления на этапе предпосадочного снижения.

Задача о накоплении возмущений в линейной динамической системе сформулирована в [1] и получено ее решение для возмущений, ограниченных только по модулю. Экстремальным (самым неблагоприятным) оказывается возмущение релейного характера. Однако во многих случаях такие воздействия значительно отличаются от реально возможных, что ведет к завышению оценки максимальной ошибки. Для более точного учета свойств реальных возмущений вводились дополнительные ограничения дифференциального и интегрального характера [2,3]. Многие особенности реальных возмущений могут быть учтены при задании ограничений в частотной области [4]. Эта форма ограничений используется ниже.

1. Оценка максимальных ошибок. Пусть замкнутая динамическая система описывается линейным векторным уравнением

$$(1.1) \quad \dot{x} = A(t)x + C(t)v, \quad 0 \leq t \leq T$$

Здесь x — n -мерный вектор состояний системы, v — m -мерный вектор возмущений, $A(t)$, $C(t)$ — матрицы переменных коэффициентов соответствующих размерностей.

Каждая компонента вектора возмущений $v_i(t)$ может быть представлена преобразованием Фурье

$$(1.2) \quad v_i(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} V_i(\omega) \cos[\omega t - \varphi_i(\omega)] d\omega$$

причем амплитудные спектры $V_i(\omega)$ удовлетворяют ограничениям

$$(1.3) \quad 0 \leq V_i(\omega) \leq v_i(\omega), \quad \int_0^{\infty} v_i(\omega) d\omega < \infty, \quad i = 1, \dots, m$$

а на функции $\varphi_i(\omega)$ никаких ограничений не накладывается. Требуется найти максимально возможное отклонение выходной координаты системы x_k

$$(1.4) \quad I^* = \max_v \max_{0 \leq t \leq T} x_k(t) = \max_v x_k(t^*)$$

и построить экстремальное возмущение $v^*(t)$, вызывающее такое отклонение.

Рассмотрим действие на систему элементарной гармонической составляющей компоненты возмущения

$$(1.5) \quad dv_i(\omega) = V_i(\omega) \cos[\omega t - \varphi_i(\omega)] d\omega$$

Реакция выходной координаты системы (1.1) на такую составляющую в фиксированный момент времени t^* может быть определена по формуле Коши

$$(1.6) \quad dx_{ik}(\omega, t^*) = \int_0^{t^*} x^{[k]}(t^*, \tau) c_{[i]}(\tau) V_i(\omega) \cos[\omega \tau - \varphi_i(\omega)] d\omega d\tau$$

где $x^{[k]}(t^*, \tau)$ — k -я строка фундаментальной матрицы решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1), $c_{[i]}(\tau)$ — i -й столбец матрицы C .

При подаче на вход системы воздействия вида $v_i(t) = \cos \omega t = (\sin \omega t)$ на выходе x_k в момент времени t^* получается величина $e_{ik}(\omega, t^*)$ ($f_{ik}(\omega, t^*)$). Тогда выражение (1.6) можно переписать в виде

$$(1.7) \quad dx_{ik}(\omega, t^*) = V_i(\omega) [\cos \varphi_i(\omega) e_{ik}(\omega, t^*) + \sin \varphi_i(\omega) f_{ik}(\omega, t^*)] d\omega$$

Величины $e_{ik}(\omega, t^*)$ и $f_{ik}(\omega, t^*)$ не могут одновременно быть равными нулю, поэтому в соответствии с леммой о круговых вектограммах [5] максимум выражения в квадратных скобках достигается при

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \cos \varphi_i^*(\omega) &= e_{ik}(\omega, t^*) / g_{ik}(\omega, t^*), \quad \sin \varphi_i^*(\omega) = f_{ik}(\omega, t^*) / g_{ik}(\omega, t^*) \\ g_{ik}(\omega, t^*) &= \sqrt{e_{ik}^2(\omega, t^*) + f_{ik}^2(\omega, t^*)} \end{aligned}$$

Таким образом максимум (1.7) обеспечивается выполнением условий (1.8) и $V_i^*(\omega) = v_i(\omega)$. При этом выражение для максимально возможного отклонения выхода x_k при действии i -й компоненты возмущения принимает вид

$$(1.9) \quad \max dx_{ik}(\omega, t^*) = v_i(\omega) g_{ik}(\omega, t^*) d\omega$$

