Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.374

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ

Г. А. Домбровский

(Харьков)

Рассматривается задача о распространении волны разгрузки в цилиндрическом полубесконечном упругопластическом стержне [1] и изучаются асимптотические свойства решений этой задачи при больших значениях времени и на больших расстояниях от конца стержня. Предполагается, что кривая, изображающая связь между напряжением и деформацией при нагрузке, имеет начальный линейный участок, нелинейная часть этой кривой обращена выпуклостью к оси напряжения. Разгрузка происходит по прямым, параллельным начальному линейному участку кривой нагрузки. По условию рассматриваемой задачи нормальное напряжение на конце стержня в течение некоторого времени или мгновенно растет от нуля до максимального значения, превышающего предел пропорциональности σ_s, а затем монотонно убывает конечное или бесконечное время до некоторого значения $p_e \geqslant 0$. Рассматриваются случаи $p_e > \sigma_s$, $p_e = \sigma_s$ и $p_e < \sigma_s$.

1. Пусть t — время, h — координата Лагранжа, представляющая собой расстояние поперечного сечения стержня от нормального к боковой поверхности стержня основания в начальный момент времени $t = 0$, u — скорость, σ — напряжение (техническое), ε — деформация, ρ_0 — начальная плотность материала стержня.

Зависимость $\sigma(\varepsilon)$, согласно которой осуществляется нагрузка, линейная в интервале $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$ и нелинейная при $\varepsilon > \varepsilon_s$. При $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s$ имеем $\sigma'(\varepsilon) = E$ ($E = \text{const}$ — модуль упругости), при $\varepsilon > \varepsilon_s$ функция $\sigma(\varepsilon)$ обладает свойствами $0 < \sigma'(\varepsilon) < E$, $-\infty < \sigma''(\varepsilon) < 0$. В точке $\varepsilon = \varepsilon_s$ левая и правая производные функции $\sigma(\varepsilon)$ равны между собой, если порядок производных $n - 1$ и ниже, и отличаются одна от другой, если порядок производных n, $n \geqslant 2$, $-\infty < \sigma^{(n)}(\varepsilon_s + 0) < 0$. Разгрузка происходит по линейному закону $\sigma - \sigma_* = E(\varepsilon - \varepsilon_*)$, где $\sigma_* = \sigma_*(h)$, $\varepsilon_* = \varepsilon_*(h)$ — максимальные для элемента, отмеченного координатой h, напряжение и деформация.

Нормальное напряжение на конце стержня $h = 0$ изменяется по известному закону $\sigma = p(t)$. Функция $p(t)$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau$ монотонно растет от нуля до максимального значения $\sigma_m > \sigma_s$ ($\sigma_s = E\varepsilon_s$), а затем монотонно убывает, причем либо стремится к некоторому значению $p_e \geqslant 0$ при $t \to \infty$, либо становится равной $p_e \geqslant 0$ при некотором конечном значении аргумента, после чего $p(t) \equiv p_e$. Нормальное напряжение на конце стержня может возрастать от нуля до σ_m и мгновенно ($\tau = 0$).

