

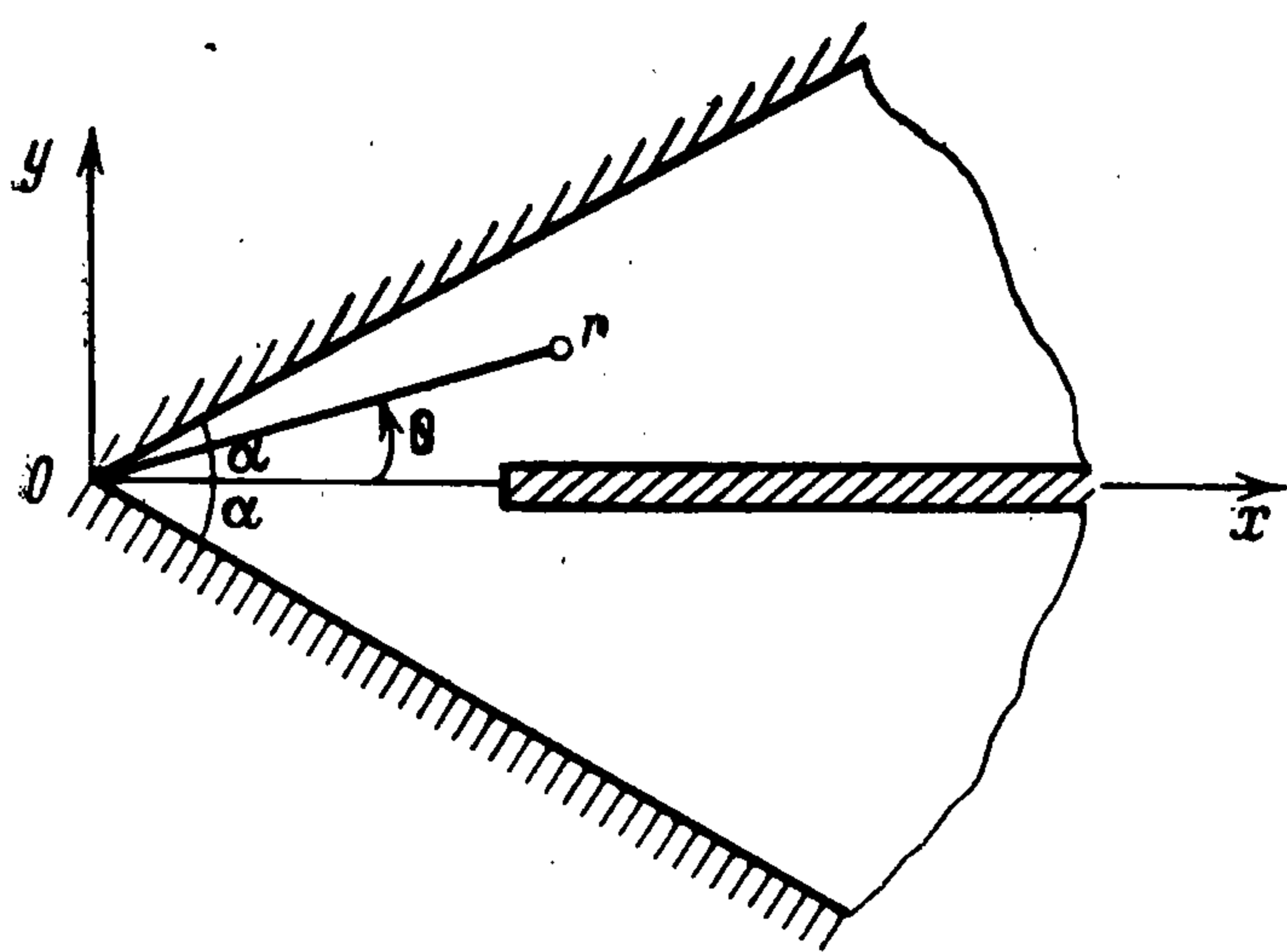
УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ КЛИНА С ТРЕЩИНОЙ

