

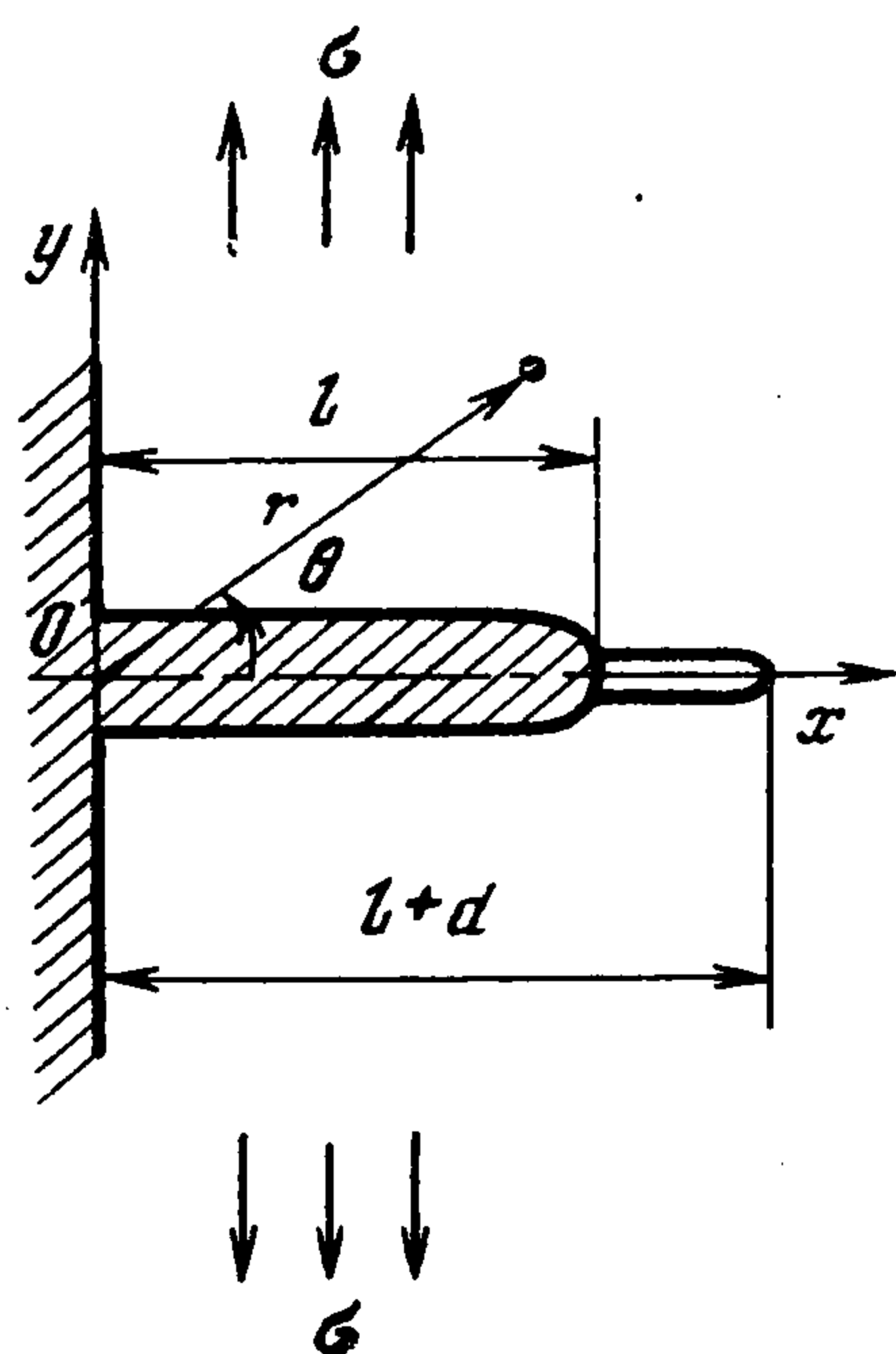
## О ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА КОНЦЕ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ

В. Д. Кулиев

(Москва)

Дается точное аналитическое решение задачи о трещине, выходящей на границу свободной полуплоскости, когда пластическая зона сосредоточена на продолжении трещины (на таких материалах, как малоуглеродистая сталь, реализуется именно указанная форма пластической зоны] [1-3]). [В частности, когда длина пластической зоны равна нулю, приходим к задаче о растяжении упругой полуплоскости с краевой щелью. Найдена общая формула для коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$ . Из этой формулы как частные случаи вытекают результаты [4-6].