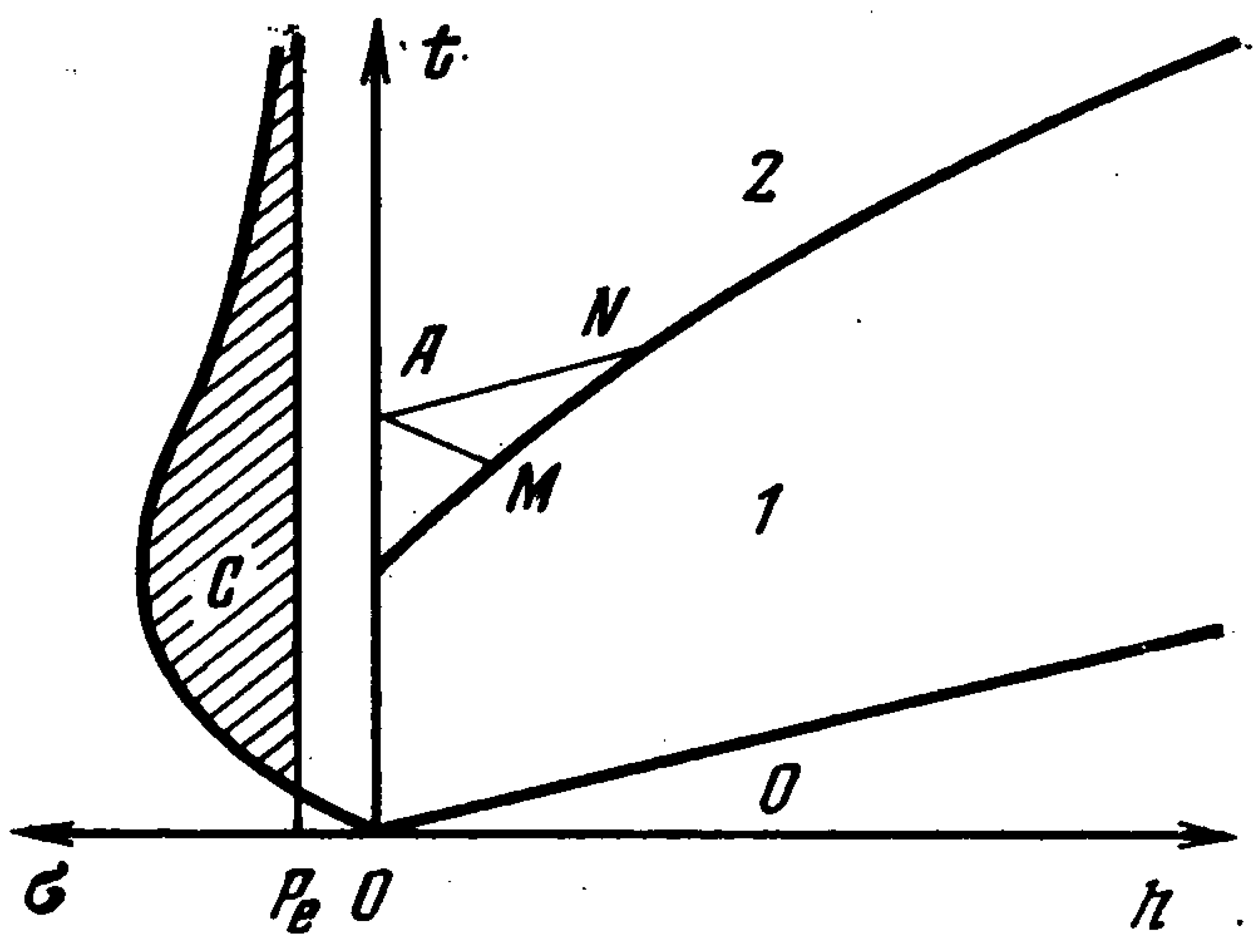
В плоскости ht имеем область покоя O, область нагрузки 1 и область разгрузки 2 (фигура). Границей между областью покоя и областью нагрузки является прямая $h = g_0 t$ ($g_0 = \sqrt{E/\rho_0}$), границей между областью нагрузки и областью разгрузки служит выходящая из точки с координатами $h = 0$, $t = \tau$ линия разгрузки $h = \varphi(t)$.

Решением в области нагрузки является простая волна

$$(1.1) \qquad h = g[t - F(\sigma)], \quad u = -\frac{1}{\rho_0}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{g}, \quad g = \sqrt{\frac{\sigma'(\varepsilon)}{\rho_0}}$$

где $F(\sigma)$ — функция, обратная в интервале $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_m$ для функции $p(t)$, рассматриваемой в интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Если $\tau = 0$, то $F \equiv 0$. В области разгрузки имеем

$$(1.2) \qquad -u = f_1(\alpha) + f_2(\beta)$$
$$\sigma / \rho_0 g_0 = f_1(\alpha) - f_2(\beta)$$



где $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$ — функции характеристических переменных $\alpha = g_0 t - h$, $\beta = g_0 t + h$.

На линии разгрузки α, g и другие величины можно рассматривать как функции переменной t. Будем обозначать эти зависимости $\alpha^*(t)$, $g^*(t)$ и т. д. или для сокращения записи просто α^*, g^*, ...

Пользуясь известными [2] неравенствами $\varphi'(t) \geqslant g^*(t)$, $\varphi'(t) \leqslant g_0$, приходим к выводу, что $\varphi(t)$, $\beta^*(t)$ и $\alpha^*(t)$ — монотонно возрастающие функции, причем $\varphi(t)$ и $\beta^*(t)$ — строго монотонно возрастающие функции. При $t \to \infty$ имеем $\varphi(t) \to \infty$ и $\beta^*(t) \to \infty$. Поскольку $\beta^*(t)$ — строго монотонная функция, то существует обратная ей строго монотонная функция $t = \chi(\beta)$.