Выражение для компонент экстремального возмущения $v_i^*(t)$ можно получить, подставив значения $V_i^*(\omega)$ и $\varphi_i^*(\omega)$ в исходное выражение для возмущения (1.2)

$$(1.10) \quad \frac{dv_i^*(t)}{d\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v_i(\omega)}{g_{ik}(\omega, t^*)} [e_{ik}(\omega, t^*) \cos \omega t + f_{ik}(\omega, t^*) \sin \omega t]$$

Система (1.1) линейна, поэтому оценку $\max_v x_k(t^*)$ можно найти интегрированием выражения (1.9) по частоте с последующим суммированием по всем компонентам возмущения

$$(1.11) \quad \max_v x_k(t^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^m \int_0^\infty v_i(\omega) g_{ik}(\omega, t^*) d\omega$$

Для определения оценки (1.4) максимум выражения (1.11) по времени приходится обычно находить, используя численные методы поиска. Но иногда свойства системы (1.1) таковы, что монотонность зависимости величины $\max_v x_k(t)$ от времени и имеет явный характер. В этом случае расчеты производятся только для конечного момента времени.

2. Особенности вычислительной процедуры. Для вычисления величин $e_{ik}(\omega, t^*)$ и $f_{ik}(\omega, t^*)$ для различных значений частоты ω_l , $l = 1, \dots, L$ необходимо интегрирование системы $n + 2mL$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$(2.1) \quad \begin{aligned} ds/d\tau &= A'(\tau) s, \quad s_k(0) = 1, \quad s_j(0) = 0, \quad j \neq k \\ \frac{de_{ik}(\omega_l, \tau)}{d\tau} &= c'_{[i]} s \cos \omega_l \tau, \quad e_{ik}(\omega_l, 0) = 0 \\ \frac{df_{ik}(\omega_l, \tau)}{d\tau} &= c'_{[i]} s \sin \omega_l \tau, \quad f_{ik}(\omega_l, 0) = 0 \end{aligned}$$

$\tau = t^* - t$, $0 \leq \tau \leq t^*$, $i = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, L$; $j = 1, \dots, n$ где $s'(\tau) = x^{[k]}(t^*, \tau)$ (штрих означает транспонирование). Шаг численного интегрирования системы уравнений (2.1) выбирается на основании свойств системы (1.1) и требований по точности вычислений. Отрезок оси частот, на котором вычисляется интеграл (1.11), определяется видом амплитудных спектров $v_i(\omega)$, а шаг численного интегрирования по частоте выбирается по формуле

$$(2.2) \quad \Delta\omega \leq 2\pi / T$$

где T — длительность работы системы. При построении экстремального возмущения $v^*(t)$ к перечисленным операциям добавляется многократное интегрирование выраже-

ний вида (1.10) по частоте с шагом $\Delta\omega$ для дискретных значений времени из отрезка $[0, t^*]$.

3. Определение максимальной ошибки бортовой системы управления. Приведенный метод был использован для определения максимального бокового отклонения самолета Ту-134 с бортовой системой управления БСУ-3П [6,7]. Рассматривался участок предпосадочного снижения от точки входа в глиссаду до высоты принятия решения, что соответствует 90 с полетного времени при скорости 75 м/с. При заходе на посадку боковая сила, необходимая для перемещения самолета по направлению к оси взлетно-посадочной полосы и компенсации действия бокового ветра W_z , создается изменением крена. Необходимая величина крена γ_3 определяется в вычислителе БСУ-3П по отклонению центра масс самолета от оси взлетно-посадочной полосы z и скорости его изменения z' . Информация об этих величинах поступает от радиотехнической системы посадки, причем искривления курсовой линии радиомаяка могут давать существенные погрешности в определении угла между осью взлетно-посадочной полосы и направлением от маяка на самолет $\Delta\epsilon$. Рассогласование между текущим креном γ и заданным γ_3 отрабатывается автопилотом. Процессы стабилизации заданного крена имеют аperiodический характер, поэтому при исследовании точности траекторного управления динамика движения самолета по крену учитывалась приближенно одним уравнением первого порядка. Боковое движение самолета, таким образом, характеризуется вектором $x = (z z' \psi \psi' \gamma \delta \gamma_3 x_8)'$, где ψ — угол рысканья относительно оси взлетно-посадочной полосы. Присоединив к уравнениям движения объекта законы формирования и отработки заданного крена и угла поворота руля направления δ , получим уравнение замкнутой системы