Л. А. Кипнис

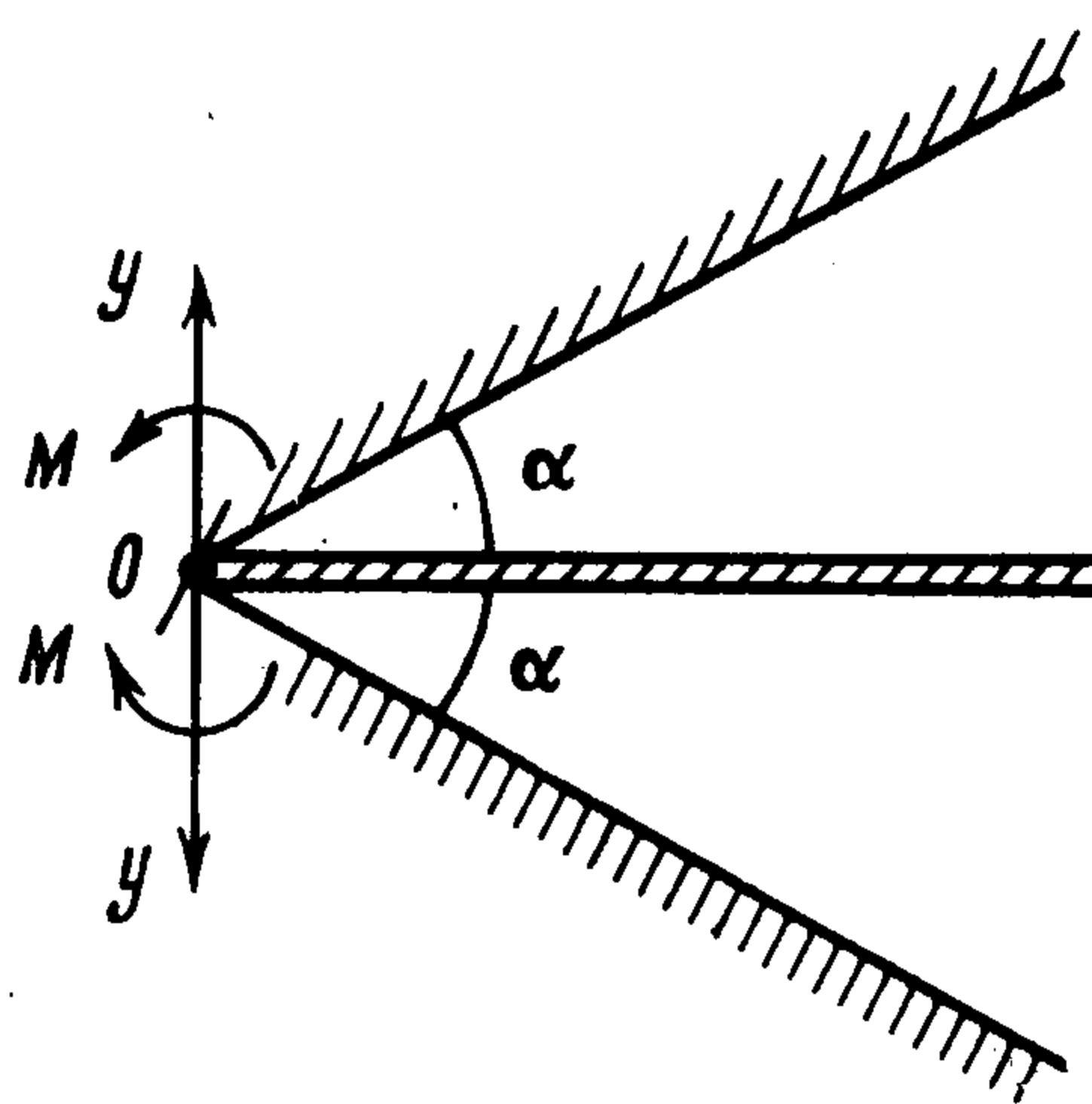
(Москва)

Рассматривается плоская однородная задача теории упругости о равновесии бесконечного клина, в биссекторной плоскости которого имеется внутренняя прямолинейная полубесконечная трещина. Грани клина и берега трещины свободны от нагрузок. На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но их главный вектор и главный момент отличны от нуля и заданы по условию. С помощью преобразования Меллина задача сводится к решению функционального уравнения Винера — Хопфа. Дается точное решение уравнения и вычисляется коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим равновесие бесконечного упругого клина с углом раствора 2α ($0 < \alpha \leq \pi$), в биссекторной плоскости которого при $y = 0$, $x > l$ имеется полубесконечная трещина (фиг. 1). Грани клина и берега трещины свободны от нагрузок. На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но их главный вектор и главный момент отличны от нуля и равны соответственно $(0, Y)$ и M .