Приближенное решение рассмотренной ниже задачи в частном случае, когда на бесконечности действует постоянное нормальное напряжение  $\sigma_y$ , построено в работе [7].



Фиг. 1

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину с краевой трещиной длины  $l$ . Будем предполагать, что материал пластины идеальный упругопластический и удовлетворяет условию пластичности Треска — Сен-Венана, а деформации малы. Трещину представим в виде математического разреза нулевой толщины. Поэтому уже при сколь угодно малых внешних нагрузках в конце трещины образуется пластическая область, размер которой растет с их увеличением. Предположим, что пластическая деформация концентрируется вдоль узкой прямолинейной полосы скольжения на продолжении краевой трещины.

Построим решение следующей краевой задачи:

- (1.1)  $\theta = \pm \pi / 2, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$   
 (1.2)  $\theta = 0, \quad 0 < r < l, \quad \tau_{r\theta} = 0$   
 $\sigma_\theta = -\sigma(x)$   
 $\theta = 0, \quad l < r < l + d, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_s - \sigma(x)$   
 $\theta = 0, \quad r > l + d, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \partial u_\theta / \partial r = 0$   
 (1.3)  $\theta = 0, \quad [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0$   
 (1.4)  $r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta \rightarrow 0, \quad \sigma_r \rightarrow 0, \quad \tau_{r\theta} \rightarrow 0$

Здесь  $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений в полярных координатах  $r, \theta$ ;  $u_\theta, u_r$  — компоненты вектора перемещений; квадратная скобка означает скачок величины, заключенной в ней;  $\sigma_s$  — предел текучести;  $\sigma(x)$  — заданная функция.

В частности, когда  $\sigma(x) = \sigma = \text{const}$ , приходим к задаче, изображенной на фиг. 1.

2. Вывод уравнения Винера — Хопфа. Применим интегральное преобразование Меллина

$$f^*(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^p dr$$

( $p$  — комплексный параметр) к уравнениям равновесия и условию сплошности, получим [8]

$$(2.1) \quad \frac{d^4 \sigma_{\theta}^*}{d\theta^4} + [(p+1)^2 + (p-1)^2] \frac{d^2 \sigma_{\theta}^*}{d\theta^2} + (p+1)^2 (p-1)^2 \sigma_{\theta}^* = 0$$

Функции  $\sigma_r^*$ ,  $\tau_{r\theta}^*$  выражаются через  $\sigma_{\theta}^*$  следующим образом:

$$(2.2) \quad \tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} \frac{d\sigma_{\theta}^*}{d\theta}, \quad p\sigma_r^* = \frac{1}{p-1} \frac{d^2 \sigma_{\theta}^*}{d\theta^2} - \sigma_{\theta}^*$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид (здесь и далее верхний знак берется при  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , нижний — при  $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ )

$$(2.3) \quad \sigma_{\theta}^*(p, \theta) = C^{\pm}(p) \left[ \cos(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) - \cos(p-1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right] + \\ + D^{\pm}(p) \left[ \sin(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) - \frac{p+1}{p-1} \sin(p-1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right]$$

Неизвестные функции  $C^{\pm}(p)$ ,  $D^{\pm}(p)$  определяются из оставшихся граничных условий.