Дифференцируя по переменной t равенство

$$(1.3) \qquad \varphi(t) = g^*[t - F(\sigma^*)]$$

и привлекая затем неравенство $\varphi'(t) \geqslant g^*(t)$, убеждаемся, что $d\sigma^* / dt \leqslant 0$, $d\varepsilon^* / dt \leqslant 0$, $dg^* / dt \geqslant 0$. Функции $\sigma^*(t)$ и $\varepsilon^*(t)$, следовательно, монотонно убывающие, функция $g^*(t)$ — монотонно возрастающая. Пределы функций $\sigma^*(t)$, $\varepsilon^*(t)$ и $g^*(t)$ при $t \to \infty$ обозначим соответственно σ_e, ε_e, g_e. В работах [3, 4] показано, что для любого t из интервала $\tau \leqslant t < \infty$ выполняется неравенство $\sigma^*(t) > \sigma_s$. Поэтому $\sigma_e \geqslant \sigma_s$. Если $\sigma_e = \sigma_s$, то $\sigma^*(t) > \sigma_e$ при любом t из интервала $\tau \leqslant t < \infty$. В п. 2 будет показано, что таким свойством обладает функция $\sigma^*(t)$ и при $\sigma_e > \sigma_s$.

Введем функции

$$\psi(\beta) = \sigma^*[\chi(\beta)], \quad \Lambda(\beta) = \psi(\beta) - \sigma_e$$

Ясно, что $\psi(\beta^*) \equiv \sigma^*(t)$, $\Lambda(\beta^*) \equiv \sigma^*(t) - \sigma_e$. При $\beta \to \infty$ имеем $\psi(\beta) \to \sigma_e$, $\Lambda(\beta) \to 0$.

Из условия непрерывности на линии разгрузки напряжения и скорости получаем

$$f_1(\alpha^*) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} \int_0^{\sigma^*} \frac{g_0+g}{g} d\sigma, \quad f_2(\beta^*) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} \int_0^{\sigma^*} \frac{g_0-g}{g} d\sigma$$

Можно, следовательно, записать

(1.4) $$f_1(\alpha^*) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} \left[\int_0^{\sigma_e} \frac{g_0+g}{g} d\sigma + \frac{g_0+g_e}{g_e} \Lambda(\beta^*) + o(\Lambda(\beta^*)) \right], \quad t \to \infty$$

(1.5) $$f_2(\beta^*) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} \left[\int_0^{\sigma_e} \frac{g_0-g}{g} d\sigma + \frac{g_0-g_e}{g_e} \Lambda(\beta^*) + o(\Lambda(\beta^*)) \right], \quad t \to \infty$$

Из последней формулы следует представление, которым будем пользоваться при $\sigma_e > \sigma_s$

(1.6) $$f_2(\beta) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} \left[\int_0^{\sigma_e} \frac{g_0-g}{g} d\sigma + \frac{g_0-g_e}{g_e} \Lambda(\beta) + \theta_1(\beta)\Lambda(\beta) \right]$$

$$\theta_1(\beta) \to 0, \quad \text{при} \quad \beta \to \infty$$

В случае, когда $\sigma_e = \sigma_s$, аналогичным образом получаем представление

(1.7) $$f_2(\beta) = \frac{1}{2\rho_0 g_0} [k_n \Lambda^n(\beta) + \theta_n(\beta)\Lambda^n(\beta)]$$

$$\theta_n(\beta) \to 0 \text{ при } \beta \to \infty, \quad k_n = -\frac{g^{(n-1)}(\sigma_s+0)}{n!\, g_0} =$$

$$= -\frac{\sigma^{(n)}(\varepsilon_s+0)}{n!\, 2\rho_0{}^n g_0{}^{2n}}, \quad k_n > 0$$

2. Основные результаты данного исследования вытекают из уравнения количества движения, записанного в интегральной форме

(2.1) $$\int_0^t p(t)\,dt = I_1(t) + I_2(t)$$

$$I_1(t) = -\rho_0 \int_{\varphi(t)}^{g_0 t} u\,dh, \quad I_2(t) = -\rho_0 \int_0^{\varphi(t)} u\,dh$$

Проведем преобразования входящих в правую часть этого уравнения членов $I_1(t)$ и $I_2(t)$.