Фиг. 1



Фиг. 2

Перешеек $y = 0$, $0 < x < l$ между нижним клином $-\alpha < \theta < 0$ и верхним клином $0 < \theta < \alpha$ передает, таким образом, заданную силу $(0, Y)$ и заданный момент M .

Граничные условия задачи имеют вид

$$(1.1) \quad \theta = \alpha, \quad \sigma_{\theta} = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

$$(1.2) \quad \theta = 0, \quad r < l, \quad \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} = 0$$

$$\theta = 0, \quad r > l, \quad \sigma_{\theta} = 0$$

(σ_{θ} , $\tau_{r\theta}$, σ_r — напряжения; u_{θ} , u_r — смещения).

Замечание. Из непрерывности смещения на перешейке и симметрии задачи следует равенство нулю нормального смещения u_θ , а не только его второй производной по радиусу, как это записано в первом условии (1.2). Однако напряжения в задаче с условием $\theta = 0, r < l, u_\theta = 0$ будут такими же, как напряжения в задаче с условием $\theta = 0, r < l, \partial^2 u_\theta / \partial r^2 = 0$ (при сохранении всех остальных условий).

По условию справедливы соотношения

$$(1.3) \quad \int_0^l \sigma_\theta(r, 0) dr = Y, \quad \int_0^l \sigma_\theta(r, 0) r dr = M$$

В дальнейшем потребуются сведения о корнях уравнения

$$(1.4) \quad \Delta \equiv \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha = 0$$

(p — комплексное число) в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$.

Известно, что при $0 < \alpha < \pi / 2$ уравнение (1.4) в указанной полосе корней не имеет [1].

Лемма. Уравнение $\Delta(p) = 0$ для каждого α ($\pi / 2 < \alpha < \pi$) в области $0 < \operatorname{Re} p < 1, \operatorname{Im} p \geq 0$ имеет единственный корень. Этот корень действителен и принадлежит интервалу $(1/2, 1)$.

Доказательство леммы, основанное на переходе от уравнения (1.4) к соответствующей действительной системе и применении аппарата дифференциального исчисления, приводить не будем.

Рассматриваемая задача представляет собой однородную сингулярную задачу теории упругости, особыми точками которой являются вершина трещины, вершина клина и бесконечно удаленная точка. Краевая задача в особых точках не определена. При постановке корректной сингулярной краевой задачи должны быть сформулированы дополнительные условия в особых точках. Для формулировки этих условий используется следующее утверждение [2]: в бесконечно малой окрестности особой точки решение корректной краевой задачи теории упругости ведет себя как асимптотически наибольшая по абсолютной величине собственная функция соответствующей канонической сингулярной задачи.

Переход от исходной задачи к соответствующим каноническим сингулярным задачам, осуществляемый с помощью «принципа микроскопа», и исследование последних (см. [2], стр. 60—63, 71—76) показывает, что в вершине трещины должно быть поставлено условие

$$(1.5) \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow l - 0, \quad \sigma_\theta \sim K_I [2\pi (l - r)]^{-1/2}$$

$$\theta = +0, \quad r \rightarrow l + 0, \quad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \sim -(1 - \nu^2) E^{-1} K_I (2\pi)^{-1/2} (r - l)^{-3/2}$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, K_I — коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины), а в вершине клина — условие