Согласно формулам (2.2), (2.3) и закону Гука, находим

$$(2.4) \quad \sigma_{\theta}^*(p, \theta) = C^{\pm}(p) \left[ \cos(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) - \cos(p-1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right] + \\ + D^{\pm}(p) \left[ \sin(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \pm \theta \right) - \frac{p+1}{p-1} \sin(p-1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right] \\ \tau_{r\theta}^*(p, \theta) = \frac{1}{p-1} \left\{ C^{\pm}(p) \left[ (p \pm 1) \sin(p \pm 1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (p \mp 1) \sin(p \mp 1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right] \mp D^{\pm}(p)(p+1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \cos(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) - \cos(p-1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right] \right\} \\ \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right)^* = \frac{1+\nu}{(p-1)E} \left\{ \pm 4(1-\nu) \left[ -C^{\pm}(p) \sin(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + D^{\pm}(p) \cos(p+1) \left( \frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right] + (p-1) \tau_{r\theta}^*(p, \theta) \right\}$$

При  $\theta = 0$  имеем  $[\sigma_{\theta}^*] = [\tau_{r\theta}^*] = 0$ ,  $\tau_{r\theta}^* = 0$  и, следовательно

$$(2.5) \quad C^+ = C^-, \quad D^+ = D^-, \quad D^+ = -\frac{pC^+}{p+1} \operatorname{ctg} \frac{p\pi}{2}$$

Согласно формулам (2.4), (2.5)

$$(2.6) \quad \sigma_{\theta}^*(p, 0) = -\frac{2C^+}{p^2-1} \frac{p^2 - \sin^2 p\pi/2}{\sin p\pi/2} \\ \left[ \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right)^* \right]_{\theta=0} = -\frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{2C^+}{p^2-1} \cos p \frac{\pi}{2}$$

Исключая в (2.6) функцию  $C^+(p)$ , с учетом (1.2) приходим к неоднородному уравнению Винера — Хопфа

$$(2.7) \quad \Phi^-(p) = K(p) G(p) (l + d) [Q(p) + \Phi^+(p)]$$

Здесь

$$\Phi^-(p) = -\frac{E}{4(1-v^2)} \int_0^1 \left[ \frac{\partial u_\theta(lt + dt, 0)}{\partial t} \right] \Big|_{\theta=0} t^p dt$$

$$K(p) = \operatorname{ctg} p \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(lt + dt, 0) t^p dt, \quad G(p) = \frac{\sin^2 p\pi/2}{\sin^2 p\pi/2 - p^2}$$

$$Q(p) = \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-(p+1)} \left\{ \frac{\sigma_s}{p+1} \left[ \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{p+1} - 1 \right] - \int_0^{1+d/l} \sigma(lt) t^p dt \right\}$$

3. Решение краевой задачи. Функциональное уравнение (2.7) имеет место в полосе  $-1 < \operatorname{Re} p < 0$ ,  $-\infty < \operatorname{Im} p < \infty$ . Функцию  $G(p)$  в полосе  $-1 < \operatorname{Re} p < 0$ ,  $-\infty < \operatorname{Im} p < \infty$  можно представить в виде [9]

$$(3.1) \quad G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}$$

$$G^\pm(p) = \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{a^\pm - i\infty}^{a^\pm + i\infty} \frac{\ln G(t)}{t-p} dt \right] \quad (-1 < a^- < \operatorname{Re} p < a^+ < 0)$$

$G^+(p)$  и  $G^-(p)$  — целые функции, аналитические и не имеющие нулей соответственно в областях  $\operatorname{Re} p < 0$  и  $\operatorname{Re} p > -1$ ; на бесконечности они стремятся к единице.

Функцию  $K(p)$  представим в виде [10]

$$(3.2) \quad K(p) = 2p^{-1} K^+(p) K^-(p), \quad K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p/2) / \Gamma(1/2 \mp p/2)$$

При помощи факторизации (3.2) и (3.1) функциональное уравнение (2.7) можно записать так:

$$(3.3) \quad \frac{G^-(p)}{K^-(p)} \Phi^-(p) = \frac{2(l+d)}{p} K^+(p) G^+(p) [\Phi^+(p) + Q(p)]$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(p) = p^{-1} K^+(p) G^+(p) Q(p)$$

Пусть функция  $\varphi(p)$  обладает следующими свойствами [10]:

а) аналитична и регулярна в полосе  $-1 < a^- < \operatorname{Re} p < a^+ < 0$ ,  $-\infty < \operatorname{Im} p < \infty$ ;