Рассмотрим первый член. В результате интегрирования по частям и последующего применения формул (1.1) и (1.3) получаем

$$I_1(t) = \sigma_e t - \varphi(t) \int_0^{\sigma_e} \frac{d\sigma}{g} - \int_0^{\sigma^*} F(\sigma)\,d\sigma + S_1(t) + S_2(t)$$

$$S_1(t) = t\left[(\sigma^* - \sigma_e) - g^* \int_{\sigma_e}^{\sigma^*} \frac{d\sigma}{g}\right], \quad S_2(t) = g^* F(\sigma^*) \int_{\sigma_e}^{\sigma^*} \frac{d\sigma}{g}$$

причем

(2.2) $$S_1(t) \sim (n-1)\,k_n t \Lambda^n(\beta^*), \quad S_2(t) \sim F(\sigma_s)\,\Lambda(\beta^*), \quad t \to \infty$$
$$(\sigma_e = \sigma_s)$$

(2.3) $$S_1(t) \sim l_2 t \Lambda^2(\beta^*), \quad S_2(t) \sim F(\sigma_e)\Lambda(\beta^*), \quad t \to \infty$$
$$l_2 = -\frac{g'(\sigma_e)}{2g_e} = -\frac{\sigma''(\varepsilon_e)}{4\rho_0^2 g_e^4} \cdot (\sigma_e > \sigma_s)$$

Обратимся ко второму члену. Подынтегральную функцию на основании формул (1.2) и граничного условия на конце стержня представим следующим образом:

$$u = -\frac{1}{\rho_0 g_0}\,p\left(\frac{\alpha}{g_0}\right) - f_2(\alpha) - f_2(\beta)$$

После преобразований получаем

$$I_2(t) = \rho_0 \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} f_2(\beta)\,d\beta + \int\limits_{\alpha^*/g_0}^{t} p(t)\,dt$$

Введем функцию

$$\omega(t) = \int\limits_0^t (p - p_e)\,dt + \int\limits_0^{p_e} F(\sigma)\,d\sigma$$

для которой очевидна оценка $\omega(t) = o(t)$, $t \to \infty$.

Применяя эту функцию и учитывая полученные выражения для $I_1(t)$ и $I_2(t)$, представим уравнение (2.1) в виде

(2.4) $$\omega\left(\frac{\alpha^*}{g_0}\right) = (\sigma_e - p_e)\frac{\alpha^*}{g_0} + \varphi(t)\int\limits_{\sigma_s}^{\sigma_e}\left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g}\right)d\sigma +$$
$$+ \rho_0 \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} f_2(\beta)\,d\beta + S_1(t) + S_2(t) + \Delta, \quad \Delta = -\int\limits_{p_e}^{\sigma^*} F(\sigma)\,d\sigma$$

Если далее воспользоваться представлением (1.6), то будем иметь уравнение

$$\omega(\alpha^*/g_0) = (\sigma_e - p_e)\,\alpha^*/g_0 + R_1(t) + R_2(t) + S_1(t) + S_2(t) + \Delta$$
$$R_1(t) = \frac{g_0 - g_e}{2g_0 g_e}\int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} \Lambda(\beta)\,d\beta, \quad R_2(t) = \frac{1}{2g_0}\int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} \theta_1(\beta)\,\Lambda(\beta)\,d\beta$$

Функция $\Lambda(\beta)$ при $g_0\tau \leqslant \beta < \infty$ положительная и монотонно убывающая. Поэтому может быть записано неравенство

$$\int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} \Lambda(\beta)\,d\beta \geqslant 2\Lambda(\beta^*)\,\varphi(t)$$

благодаря которому имеем оценки $S_1(t) = o(R_1(t))$, $S_2(t) = o(R_1(t))$, $t \to \infty$. Учитывая эти оценки, получаем для случая $\sigma_e > \sigma_s$ уравнение

(2.5) $$\omega(\alpha^*/g_0) = (\sigma_e - p_e)\,\alpha^*/g_0 + [1 + r(t)]\,R_1(t) + R_2(t) + \Delta$$
$$r(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Здесь уместно убедиться, применяя уравнение количества движения в интегральной форме, что не только при $\sigma_e = \sigma_s$, но и при $\sigma_e > \sigma_s$ функция $\sigma^*(t)$ обладает следующим указанным в п. 1 свойством: для любого t из интервала $\tau \leqslant t < \infty$ выполняется строгое неравенство $\sigma^*(t) > \sigma_e$.

Допустим, что при некотором конечном значении времени t_1 достигается равенство $\sigma^*(t_1) = \sigma_e$. Так как функция $\sigma^*(t)$ монотонная, то $\sigma^*(t) \equiv \sigma_e$ при $t \geqslant t_1$. Но тогда можно указать такое $t_2 > t_1$, что при $t \geqslant t_2$ в области разгрузки $\sigma(h, t) \equiv \sigma_e$, $\varepsilon(h, t) \equiv \varepsilon_e$, $g(h, t) \equiv g_e$. Без труда затем приводим уравнение количества движения (2.1) при любом $t \geqslant t_2$ к условию $\omega(t) = 0$, которое может выполняться только в тривиальном случае $p_e = \sigma_m$.