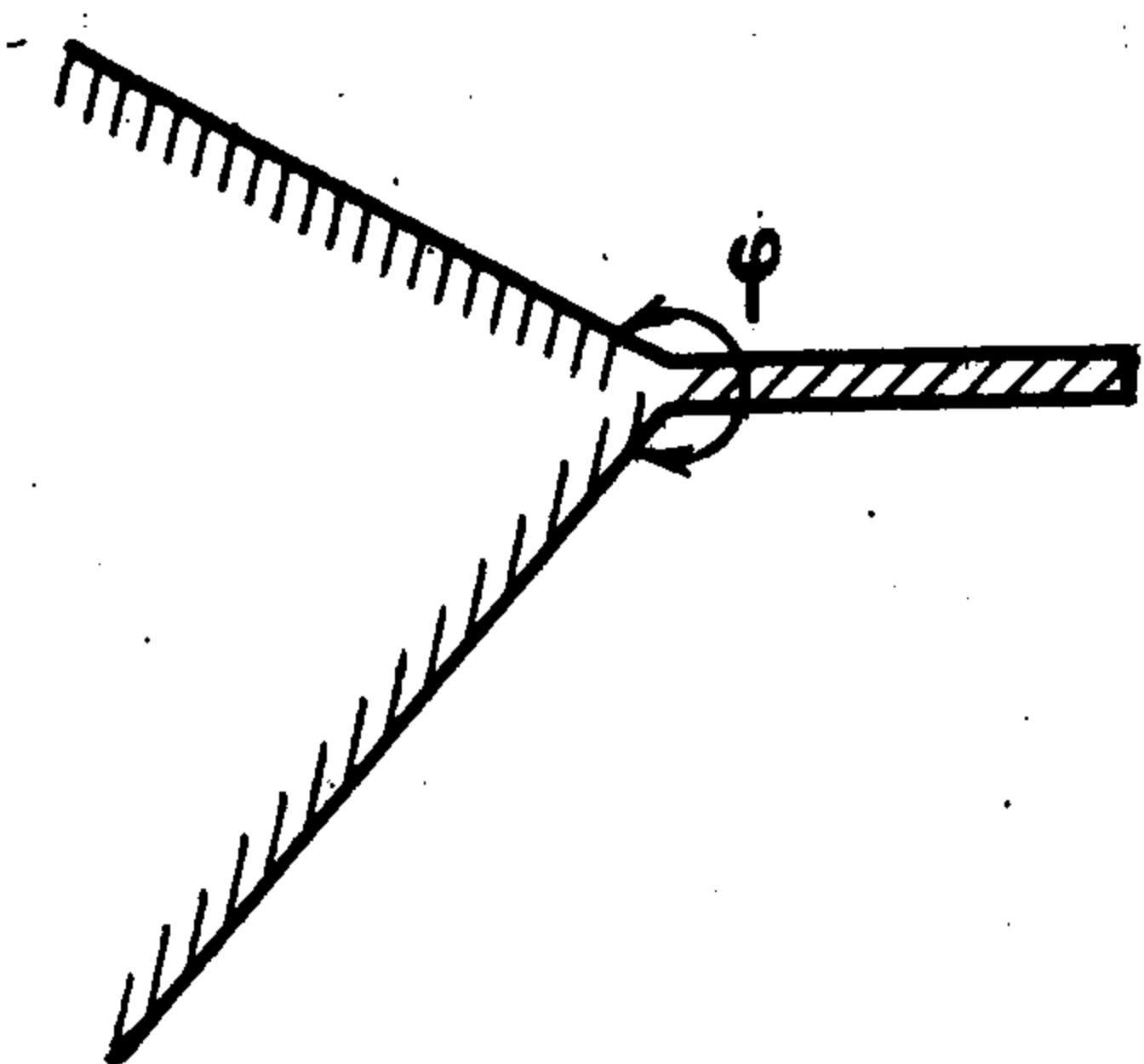
$$(1.6) \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow 0$$