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + C(t)v, \quad x(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ x &= (z z' \psi \psi' \gamma \delta \gamma_3 x_8)' \\ x_8 &= \gamma_3 + 4.116 i_e \Delta\epsilon \end{aligned}$$

Вектор возмущений $v = (\Delta\epsilon, W_z)'$ учитывает действие «силовых» W_z и информационных помех $\Delta\epsilon$. Матрицы A и C имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0762 & -5.34 & 0 & 9.81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0056 & -0.392 & -0.0889 & -0.0378 & -0.17 & 0.0378 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0129 & -0.902 & -0.2045 & -0.0869 & -0.89 & 0.0869 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{81}(t) & a_{82}(t) & 0 & 0.354 & 0 & 0 & -0.253 & -1.01 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0762 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0056 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.012 \\ -4.116 & 0 \\ 3.905 & 0 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты a_{81} и a_{82} зависят от расстояния между самолетом и курсовым радиомаяком и при постоянной скорости полета меняются по закону

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_{81}(\tau) &= -\frac{0.00361 i_e}{72.14 + \tau} \left(1 + \frac{16.3}{72.14 + \tau} \right) \\ a_{82}(\tau) &= -\frac{0.0588 i_e}{72.14 + \tau}, \quad \tau = T - t, \quad T = 90 \text{ с} \\ i_e &= \begin{cases} 4.68, & \tau < 40.7 \text{ с} \\ 5.85, & \tau \geq 40.7 \text{ с} \end{cases} \end{aligned}$$

где i_e — коэффициент передачи вычислителя. Для рассматриваемого режима полета наиболее важное значение имеет состояние объекта в конечный момент времени, поэтому критерий (1.4) был принят терминальным

$$(3.3) \quad I^* = \max_v x_1(T) = \max_v z(T)$$

Амплитудные спектры $v_i(\omega)$ рассматриваемых возмущений, в соответствии с [7,8] задавались в форме (см. фиг. 1):

для искривлений курсовой линии с учетом только низкочастотной составляющей $\Delta\varepsilon$

$$(3.4) \quad v_e(\omega, \tau) = b_e(\tau) f_e(\omega)$$

$$b_e(\tau) = b_e^0 + \xi_e \tau, \quad b_e^0 = 0.0023 \text{ рад}$$

$$\xi_e = 0.000125 \text{ рад/с}$$

$$f_e(\omega) = \left(\frac{0.032 + 0.4\omega^2}{0.0269 + 4.2\omega^4} \right)^{1/2}$$