Если $\sigma_e = \sigma_s$, то, пользуясь представлением (1.7), приводим уравнение (2.4) к виду

$$\begin{gathered}\omega(\alpha^* / g_0) = (\sigma_s - p_e)\alpha^* / g_0 + Q_1(t) + Q_2(t) + S_1(t) + \\ + S_2(t) + \Delta \\ Q_1(t) = \frac{k_n}{2g_0}\int_{\alpha^*}^{\beta^*} \Lambda^n(\beta)\,d\beta, \quad Q_2(t) = \frac{1}{2g_0}\int_{\alpha^*}^{\beta^*} \theta_n(\beta)\Lambda^n(\beta)\,d\beta\end{gathered} \tag{2.6}$$

Дальше отдельно рассматриваются случаи $p_e > \sigma_s$, $p_e = \sigma_s$ и $p_e < \sigma_s$.

3. *Случай* $p_e > \sigma_s$. Покажем вначале, что в этом случае имеет место строгое неравенство $\sigma_e > \sigma_s$. Для этого обратимся к очевидному соотношению

$$[\sigma^*(t_M) - \sigma^*(t_N)] - \int_{\sigma^*(t_N)}^{\sigma^*(t_M)} \frac{g_0}{g}\,d\sigma = 2\,[p(t_A) - \sigma^*(t_N)] \tag{3.1}$$

где t_N, t_M и t_A — ординаты точек пересечения с линией разгрузки и осью t прямых $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, отрезки AN и AM которых изображены на фигуре. Левая часть соотношения (3.1) неположительна, так как $\sigma^*(t_M) \geqslant \sigma^*(t_N)$ и при $\tau \leqslant t < \infty$ имеем $g^*(t) < g_0$. Поскольку $p(t_A) \geqslant p_e$ и $p_e = \sigma_s + \delta$ $(\delta > 0)$, то должно выполняться неравенство $\sigma^*(t_N) \geqslant \sigma_s + \delta$. При $t_N \to \infty$ имеем $\sigma^*(t_N) \to \sigma_e$. Учитывая последнее неравенство, приходим к неравенству $\sigma_e \geqslant \sigma_s + \delta$, а отсюда к строгому неравенству $\sigma_e > \sigma_s$, что и требовалось показать.

Так как $g_e \neq g_0$, то можно записать асимптотическое равенство $\alpha^*(t) \sim (g_0 - g_e)\,t$, $t \to \infty$, и затем получить оценку $R_2(t) = o(R_1(t))$, $t \to \infty$. Уравнение (2.5) можно привести к виду

$$\begin{gathered}\omega(\alpha^* / g_0) = (\sigma_e - p_e)\alpha^* / g_0 + [1 + r_1(t)]\,R_1(t) + \Delta \\ r_1(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty\end{gathered}$$

Если разделить левую и правую части этого уравнения на t и устремить затем t к бесконечности, то придем к важному равенству $\sigma_e = p_e$.

Введем в выражение, определяющее $R_1(t)$, функцию

$$\lambda(\beta) = \beta\Lambda(\beta) \tag{3.2}$$

и применим интегральную теорему о среднем. Приняв, кроме того, во внимание равенство $\sigma_e = p_e$, получаем

(3.3) $$\omega\left(\frac{\alpha^*}{g_0}\right) = \frac{g_0 - g_e}{2g_0g_e}\lambda(\zeta)\,[1 + r_1(t)]\ln\frac{\beta^*}{\alpha^*} + \Delta, \quad \alpha^* \leqslant \zeta \leqslant \beta^*$$

$$\Delta \to 0, \; r_1(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Пусть

(3.4) $$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = C, \quad C < \infty$$

Тогда из уравнения (3.3) следует, что

(3.5) $$\lim_{\zeta\to\infty}\lambda(\zeta) = D, \quad D = \frac{2g_0g_eC}{(g_0 - g_e)\ln[(g_0 + g_e)/(g_0 - g_e)]}$$

Этот результат позволяет прийти к заключению, что линия разгрузки при $p_e > \sigma_s$ и выполнении условия (3.4) имеет наклонную асимптоту

(3.6) $$h = g_et - b, \quad b = g_eF(p_e) + 2l_2g_eD\,/\,(g_0 + g_e)$$

Величина C представляет собой площадь области, ограниченной отрезками линий $\sigma = p(t)$ и $\sigma = p_e$ и расположенной справа от точки пересечения этих линий (фигура). Если $C = \infty$, то асимптота отсутствует.