$$\sigma_\theta \rightarrow 0 \quad (0 < \alpha < \pi / 2)$$

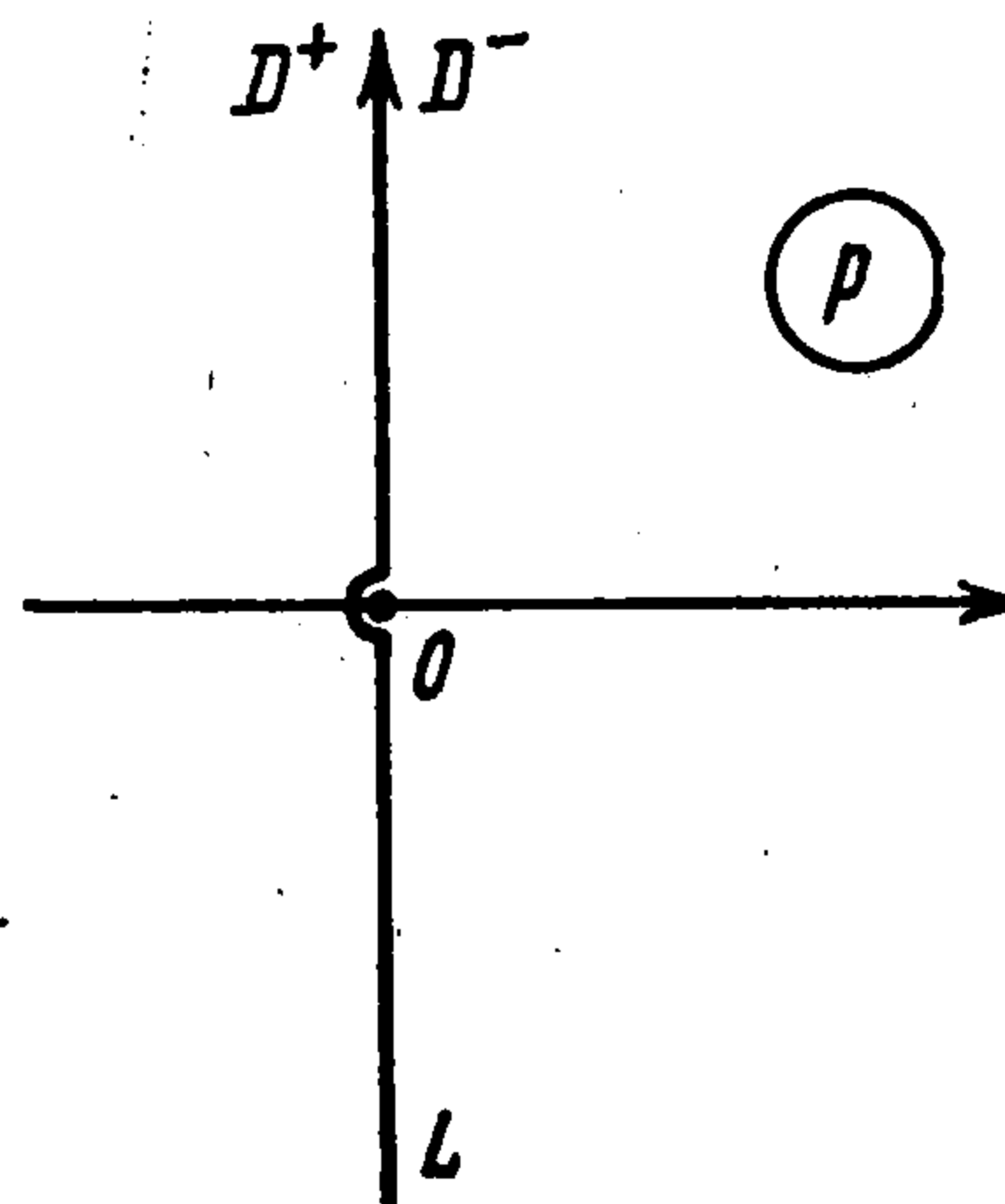
$$\sigma_\theta \sim A / r^{1-\lambda} \quad (\pi / 2 < \alpha \leq \pi)$$

($\lambda = \lambda(\alpha)$ — единственный корень уравнения (1.4) в полосе $0 < \operatorname{Re} p < 1$, A — действительная постоянная.)

Для формулировки условия на бесконечности применим к исходной задаче принцип микроскопа. Пусть $r/l \rightarrow \infty$. Это может реализоваться при $r \rightarrow \infty$, $l = \text{const}$ и при $r = \text{const}$, $l \rightarrow 0$. Предельному переходу $r = \text{const}$, $l \rightarrow 0$ соответствует изображенная ниже сингулярная предельная задача (см. фиг. 2). На фигуре изображены два клина со свободными от нагрузок гранями, вершины которых совмещены в точке нуль. В вер-



Фиг. 3



Фиг. 4

шине верхнего клина действуют сила $(0, Y)$ и момент M , а в вершине нижнего — сила $(0, -Y)$ и момент $-M$. Решение этой задачи является асимптотикой на бесконечности для решения исходной задачи. В частности, имеет место соотношение

$$(1.7) \quad \theta = +0, \quad r \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \sim -\frac{1-\nu^2}{E} \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \frac{Y}{r^2} + \frac{4 \cos \alpha}{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha} \frac{M}{r^3} \right)$$

Таким образом, требуется найти нетривиальное решение однородной задачи (1.1), (1.2) при дополнительных условиях (1.5) — (1.7) в особых точках.