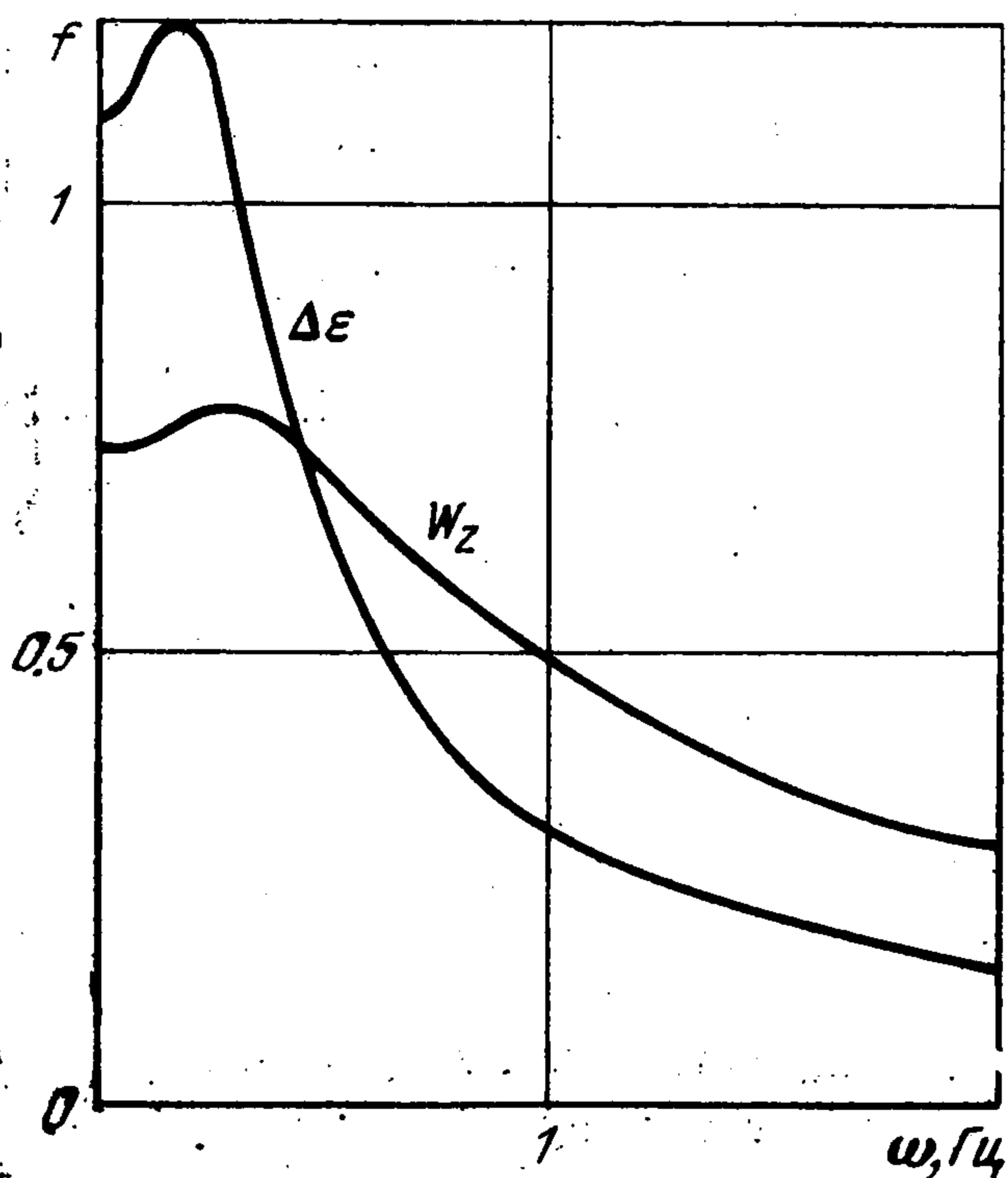
для скорости бокового ветра W_z

$$(3.5) \quad v_W(\omega, \tau) = b_W(\tau) f_W(\omega)$$

$$b_W(\tau) = b_W^0 + \xi_W \tau, \quad b_W^0 = 30.8 \text{ м/с}, \quad \xi_W = 0.314 \text{ м/с}^2$$