б)  $|\varphi(p)| < A |\operatorname{Im} p|^{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) при  $|\operatorname{Im} p| \rightarrow \infty$ , причем это неравенство выполняется равномерно для всех  $\operatorname{Re} p$  в полосе  $a^- + \varepsilon < \operatorname{Re} p < a^+ - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Тогда функцию  $\varphi(p)$  в полосе  $-1 < a^- < a_1^- < \operatorname{Re} p < a_1^+ < a^+ < 0$ ,  $|\operatorname{Im} p| < \infty$  можно представить в виде

$$(3.4) \quad \varphi(p) = \varphi^+(p) - \varphi^-(p), \quad \varphi^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1^\pm - i\infty}^{a_1^\pm + i\infty} \frac{\varphi(t)}{t-p} dt$$

Функции  $\varphi^+(p)$  и  $\varphi^-(p)$  регулярны и не имеют нулей в областях  $\operatorname{Re} p < a_1^+$  и  $\operatorname{Re} p > a_1^-$  соответственно. После подстановки (3.4) в (3.3) получим

$$(3.5) \quad \frac{G^-(p)}{K^-(p)} \Phi^-(p) + 2(l+d)\varphi^-(p) = \\ = \frac{2(l+d)}{p} K^+(p) G^+(p) \Phi^+(p) + 2(l+d)\varphi^+(p)$$

Отсюда, согласно свойствам функций  $G^\pm(p)$ ,  $K^\pm(p)$ ,  $\Phi^\pm(p)$  и  $\varphi^\pm(p)$ , находим

$$(3.6) \quad \Phi^+(p) = -\frac{p\varphi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}, \quad \Phi^-(p) = -2(l+d)\frac{\varphi^-(p)K^-(p)}{G^-(p)}$$

Определяя отсюда при помощи (2.6) функцию  $C^+(p)$ , находим преобразование Меллина искомым напряжений, а после обращения преобразования — и сами напряжения.

Рассмотрим некоторые частные случаи общего решения (3.6).

*Постоянная нагрузка.* Пусть функция  $\sigma(x)$  равна постоянной:  $\sigma(x) = \sigma = \text{const}$  (см. фиг. 1). При этом

$$Q(p) = \frac{1}{p+1} \left[ \sigma_s - \sigma - \sigma_s \left( \frac{l}{l+d} \right)^{p+1} \right]$$

Согласно свойствам интегралов типа Коши, функции  $\varphi^+(p)$  и  $\varphi^-(p)$  можно записать в виде

$$(3.7) \quad \varphi^+(p) = \frac{\sigma_s - \sigma}{p(p+1)} K^+(p) G^+(p) \left[ 1 + \frac{p \sqrt{\pi} G^+(-1)}{2K^+(p) G^+(p)} \right] - \sigma_s \gamma^+(p) \\ \varphi^-(p) = (\sigma_s - \sigma) \frac{\sqrt{\pi} G^+(-1)}{2(p+1)} - \sigma_s \gamma^-(p)$$

Здесь

$$(3.8) \quad \gamma^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1^\pm - i\infty}^{a_1^\pm + i\infty} \frac{K^+(t) G^+(t)}{t(t+1)(1+d/l)^{t+1}} \frac{dt}{t-p}$$

Для определения величины  $d$  рассмотрим функцию

$$(3.9) \quad \Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta [(l+d)t, 0] t^p dt$$

Отсюда, используя условие

$$\sigma_\theta [(l+d)t, 0] = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(l+d)(t-1)}} \quad (t \rightarrow +1+0)$$

согласно теореме абелева типа, находим

$$(3.10) \quad \Phi^+(p) = \frac{K_I}{\sqrt{-2(l+d)p}} \quad (p \rightarrow \infty)$$

