

## ДВУМЕРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С РАЗРЕЗАМИ

Л. В. Белокопытова, Л. А. Фильштинский

(Сумы)

Предлагается процедура определения сопряженных механического и электрического полей в пьезоэлектрической среде, ослабленной туннельными, вообще говоря, криволинейными разрезами. Краевая задача сводится к системам сингулярных интегральных уравнений и линейных алгебраических соотношений, связывающих искомые функции. Развиваемый подход примыкает к работе [1]. Задачи о прямолинейных туннельных трещинах на границе с проводником рассмотрены в [2, 3].

1. Постановка задачи. В кристаллографической системе координат  $xuz$  рассмотрим неограниченную пьезоэлектрическую среду (кристалл гексагональной системы  $6mm$  [4], поляризованная керамика [5]), ослабленную туннельными вдоль оси  $y$  разрезами  $L_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ )

Для случая плоской деформации такой среды в плоскости  $xoz$  система разрешающих уравнений относительно функции напряжений  $\varphi_1$  и потенциала электрического поля  $\varphi_2$  имеет вид (ниже полагаем  $x = x_1, z = x_3$ )

$$(1.1) \quad l_{11}\varphi_1 + l_{12}\varphi_2 = 0, \quad l_{12}\varphi_1 + l_{22}\varphi_2 = 0$$

$$l_{11} = a_{10}\partial_1^4 + a_{12}\partial_1^2\partial_3^2 + a_{14}\partial_3^4, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$l_{12} = l_{21} = a_{21}\partial_1^2\partial_3 + a_{23}\partial_3^3, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$l_{22} = a_{20}\partial_1^2 + a_{22}\partial_3^2, \quad a_{10} = s_{33} - s_{13}^2 s_{11}^{-1}$$

$$a_{12} = s_{44} + 2s_{13}(1 - s_{12}s_{11}^{-1}), \quad a_{14} = s_{11} - s_{12}^2 s_{11}^{-1}$$

$$a_{21} = s_{13}d_{13}s_{11}^{-1} - d_{33} + d_{15}, \quad a_{23} = d_{13}(s_{12}s_{11}^{-1} - 1)$$

$$a_{20} = \varepsilon_{11}, \quad a_{22} = \varepsilon_{33} - d_{13}^2 s_{11}^{-1}$$

Здесь  $s_{ik} = s_{ik}^E$ ,  $d_{ik}$ ,  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^T$  — соответственно упругие податливости, пьезоэлектрические модули и диэлектрические постоянные, фигурирующие в уравнениях состояния среды [5]. Функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  связаны с компонентами тензора механических напряжений и напряженностью электрического поля  $E$  формулами

$$(1.2) \quad \sigma_x = \partial_3^2 \varphi_1, \quad \sigma_z = \partial_1^2 \varphi_1, \quad \tau_{xz} = -\partial_1 \partial_3 \varphi_1$$

$$E_x = -\partial_1 \varphi_2, \quad E_z = -\partial_3 \varphi_2$$

Пусть на берегах  $L_j$  заданы усилия  $X_n^\pm$ ,  $Z_n^\pm$  и значения потенциала  $\varphi_2^+ = \varphi_2^- = \varphi_2$ , а на бесконечности имеет место однородное поле механических напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и  $\tau_{13}$  (фигура). Будем предполагать, что  $L_j$  — простые гладкие, непересекающиеся кривые Ляпунова [6].

В этих условиях в среде возникают связанные сингулярные поля механических напряжений и вектора напряженности электрического поля. Задача заключается в описании этих полей.

Общее решение системы (1.1) имеет вид

$$(1.3) \quad \varphi_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \int \Phi_k(z_k) dz_k, \quad \varphi_2 = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k(z_k)$$

$$\gamma_k = a_{20} + a_{22}\mu_k^2, \quad \lambda_k = a_{21}\mu_k + a_{23}\mu_k^3$$

$$z_k = x_1 + \mu_k x_3, \quad \mu_{3+k} = \bar{\mu}_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$((a_{10} + a_{12}\mu^2 + a_{14}\mu^4)(a_{20} + a_{22}\mu^2) - \mu^2(a_{21} + a_{23}\mu^2)^2 = 0)$$

здесь  $\Phi_k(z_k)$  — аналитические функции своих переменных, характеристические числа  $\mu_k$  — корни алгебраического уравнения, приведенного в скобках. Из условия положительной определенности функционала энергии системы следует, что  $\operatorname{Im} \mu_k \neq 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Кроме того, предполагается, что все корни указанного уравнения простые.