Без ограничения общности расстояние от вершины клина до вершины трещины будем считать равным единице.

Исследованию нетривиальных решений однородных задач теории упругости уделяется незаслуженно мало внимания. Это объясняется распространенным убеждением, что, согласно теореме единственности, существует лишь тривиальное решение подобных задач. Последнее верно для задач класса S (в этом классе задач справедлив принцип Сен-Венана). В задачах класса N (в этом классе задач принцип Сен-Венана не имеет места) существует нетривиальное решение однородных задач [2]. Именно последние задачи, как правило, представляют наибольшую практическую ценность. Когда приходится решать задачи класса N , исследователи обычно ограничиваются построением единственного решения неоднородной задачи и упускают из вида однородные решения.

В качестве иллюстрации рассмотрим известное исследование А. А. Храпкова [3].

В работе А. А. Храпкова рассматривается задача для клина с несимметричной прямолинейной трещиной, выходящей из угла последнего. Угол раствора клина равен φ (фиг. 3). Предполагается, что грани клина свободны, а к берегам трещины приложены произвольные нагрузки. В качестве дополнительного условия на бесконечности предполагается, что напряжения стремятся к нулю. Последнее условие достаточно для существования единственного решения только в задачах класса S , т. е. при $\varphi < \pi$ (см. [2]). В задачах класса N (т. е. при $\varphi > \pi$) корректная постановка задачи должна включать в себя задание определенных коэффициентов, размерность которых зависит от величины

угла φ . В постановке же А. А. Храпкина решение задачи при $\varphi > \pi$ неединственно, так как существует нетривиальное решение однородной задачи (определяемое с точностью до двух произвольных постоянных). При стремлении внешних нагрузок к нулю решение А. А. Храпкина стремится к нулю, что отвечает тривиальному решению однородной задачи.

В работе Б. М. Нуллера [4] рассматривается упругая клиновидная пластинка $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ толщины h , к которой на участке $0 \leq r \leq 1$, $\theta = 0$ прикреплен упругий абсолютно гибкий стержень переменного сечения. К торцу стержня приложена сила T . На свободную часть боковой поверхности стержня при $0 \leq r \leq 1$ действуют касательные усилия $f(r)$.

Если $f(r) \equiv 0$, $T = 0$ и $\alpha > \pi$, то решение Б. М. Нуллера тривиально, тогда как в этом случае существует нетривиальное решение указанной однородной задачи. Это решение определяется с точностью до двух произвольных постоянных.

Последнее замечание относится и к работе Б. М. Нуллера [5]. В работе рассмотрен клин $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 \leq r < \infty$, одна часть границы которого ($\theta = \pm\alpha$, $0 \leq r \leq 1$) находится в условиях скользящей заделки, а другая свободна от напряжений. На клин через жесткую обойму (клиновидный штамп) действует нагрузка, эквивалентная заданной силе.

При $\alpha > \pi/2$ и $P = 0$ (P — заданная продольная сила) существует нетривиальное решение задачи. Решение же Б. М. Нуллера в этом случае тривиально.

Рассматриваемая в настоящей работе однородная задача принадлежит классу S . Ниже строится ее нетривиальное решение.