С другой стороны, при  $p \rightarrow \infty$  по формулам (3.6) и (3.7) имеем

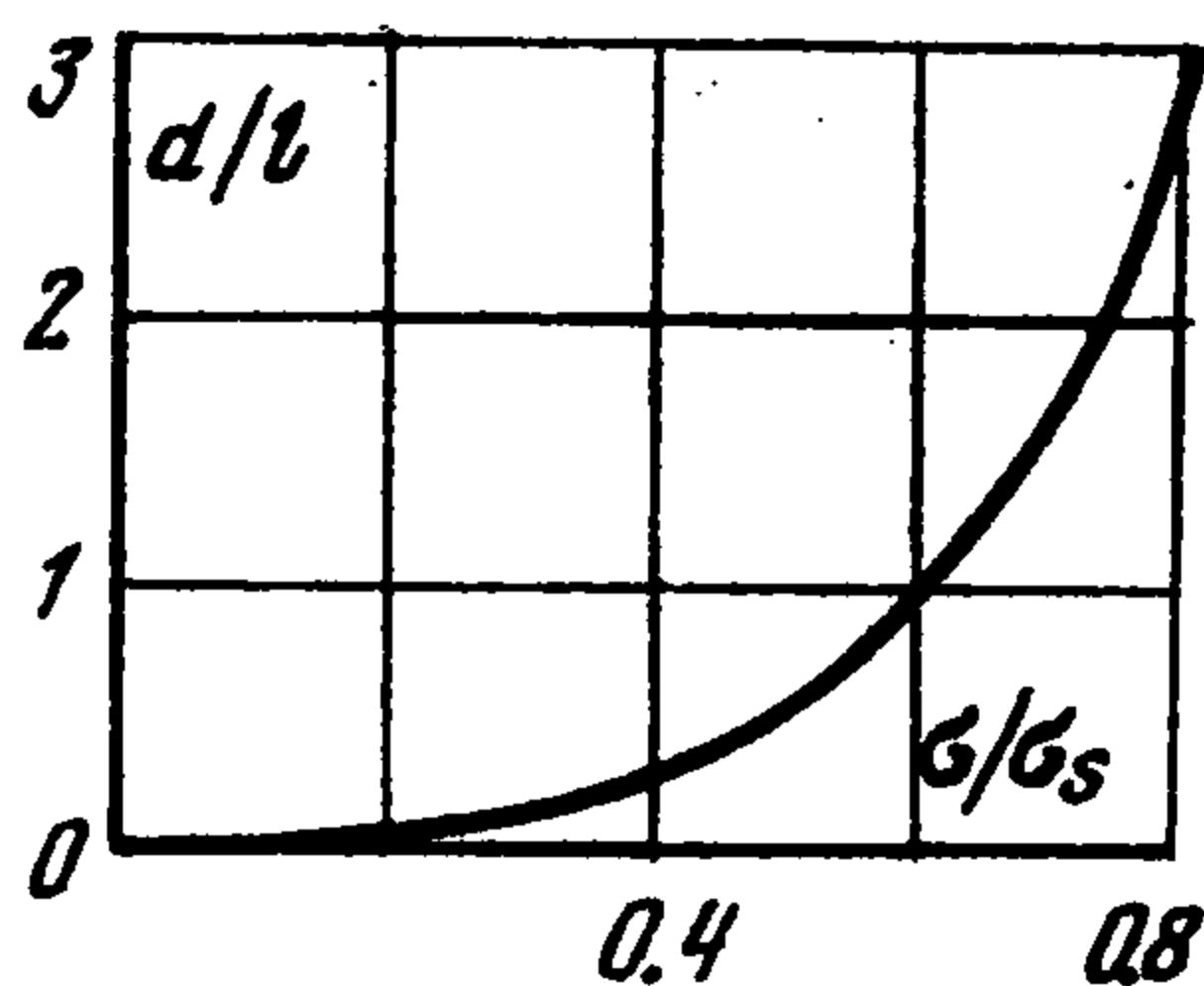
$$(3.11) \quad \Phi^+(p) = \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sigma - \sigma_s) G^+(-1) - \sqrt{2} \sigma_s g\left(\frac{d}{l}\right) \right] \frac{1}{\sqrt{-p}}$$

$$g\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1^+ - i\infty}^{a_1^+ + i\infty} \frac{K^+(t) G^+(t)}{t(t+1)} \frac{dt}{(1+d/l)^{t+1}}$$