Например, для кристалла CdSe и керамики PZT-5 с числовыми значениями постоянных  $s_{ik}$ ,  $d_{ik}$ ,  $\epsilon_{ik}$ , приведенными в [6], вычисления дают соответственно

$$\mu_1 = 0.567i, \quad \mu_2 = 0.864i, \quad \mu_3 = 1.825i, \quad \mu_1 = 1.06i$$

$$\mu_2 = -0.258 + 1.084i, \quad \mu_3 = 0.258 + 1.084i$$

Используя (1.2), уравнения состояния [5] и представления (1.3), находим выражения для напряжений, смещений  $u$ ,  $w$  и напряженности электрического поля в среде

$$(1.4) \quad \sigma_x = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k^2 \Phi_k'(z_k), \quad \sigma_z = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_k'(z_k)$$

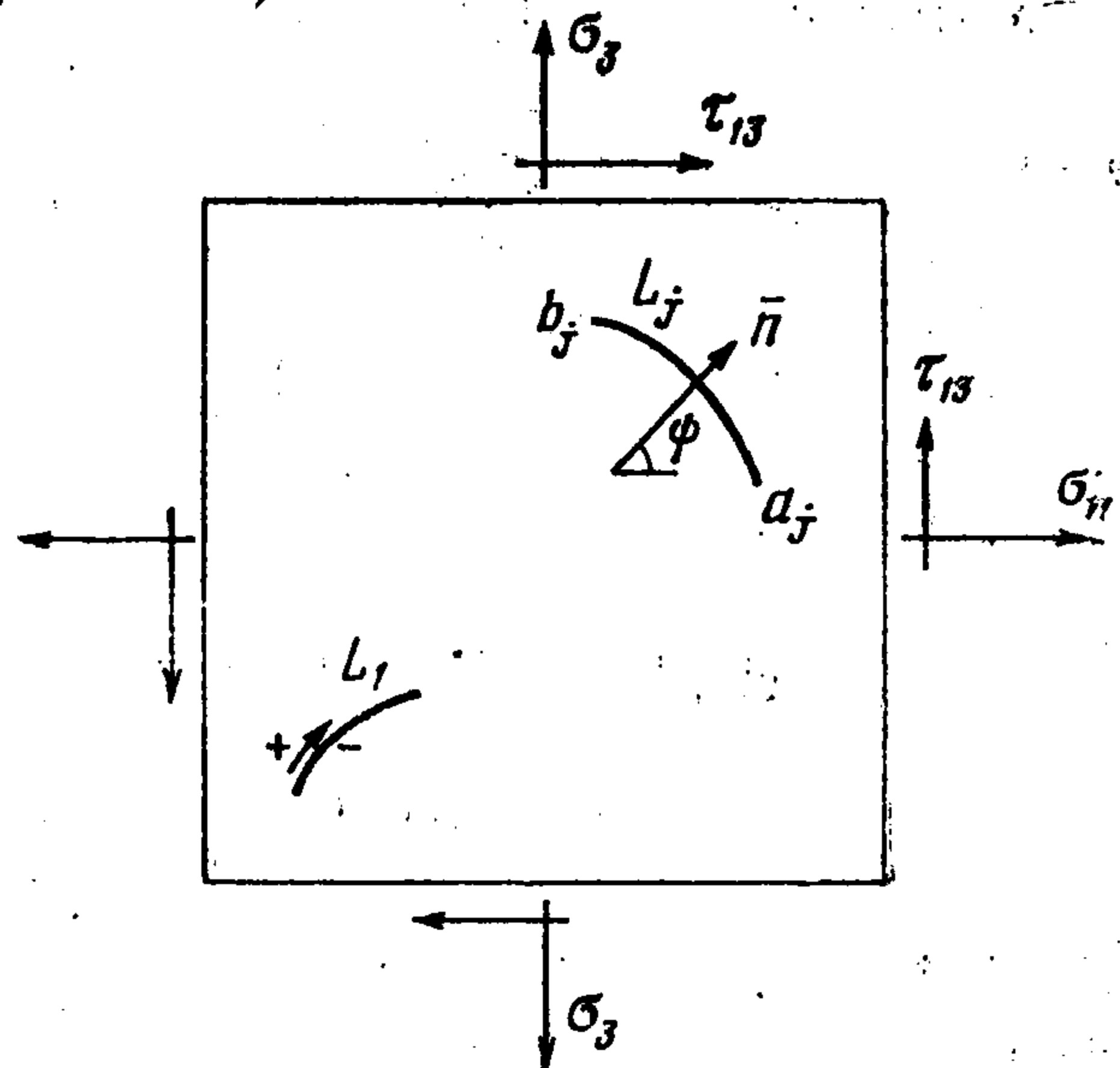
$$\tau_{xz} = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k \Phi_k'(z_k), \quad u = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k)$$