На основании формул (1.4), (1.6), (3.2), асимптотического равенства $(g_0 - g_e)\,\beta^* \sim (g_0 + g_e)\,\alpha^*$, $t \to \infty$ и результата (3.5) имеем

$$f_1(\alpha) \sim \frac{1}{2\rho_0g_0}\int_0^{p_e}\frac{g_0 + g}{g}d\sigma + \frac{D}{2\rho_0}\left(\frac{1}{g_e} - \frac{1}{g_0}\right)\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \to \infty$$

$$f_2(\beta) \sim \frac{1}{2\rho_0g_0}\int_0^{p_e}\frac{g_0 - g}{g}d\sigma + \frac{D}{2\rho_0}\left(\frac{1}{g_e} - \frac{1}{g_0}\right)\frac{1}{\beta}, \quad \beta \to \infty$$

Скорость конца стержня, согласно первой из формул (1.2) и только что полученным формулам для $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$, изменяется по асимптотическому закону

$$u(0, t) \sim -\frac{1}{\rho_0}\int_0^{p_e}\frac{d\sigma}{g} - \frac{D}{\rho_0g_0}\left(\frac{1}{g_e} - \frac{1}{g_0}\right)\frac{1}{t}, \quad t \to \infty$$

Пользуясь формулой (3.2), асимптотическим равенством $g_e\beta^*(t) \sim (g_0 + g_e)\,\varphi(t)$, $t \to \infty$ и результатом (3.5), получаем

$$\sigma_*(h) \sim p_e + \frac{g_eD}{g_0 + g_e}\frac{1}{h}, \quad h \to \infty$$

Следует отметить, что приведенные формулы справедливы и при $\sigma_s = 0$, т. е. когда кривая, изображающая закон нагрузки $\sigma(\varepsilon)$, не имеет начального линейного участка, причем угол наклона к оси деформации параллельных прямых, согласно которым осуществляется разгрузка, может и отличаться от угла наклона к этой же оси кривой $\sigma(\varepsilon)$ в начале координат. Если равенство указанных углов соблюдается, то полученные асимптотические формулы справедливы только при $p_e > 0$, если такое равенство не соблюдается и первый угол больше второго, то напряжение на конце стержня может убывать и до нуля. Например, полагая $p_e = 0$ и устремляя g_0 к бесконечности, приходим к асимптотике решения подробно рассмотренной в работе [5] задачи о волне разгрузки, по условию которой связь между напряжением и деформацией при нагрузке нелинейная, а разгрузка каждого элемента стержня происходит при неизменной деформации.

4. *Случай* $p_e = \sigma_s$. Нетрудно прежде всего убедиться, проводя доказательство от противного, что в этом случае $\sigma_e = \sigma_s$.

Покажем далее, что в рассматриваемом случае $\alpha^*(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Для этого обратимся к фигуре и устремим точку N по линии разгрузки в бесконечность. Если допустить, что $\lim \alpha^*(t_N) < \infty$ при $t_N \to \infty$, то, согласно равенству $\alpha^*(t_N) = \beta^*(t_M)$, будем при $t_N \to \infty$ иметь $\lim t_M < < \infty$. Но тогда из (3.1) следует неравенство $\lim p(t_A) < \sigma_s$, которое противоречит принятому условию $p_e = \sigma_s$. Следовательно, должна осуществляться вторая возможность: $\alpha^*(t_N) \to \infty$ при $t_N \to \infty$.

Этот результат позволяет прийти к выводу, что линия разгрузки не имеет асимптоты, записать асимптотическое равенство

$$(g_0 - g^*)t \sim \alpha^*, \quad t \to \infty \tag{4.1}$$

и получить оценку $Q_2(t) = o(Q_1(t))$, $t \to \infty$.

Из асимптотического равенства (4.1) очевидным образом следует асимптотическое равенство

$$nk_n g_0 t \Lambda^{n-1}(\beta^*) \sim \alpha^*, \quad t \to \infty \tag{4.2}$$

пользуясь которым, получаем оценку $S_2(t) = o(S_1(t))$, $t \to \infty$.

Учитывая полученные оценки и принимая во внимание равенство $p_e = \sigma_s$, приводим уравнение (2.6) к виду

$$\omega(\alpha^* / g_0) = [1 + q_1(t)]\, Q_1(t) + [1 + s_1(t)]\, S_1(t) + \Delta \tag{4.3}$$

$$\Delta \to 0, \quad q_1(t) \to 0, \quad s_1(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Psi(\beta) = \beta \Lambda^n(\beta) \ln(\beta / L) \tag{4.4}$$

где L — постоянная, имеющая размерность длины.