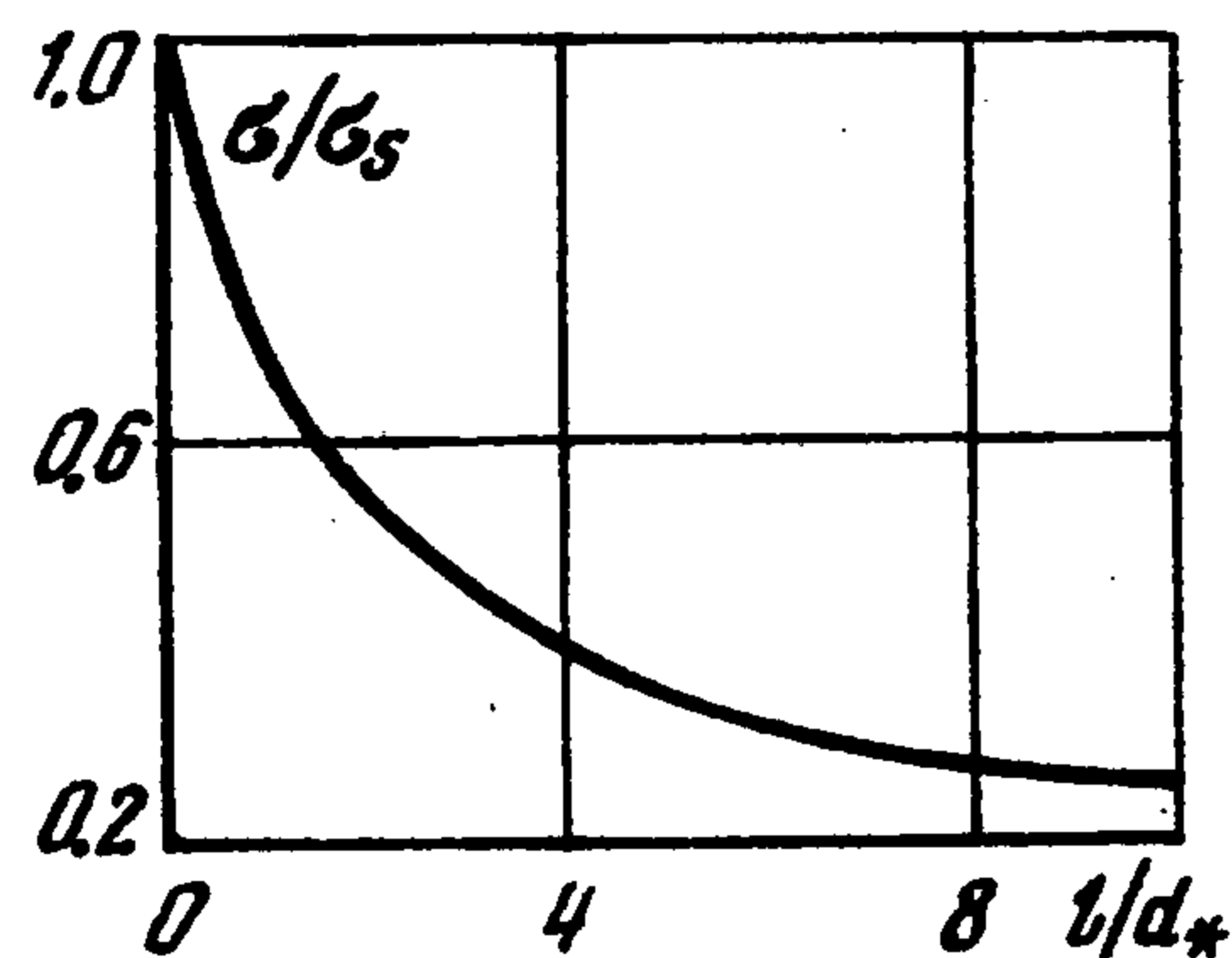
Из условий ограниченности напряжений в конце пластической линии получаем

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} G^+(-1) \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \right) = g\left(\frac{d}{l}\right)$$

Зависимость  $d/l$  от  $\sigma/\sigma_s$  показана на фиг. 2.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для механики разрушения представляет интерес раскрытие трещины. Оно определяется по формуле

$$(3.12) \quad v_0 = \int_{d+l}^x \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \Big|_{\theta=0} dr$$

Здесь

$$(3.13) \quad \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[ \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^* \right] \Big|_{\theta=0} r^{-p-1} dp$$

$$(L: a_1^- < \operatorname{Re} p = c < a_1^+, -\infty < \operatorname{Im} p < \infty)$$