$$w = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k), \quad E_x = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Phi_k'(z_k)$$

$$E_z = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k \Phi_k'(z_k)$$

$$p_k = a_{14}\gamma_k \mu_k^2 + \frac{1}{2}(a_{12} - s_{44})\gamma_k - a_{23} - \lambda_k \mu_k$$

$$q_k = \frac{1}{2}(a_{12} - s_{44})\gamma_k \mu_k + a_{10}\gamma_k \mu_k^{-1} - (a_{21} - d_{15})\lambda_k$$



Учитывая (1.4), краевые условия на контурах  $L_j$  представим в виде

$$(1.5) \quad 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_{nk} \Phi_k'(t_k) \right\}^{\pm} = W_n^{\pm}(t) \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$t_k = \operatorname{Re} t + \mu_k \operatorname{Im} t, \quad t \in L, \quad L = \bigcup_{j=1}^r L_j$$

$$\alpha_{1k} = \gamma_k \mu_k a_k(\psi), \quad \alpha_{2k} = \gamma_k a_k(\psi), \quad \alpha_{3k} = \lambda_k a_k(\psi)$$

$$W_1^{\pm} = \mp X_n^{\pm}, \quad W_2^{\pm} = \mp Z_n^{\pm}, \quad W_3^{\pm} = \frac{d\varphi_2}{ds}$$

$$a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi$$

Здесь  $\psi$  — угол между нормалью к левому берегу  $L_j$  (при движении от начала — точки  $a_i$  к концу —  $b_j$ ) и осью  $Ox_1$ . Первые два уравнения (1.5) соответствуют механическим, а третье ( $n = 3$ ) — электрическому краевым условиям на берегах разрезом.

Для замыкания системы уравнений к (1.5) необходимо присоединить условия однозначности перемещений и потенциала электрического поля  $\varphi_2$ .

Таким образом, задача сводится к определению аналитических функций  $\Phi_k'(z_k)$  по краевым условиям (1.5) и некоторым дополнительным условиям, которые будут выписаны ниже.

**2. Сведение краевой задачи (1.5) к системе интегральных и алгебраических уравнений.** Представим функции  $\Phi_k'(z_k)$  в виде

$$(2.1) \quad \Phi_k'(z_k) = A_k + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_k(t)}{t_k - z_k} dt_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

где постоянные  $A_k$  удовлетворяют условиям на бесконечности

$$(2.2) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k^2 A_k = \sigma_1, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k A_k = \sigma_3$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k A_k = -\tau_{13}, \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k A_k = 0$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mu_k A_k = 0$$