2. Функциональное уравнение Винера — Хопфа и его решение. Применяя преобразование Меллина

$$m^*(p) = \int_0^{\infty} m(r) r^p dr$$

к уравнениям равновесия и условию совместности деформаций, получаем [1]

$$(2.1) \quad \sigma_{\theta}^*(p, \theta) = A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + \\ + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta$$

$$\tau_{r\theta}^* = (p-1)^{-1} \frac{d\sigma_{\theta}^*}{d\theta}, \quad p\sigma_r^* = (p-1)^{-1} \frac{d^2\sigma_{\theta}^*}{d\theta^2} - \sigma_{\theta}^*$$

($A_i(p)$ — неизвестные функции p ($i = 1, 2, 3, 4$)). При помощи граничных условий (1.1) приходим к системе

$$(2.2) \quad A_1 \sin(p+1)\alpha + A_2 \sin(p-1)\alpha + A_3 \cos(p+1)\alpha + \\ + A_4 \cos(p-1)\alpha = 0 \\ A_1(p+1) \cos(p+1)\alpha + A_2(p-1) \cos(p-1)\alpha - \\ - A_3(p+1) \sin(p+1)\alpha - A_4(p-1) \sin(p-1)\alpha = 0 \\ A_1(p+1) + A_2(p-1) = 0$$

решение которой запишем так:

$$(2.3) \quad A_2 = -(p+1)(p-1)^{-1}A_1, \quad A_3 = -2(p \sin^2 \alpha + \\ + \sin^2 p\alpha) \Delta^{-1}A_1 \\ A_4 = -2(p+1)(p-1)^{-1}(p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha) \Delta^{-1}A_1$$

Согласно (2.1), (2.3)

$$(2.4) \quad \sigma_{\theta}^*(p, 0) = -4(p-1)^{-1}(p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha) \Delta^{-1}A_1$$

При помощи закона Гука, учитывая (2.1), (2.3), находим

$$(2.5) \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} \Big|_{\theta=+\theta} r^{p+1} dr = \frac{4(1-\nu^2)}{E} (p+1)(p-1)^{-1} A_1$$

Исключая A_1 в соотношениях (2.4), (2.5), приходим к функциональному уравнению Винера — Хопфа

$$(2.6) \quad \Phi^{-}(p) = -2(p+1)^{-1}(p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha) \Delta^{-1} \Phi^{+}(p)$$

$$\Phi^{-}(p) = \int_0^1 \sigma_{\theta}(r, 0) r^p dr, \quad \Phi^{+}(p) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_1^{\infty} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} \Big|_{\theta=+\theta} r^{p+1} dr$$

Уравнение (2.6) перепишем так:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \Phi^{-}(p) &= (p+1)^{-1} \operatorname{tg} p\pi G(p) \Phi^{+}(p) \\ G(p) &= -2 \operatorname{ctg} p\pi (p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha) \Delta^{-1} \end{aligned}$$

Положим

$$\lambda_0 = \begin{cases} \lambda, & \pi/2 < \alpha \leq \pi \\ 1, & 0 < \alpha \leq \pi/2 \end{cases}$$

Согласно (1.6) и (1.7), функция $\Phi^{+}(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция $\Phi^{-}(p)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\lambda_0$.

В плоскости комплексной переменной p рассмотрим контур L , состоящий из мнимой оси, за исключением малого симметричного отрезка около начала координат, и левой полуокружности малого радиуса с центром в начале координат (фиг. 4). Направление обхода контура совпадает с направлением мнимой оси. Области слева и справа от контура обозначим через D^{+} и D^{-} .

Функция $G(p)$ не имеет ни нулей, ни полюсов на контуре L и стремится вдоль него к единице при $p \rightarrow \infty$. Следовательно, справедливо представление

$$(2.8) \quad \begin{aligned} G(p) &= \frac{G^{+}(p)}{G^{-}(p)} \quad (p \in L) \\ \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)}{t-p} dt \right] &= \begin{cases} G^{+}(p), & p \in D^{+} \\ G^{-}(p), & p \in D^{-} \end{cases} \end{aligned}$$

Используя представление [6]

$$\operatorname{ctg} p\pi = p^{-1} K^{+}(p) K^{-}(p), \quad K^{\pm}(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}$$

где функции $K^{+}(p)$ и $K^{-}(p)$ аналитичны, не имеют нулей и удовлетворяют условиям

$$(2.9) \quad \begin{aligned} K^{+}(p) &\sim \sqrt{-p} \quad (p \rightarrow \infty), \quad \operatorname{Re} p < 1/2 \\ K^{-}(p) &\sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty), \quad \operatorname{Re} p > -1/2 \end{aligned}$$

и учитывая (2.7), (2.8), получаем

$$(2.10) \quad (p+1) \Phi^{-}(p) K^{-}(p) G^{-}(p) = p [K^{+}(p)]^{-1} G^{+}(p) \Phi^{+}(p) \quad (p \in L)$$

Функция в левой части (2.10) аналитична в области D^{-} , а функция в правой части — в области D^{+} . На основании принципа непрерывного продолжения они равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p .