Согласно вторым формулам в (3.6), (3.7) и (3.13), находим

$$(3.14) \quad \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] \Big|_{\theta=0} = -\frac{8(1-\nu^2)}{E} \sigma_s (d+l) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(l+d)^p K^-(p)}{(p+1) G^-(p)} \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} - 1 \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} G^+(-1) + (p+1) \gamma^-(p) \right] r^{-p-1} dp$$

Подставляя (3.14) в соотношение (3.12), получим

$$v_0 = \frac{8(1-\nu^2)}{E} \sigma_s (l+d) \left\{ \frac{\sigma}{2\sigma_s} \frac{G^+(-1)}{G^-(0)} + \frac{2\gamma^-(0) - \sqrt{\pi} G^+(-1)}{2\sqrt{\pi} G^-(0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left( \frac{l}{x} \right)^p \frac{(1+d/l)^p K^-(p)}{p(p+1) G^-(p)} \left[ (p+1) \gamma^-(p) + g\left(\frac{d}{l}\right) \right] dp \right\} \quad (x \neq 0)$$

Раскрытие трещины в ее вершине (при  $x = l$ ) равно

$$\begin{aligned} \frac{d_*}{l} = & \pi \left(1 + \frac{d}{l}\right) \left[ \frac{\sigma}{\sigma_s} \frac{G^+(-1)}{2G^-(0)} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} - 1\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} G^+(-1) \times \right. \\ & \times \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(1+d/l)^p K^-(p)}{p(p+1)G^-(p)} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(1+d/l)^p K^-(p)}{pG^-(p)} \gamma^-(p) dp + \\ & \left. + \frac{2\gamma^-(0) - \sqrt{\pi}G^+(-1)}{2\sqrt{\pi}G^-(0)} \right] \quad \left(d_* = \frac{\pi E v_0}{8(1-\nu^2)\sigma_s}\right) \end{aligned}$$

График функции  $\sigma/\sigma_s$  от  $l/d_*$  показан на фиг. 3. Пусть  $d = 0$ . При этом

$$(3.15) \quad g(0) = -1/2 \sqrt{\pi} G^+(-1)$$

Заметим, что функцию  $G^+(-1)$  можно вычислить с заданной точностью. Например, вычисление значения функции  $G^+(-1)$  до шестого знака дает  $G^+(-1) = 1.121524$ .

Подставляя выражение (3.15) в (3.11) и приравнявая две асимптотики функции  $\Phi^+(p)$  при  $d = 0$ , находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} G^+(-1)$$

Этот результат совпадает с известным (см., например, [4,6]). В частности, можно определить и раскрытие трещины

$$\begin{aligned} v_0 = & \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sigma l \sqrt{\pi} G^+(-1) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}G^-(0)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{l}{x}\right)^p \frac{K^-(p)}{p(p+1)G^-(p)} dp \right] \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

*Линейная нагрузка.* Пусть функция  $\sigma(x)$  имеет вид

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \sigma_2 \frac{c_* - x}{c_*}$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, c_*$  — некоторые заданные постоянные. В этом случае

$$Q(p) = \frac{1}{p+1} \left[ (\sigma_s - \sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_s \left(\frac{l}{l+d}\right)^{p+1} \right] + \frac{\sigma_2(l+d)}{c_*(p+2)}$$

На основании теории интегралов типа Коши функции  $\Phi^+(p)$  и  $\Phi^-(p)$  примут вид

$$\begin{aligned} (3.16) \quad \Phi^+(p) = & \frac{\sigma_s - \sigma_1 - \sigma_2}{p(p+1)} K^+(p) G^+(p) \left[ 1 + \frac{p \sqrt{\pi} G^+(-1)}{2K^+(p) G^+(p)} \right] + \\ & + \frac{\sigma_2(l+d) K^+(p) G^+(p)}{p(p+2)c_*} \left[ 1 + \frac{pG^+(-2)}{\sqrt{\pi} K^+(p) G^+(p)} \right] - \sigma_s \gamma^+(p) \\ \Phi^-(p) = & \frac{(\sigma_s - \sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{\pi}}{2(p+1)} G^+(-1) + \frac{\sigma_2(l+d) G^+(-2)}{\sqrt{\pi}(p+2)c_*} - \sigma_s \gamma^-(p) \end{aligned}$$