Если воспользоваться этой функцией и применить интегральную теорему о среднем, то можно записать

$$Q_1(t) = \frac{k_n}{2g_0} \Psi(\zeta) \ln \mu(t), \quad \mu(t) = \frac{\ln(\beta^*/L)}{\ln(\alpha^*/L)}, \quad \alpha^* \leqslant \zeta \leqslant \beta^* \tag{4.5}$$

На основании (4.4), (4.2), асимптотического равенства $\beta^* \sim 2g_0 t$, $t \to \infty$ и вытекающего из (2.2) и (4.4) соотношения

$$S_1(t) \sim \frac{(n-1)k_n}{2g_0} \frac{\Psi(\beta^*)}{\ln(\beta^*/L)}, \quad t \to \infty \tag{4.6}$$

имеем выражение

$$\frac{1}{\mu(t)} = \frac{1}{n} + \frac{2g_0}{nk_n} S_1(t)\,[1 + o(1)]\, \frac{\ln[\Psi(\beta^*)/\rho_0{}^n g_0^{2n} L]}{\Psi(\beta^*)} + o(1) \tag{4.7}$$

$$t \to \infty$$

полезное для исследования входящей в (4.5) функции $\mu(t)$.

Последующий анализ будет проводиться при условии (3.4). Приступим к определению при этом условии предела функции $\Psi(\beta)$ при $\beta \to \infty$, предполагая его существование.

Допустим, что $\Psi(\beta) \to \infty$ при $\beta \to \infty$. Так как условие (3.4) требует, чтобы неотрицательные функции $Q_1(t)$ и $S_1(t)$ были при $t \to \infty$ ограниченными, то из (4.5) получаем $\mu(t) \to 1$ при $t \to \infty$, а из (4.7) — другой результат: $\mu(t) \to n$ при $t \to \infty$, что говорит об ошибочности принятого предположения относительно поведения функции $\Psi(\beta)$ в бесконечности.

Пусть $\Psi(\beta) \to 0$ при $\beta \to \infty$. Тогда из (4.6), (4.3) и (4.5) следует, что $S_1(t) \to 0$, $Q_1(t) \to C$, $\mu(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. С другой стороны, на основании асимптотического равенства (4.2) и тождества $(\alpha^* / \beta^*) \equiv$ $\equiv (\beta^* / L)^{\nu(t)}$, $\nu(t) = \mu^{-1}(t) - 1$ может быть установлена общая формула

$$\Lambda^n(\beta^*) \sim \left(\frac{2}{nk_n}\right)^{n/(n-1)} \left(\frac{\beta^*}{L}\right)^{n\nu(t)/(n-1)}, \quad t \to \infty$$

Так как, согласно принятому предположению, функция $\mu(t)$ при $t \to \infty$ неограниченно возрастает, то, пользуясь этой формулой, можно получить для достаточно больших t оценку $[\Lambda(\beta^*) / \rho_0 g_0^2]^n < (\beta^* / L)^{-(1+\varkappa)}$, где $\varkappa$ — удовлетворяющая условию $\varkappa < 1 / (n-1)$ положительная постоянная. Следовательно, для достаточно больших β будем иметь оценку $[\Lambda(\beta) / \rho_0 g_0^2]^n < (\beta / L)^{-(1+\varkappa)}$. Однако если эта оценка справедлива, то при $t \to \infty$ будем иметь $Q_1(t) \to 0$, что противоречит полученному выше выводу о поведении функции $Q_1(t)$ в бесконечности.

Итак, пределом функции $\Psi(\beta)$, когда $\beta \to \infty$, может быть только отличная от нуля конечная величина. При наличии этого предела выполняются следующие предельные переходы: $\lim S_1(t) = 0$, $\lim Q_1(t) = C$, $\lim \mu(t) = n$ при $t \to \infty$. Пользуясь соотношением (4.5), получаем

$$\lim_{\zeta \to \infty} \Psi(\zeta) = \frac{2g_0 C}{k_n \ln n}$$

Теперь можно без труда записать ряд искомых асимптотических формул

$$f_1(\alpha) \sim \frac{\sigma_s}{\rho_0 g_0} + \frac{C}{\rho_0 \ln n} \frac{1}{\alpha \ln(\alpha/L)}, \quad \alpha \to \infty$$

$$f_2(\beta) \sim \frac{C}{\rho_0 \ln n} \frac{1}{\beta \ln(\beta/L)}, \quad \beta \to \infty$$

$$\varphi(t) \sim g_0 t - nk_n g_0 \left(\frac{C}{k_n \ln n}\right)^{(n-1)/n} \left\{\frac{t}{[\ln(g_0 t/L)]^{n-1}}\right\}^{1/n}, \quad t \to \infty$$

$$u(0,t) \sim -\frac{\sigma_s}{\rho_0 g_0} - \frac{2C}{\rho_0 g_0 \ln n} \frac{1}{t \ln(g_0 t/L)}, \quad t \to \infty$$

$$\sigma_*(h) \sim \sigma_s + \left[\frac{g_0 C}{k_n \ln n} \frac{1}{h \ln(h/L)}\right]^{1/n}, \quad h \to \infty$$

Полагая $n = 2$, $\sigma_s = 0$, приходим к известным из работы [6] формулам.