$$f_W(\omega) = \frac{(0.102 + 1.4\omega^2)^{1/2}}{0.438 + 2.013\omega^2}$$

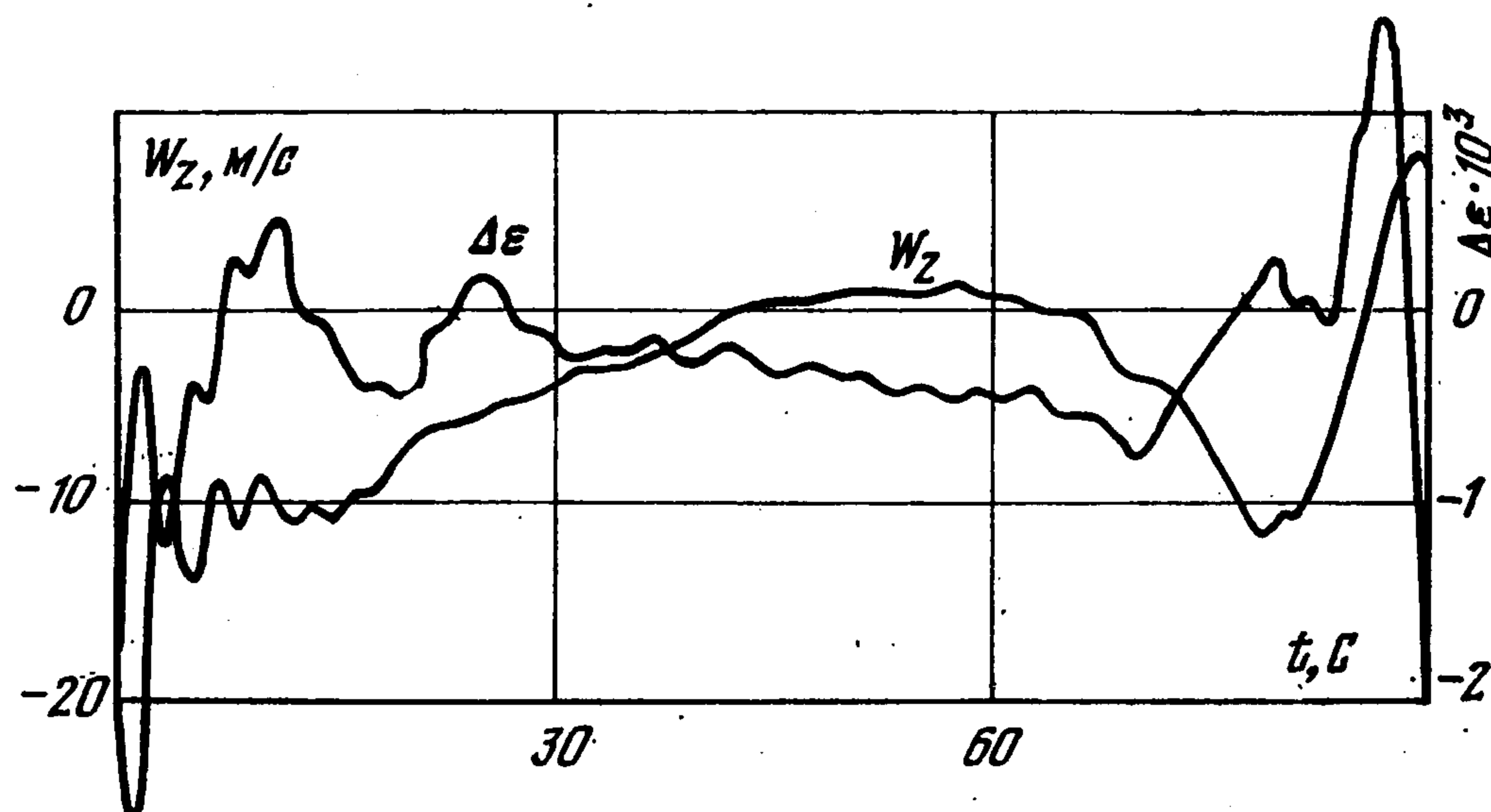
С учетом инерционности рассматриваемого объекта диапазон частот, учитываемый при оценке максимального отклонения, был ограничен $\omega_m = 2$ Гц. В соответствии с