Найдем эту единую аналитическую функцию. Исходя из соотношений (1.5), находим ($p \rightarrow \infty$)

$$(2.11) \quad \Phi^-(p) \sim (2p)^{-1/2} K_1, \quad \Phi^+(p) \sim (-p/2)^{1/2} K_1$$

На основании (2.8), (2.9), (2.11) из (2.10) следует, что единая аналитическая функция равна $c_0 + c_1 p$ (c_0, c_1 — постоянные, подлежащие определению).

Принимая во внимание вытекающие из (1.3) условия

$$\Phi^-(0) = Y, \quad \Phi^-(1) = M$$

с помощью (2.10) получаем систему для определения c_0 и c_1

$$Y K^-(0) G^-(0) = c_0, \quad 2M K^-(1) G^-(1) = c_0 + c_1$$

Отсюда

$$c_0 = \frac{1}{2} Y \left[\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)} \right]^{1/2}, \quad c_1 = 4M \pi^{-1/2} G^-(1) - c_0$$

Решение функционального уравнения запишется так:

$$(2.12) \quad \Phi^-(p) = \frac{c_0 + c_1 p}{(p+1) K^-(p) G^-(p)}, \quad \Phi^+(p) = \frac{K^+(p)(c_0 + c_1 p)}{p G^+(p)}$$

3. Анализ решения. Вычислим коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины. Из первой формулы (2.12) при $p \rightarrow \infty$ находим

$$(3.1) \quad \Phi^-(p) \sim c_1 p^{-1/2}$$

Приравнивая асимптотики функции $\Phi^-(p)$ в (2.11) и (3.1) и переходя к размерным переменным, получаем

$$K_1 = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} G^-(1) M l^{-1/2} - \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right)^{1/2} Y l^{-1/2}$$

Изучим поведение напряжения σ_θ при $\theta = 0, r \rightarrow 0$.

Используя вторую формулу (2.12), (2.6), лемму, формулу обращения Меллина и теорему о вычетах, приходим к соотношениям

$$\sigma_\theta(r, \theta) \rightarrow 0 \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

$$\sigma_\theta(r, 0) \sim \frac{2(\sin^2 \lambda \alpha - \lambda^2 \sin^2 \alpha)}{2\alpha \cos 2\lambda \alpha + \sin 2\alpha} \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1/2+\lambda)} \frac{c_0 - \lambda c_1}{G^+(-\lambda) \lambda (\lambda - 1)} r^{\lambda-1} \quad (\pi/2 < \alpha \leq \pi)$$

В результате исследования поведения напряжений при $0 < \theta < \alpha, r \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \theta) &\sim \frac{(1 - \cos 2\alpha) \cos \theta - (2\alpha + \sin 2\alpha) \sin \theta}{\sin^2 \alpha - \alpha^2} \frac{Y}{r} + \\ &+ \frac{2 \sin(\alpha - 2\theta)}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \frac{M}{r^2} \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &\sim \frac{2 \sin \theta \sin(\alpha - \theta)}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \frac{M}{r^2}, \quad \sigma_\theta(r, \theta) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

Эти формулы, как и следовало ожидать, совпадают с известным решением соответствующей канонической сингулярной задачи.

Предельные случаи $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = \pi$ рассмотренной задачи были изучены ранее другими авторами [7-9].

Автор благодарит Г. П. Черепанова за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Поступила 26 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
3. Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
4. Нуллер Б. М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
5. Нуллер Б. М. Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
6. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Benthem J. P., Koiter W. T. Asymptotic approximations to crack problems. In: Mechanics of Fracture, vol. 1. Leyden, Noordhoff Internat. Publ., 1973, p. 140—143.
8. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
9. Парис П., Си Дж. Анализ напряженного состояния около трещин. В сб.: Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.