5. *Случай* $p_e < \sigma_s$. Как и в предыдущем случае, $\sigma_e = \sigma_s$. Однако в отличие от предыдущего случая линия разгрузки имеет, причем всегда, асимптоту $h = g_0 t - b$. Если допустить противное, то при $t_N \to \infty$ (см. фигуру) $\alpha^*(t_N) \to \infty$, а следовательно, и $t_A \to \infty$ и $t_M \to \infty$. Но тогда приходим к следующему противоречивому результату: при $t_N \to \infty$ левая часть равенства (3.1) стремится к нулю, а правая — к отличному от нуля пределу. Наличие асимптоты при $p_e = 0$ было обнаружено, как известно, в работе [3]. На факт существования асимптоты при условии $p_e <$ $< \sigma_s$ обращено внимание в работе [7].

Поскольку в рассматриваемом случае

$$g_0 - g^* \sim 2g_0 B / \beta^*, \quad B = b - g_0 F(\sigma_s), \quad t \to \infty$$

то, пользуясь формулой (1.7), получаем асимптотическое представление

$$f_2(\beta) \sim \left[\frac{k_n}{2\rho_0 g_0}\left(\frac{2B}{nk_n}\right)^{n/(n-1)}\right]\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n/(n-1)}, \quad \beta \to \infty$$

Представление, установленное в работе [4] при $n = 2$ и $p_e = 0$, вытекает отсюда в качестве частного случая.

Очевидно, что для любого $p_e < \sigma_s$ имеют место также следующие асимптотические формулы:

$$f_1(\alpha) - \frac{1}{\rho_0 g_0} p\left(\frac{\alpha}{g_0}\right) \sim \left[\frac{k_n}{2\rho_0 g_0}\left(\frac{2B}{nk_n}\right)^{n/(n-1)}\right]\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n/(n-1)}, \quad \alpha \to \infty$$

$$u(0, t) + \frac{1}{\rho_0 g_0} p(t) \sim -\left[\frac{k_n}{\rho_0 g_0}\left(\frac{2B}{nk_n g_0}\right)^{n/(n-1)}\right]\left(\frac{1}{t}\right)^{n/(n-1)}, \quad t \to \infty$$

$$\sigma_*(h) \sim \sigma_s + \left(\frac{B}{nk_n}\frac{1}{h}\right)^{1/(n-1)}, \quad h \to \infty$$

Определить величину b в результате асимптотического исследования не представляется возможным, однако можно указать полезное для оценки величины b неравенство. Для этого перейдем в уравнении (2.4) к пределу при $t \to \infty$, предварительно положив $\sigma_e = \sigma_s$. Так как при $t \to \infty$ имеем $S_1(t) \to 0$, $S_2(t) \to 0, \alpha^*(t) \to b$, $\beta^*(t) \to \infty$, то в пределе получим уравнение

$$\omega\left(\frac{b}{g_0}\right) = (\sigma_s - p_e)\frac{b}{g_0} + \int_b^\infty f_2(\beta)\, d\beta - \int_{p_e}^{\sigma_s} F(\sigma)\, d\sigma$$

Учитывая, что при $g_0\tau \leqslant \beta < \infty$ функция $f_2(\beta)$ принимает положительные значения, а $b > g_0\tau$, приходим к искомому неравенству

$$\omega\left(\frac{b}{g_0}\right) + \int_{p_e}^{\sigma_s} F(\sigma)\, d\sigma > (\sigma_s - p_e)\frac{b}{g_0}$$

Поступила 1 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. 9, вып. 1
2. *Lee E. H.* A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation Quart. Appl. Math., 1953, vol. 10, No. 4. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1954 вып. 1.)
3. *Скобеев А. М.* К теории волны разгрузки. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
4. *Домбровский Г. А., Турченко В. Я.* О волне разгрузки. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 5.
5. *Зволинский Н. В., Шхинек К. Н.* Об определении волны разгрузки в одном частном случае. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. *Домбровский Г. А., Турченко В. Я.* Асимптотика волны разгрузки. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1.
7. *Алгазин С. Д., Ленский В. С.* Аналитическое исследование волны разгрузки. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.