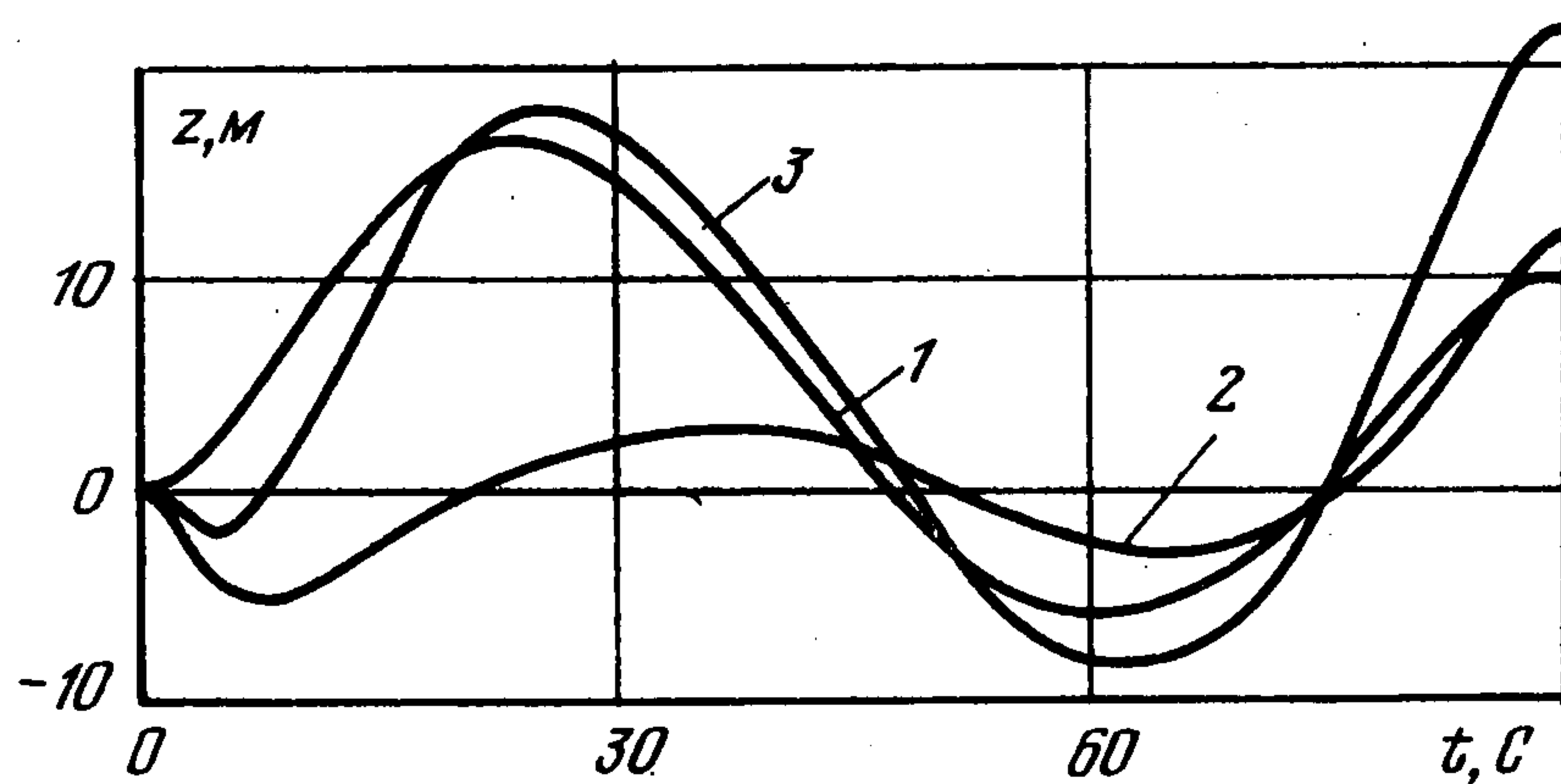
Фиг. 1

(2.2) шаг численного интегрирования по частоте $\Delta\omega = 0.069$ Гц. Для вычисления оценки (3.3) потребовалось интегрирование [системы из $8 + 2 \times 2 \times 29 = 124$ уравнений на отрезке времени $[0, 90]$ с шагом $0,1$ с с последующим интегрированием выражения (1.9) на отрезке частот $[0, 2]$ Гц с шагом $\Delta\omega$. Максимальная ошибка системы (3.1) по боковому отклонению на высоте принятия решения составила 22.16 м. Значения компонент экстремального возмущения $[v^*(t), t \in [0, 90]$ с], с дискретностью 1 с (фиг. 2) были получены интегрированием $2 \times 91 = 182$ уравнений вида (1.10) на отрезке $[0, 2]$ Гц с шагом $\Delta\omega$. Движение системы моделировалось при действии экстремальных искривлений курсовой линии (фиг. 3, кривая 1), бокового ветра (кривая 2) и при суммарном действии экстремальных возмущений (кривая 3). В последнем случае максимальное

отклонение в конечный момент времени составило 21.37 м. Незначительное расхождение между значениями максимальной ошибки, полученными по формуле (1.11) и при моделировании (3.5%), объясняется неточным представлением возмущения $v^*(t)$ внутри интервалов в 1 с.



Фиг. 2



Фиг. 3

Работа программы для определения максимальной ошибки (3.3), построения компонент экстремального возмущения $v^*(t)$ и моделирования движения системы (3.1) занимает 3 мин 30 с процессорного времени ЭВМ АСВТ М-4030.

Поступила 20 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. Докл. АН СССР, 1946, т. 51, № 5.
2. Кричевский И. Я., Уланов Г. М. Об одном обобщении теории накопления отклонений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
3. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М., «Наука», 1974.
4. Grachan K. D. Linear minimax control with disturbances specified in the frequency domain. AIAA Paper, 1975, No. 1110.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
6. Федоров С. М., Дробкин В. В., Кейн В. М., Михайлов О. И. Автоматизированное управление самолетами и вертолетами. М., «Транспорт», 1977.
7. Белгородский С. Л. Автоматизация управления посадкой самолета. М., «Транспорт», 1972.
8. Доброленский Ю. П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. М., «Машиностроение», 1969.