Подставляя (3.16) в (3.6), находим

$$\begin{aligned} (3.17) \quad \Phi^+(p) = & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_s}{p+1} \left[ 1 + \frac{p \sqrt{\pi} G^+(-1)}{2K^+(p) G^+(p)} \right] - \\ & - \frac{\sigma_2(l+d)}{c_*(p+2)} \left[ 1 + \frac{pG^+(-2)}{\sqrt{\pi} K^+(p) G^+(p)} \right] + \frac{\sigma_s p \gamma^+(p)}{K^+(p) G^+(p)} \\ \Phi^-(p) = & 2(l+d) \sigma_s \frac{K^-(p)}{G^-(p)} \gamma^-(p) - \\ & - (l+d) \frac{(\sigma_s - \sigma_1 - \sigma_2) \sqrt{\pi} G^+(-1)}{(p+1)G^-(p)} K^-(p) - \frac{2\sigma_2(l+d)^2 G^+(-2)}{c_*(p+2)\sqrt{\pi}G^-(p)} K^-(p) \end{aligned}$$

Величина  $d$  определяется по той же схеме, что и в предыдущем случае

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_s} - 1\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} G^+(-1) - \frac{\sigma_2(l+d)}{\sqrt{\pi} \sigma_s c_*} G^+(-2) = g\left(\frac{d}{l}\right)$$

Пусть  $d = 0$ ,  $c_* = l$  (задача Койтера [4]). Найдем коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$ . Согласно (3.17) и (3.10), находим коэффициент интенсивности напряжений

$$(3.18) \quad K_I = (\sigma_1 + \sigma_2) \sqrt{\pi l} G^+(-1) - 2\sigma_2 \sqrt{\frac{l}{\pi}} G^+(-2)$$

Подставляя численные значения функций  $G^+(-1)$  и  $G^+(-2)$ , полученные на ЭВМ, в (3.18), находим

$$K_I = (1.1215\sigma_1 + 0.4391\sigma_2) \sqrt{\pi l}$$

Этот результат совпадает с результатом [4].

*Произвольная симметричная нормальная нагрузка.* Пусть  $d = 0$ . Коэффициент интенсивности напряжений согласно формулам (3.6) и (3.10)

$$(3.19) \quad K_I = -\frac{\sqrt{l}}{\pi i} \int_{a_1^- - i\infty}^{a_1^+ + i\infty} \frac{K^+(t)}{t} G^+(t) \int_0^1 \sigma(l\tau) \tau^t d\tau dt$$

Из формулы (3.19) как частные случаи вытекают результаты [4-6] и др. (см. [1], стр. 530). Пусть  $d \neq 0$ . В этом случае для определения величины  $d$  получаем следующую формулу:

$$\frac{\sigma_s \sqrt{\pi}}{2} G^+(-1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1^- - i\infty}^{a_1^+ + i\infty} \frac{K^+(t) G^+(t)}{t(1+d/l)^{t+1}} \int_0^1 \sigma(l\tau) \tau^t d\tau dt = -\sigma_s g\left(\frac{d}{l}\right)$$

Автор благодарит Г. П. Черепанова за обсуждение работы.

Поступила 18 X 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974, стр. 283—287.
2. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 2, p. 100—104.
3. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М., «Наука», 1974, стр. 148—159.
4. Benthem J. P., Koiter W. T. Asymptotic approximation to crack problems. In: Mechanics of Fracture, vol. 1. Leyden, Noordhoff Internat. Publ., 1973, p. 131—178.
5. Bueckner H. F. Some stress singularities and their computation by means of integral equation. In: Boundary problems in differential equations. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 215—230.
6. Wigglesworth L. A. Stress distribution in a notched plate. Mathematika, 1957, vol. 4, No. 1, p. 76—96.
7. Панасюк В. В., Витвицкий П. М., Кутень С. И. О пластической деформации и разрушении пластинки с краевой трещиной. Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 4.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967, стр. 124—130.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, стр. 117—120.
10. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 52.