Переходя в (2.1) к предельным значениям и подставляя их в (1.5), приходим после преобразований к соотношениям

$$(2.3) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \alpha_{nk} \omega_k(t) = W_n^1(t), \quad W_n^1(t) = W_n^+ - W_n^-, \quad t \in L$$

$$(2.4) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \alpha_{nk} \left[ 2A_k + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega_k(t)}{t_k - t_{k0}} dt_k \right] = W_n^2(t_0)$$

$$W_n^2(t) = W_n^+(t) + W_n^-(t), \quad t_{k0} = \operatorname{Re} t_0 + \mu_k \operatorname{Im} t_0$$

$$t_0 \in L \quad (n = 1, 2, 3) \quad (\alpha_{nk} = \alpha_{nk}(t_0))$$

Соотношения (2.4) представляют собой систему трех вещественных интегральных уравнений относительно трех вообще комплексных функций  $\omega_k(t)$ . К (2.4) необходимо присовокупить три линейных алгебраических уравнения связи (2.3).

С учетом (2.3) представим (2.4) в форме

$$(2.5) \quad \sum_{k=1}^3 \int_L \{g_{nk}(t, t_0) \omega_k(t) + G_{nk}(t, t_0) \overline{\omega_k(t)}\} dt = \frac{\pi i}{2} N_n(t_0)$$

$$g_{nk}(t, t_0) = \frac{\alpha_{nk}}{t-t_0} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha_{nk}^\circ}{t_k - t_{k0}} \frac{dt_k}{dt} - \frac{\alpha_{nk}}{t-t_0} \right] \quad (n, k = 1, 2, 3)$$

$$G_{nk}(t, t_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\overline{\alpha_{nk}}}{t-t_0} - \frac{\overline{\alpha_{nk}^\circ}}{\bar{t}_k - \bar{t}_{k0}} \frac{d\bar{t}_k}{dt} \right]$$

$$N_n(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{W_n^1 dt}{t-t_0} + W_n^2 + M_n, \quad t_0 \in L$$

$$M_1 = -2(\sigma_1 \cos \psi_0 + \tau_{13} \sin \psi_0), \quad M_3 = 0$$

$$M_2 = 2(\tau_{13} \cos \psi_0 + \sigma_3 \sin \psi_0), \quad \psi_0 = \psi(t_0)$$

В силу предположений,  $\alpha_{nk}$  — функции класса  $H_0$  на  $L$  [6], ядра  $G_{nk}$  могут иметь не более чем слабую особенность, ядра  $g_{nk}$  состоят из сингулярного члена (ядра Коши) и члена с не более чем слабой особенностью.

К уравнениям (2.3) и (2.5) необходимо добавить условия равенства нулю потока вектора электрической индукции через любой замкнутый контур, охватывающий  $L_j$  и условия однозначности смещений  $u, w$ . Учитывая формулы (1.3), (1.4) и (2.1), запишем их в виде

$$(2.6) \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_{nk} \int_{L_j} \omega_k(t) dt_k = 0 \quad (n = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, r)$$

$$p_{1k} = p_k, \quad p_{2k} = q_k, \quad p_{3k} = \lambda_k a_{20} / \mu_k - \gamma_k d_{15}$$

Уравнения (2.3), (2.5) и (2.6) однозначно определяют искомые функции  $\omega_k(t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

**3. Асимптотические формулы для компонент электрического и механического полей.** Введем параметризацию контура  $L_j$  (ниже индекс  $j$  опускаем) по формулам

$$(3.1.) \quad t = t(\beta), \quad t_k = t_k(\beta), \quad a = t(-1), \quad b = t(1), \quad (-1 \leq \beta \leq 1)$$

В соответствии с (3.1) положим  $(\Omega_k^\circ(\beta) — функция класса  $H_0$  на  $L$ )$

$$(3.2) \quad \omega_k(t) = \frac{\omega_k^\circ(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = \frac{\Omega_k^\circ(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Используя (1.4), (2.1), (3.2) и асимптотические формулы для интеграла типа Коши в окрестности конца линии интегрирования [6], находим асимптотические формулы для компонент тензора механических напряжений и вектора напряженности электрического поля

$$\sigma_z = S(\gamma, 0), \quad \sigma_x = S(\gamma, 2), \quad \tau_{xz} = -S(\gamma, 1)$$

$$E_x = S(\lambda, 0), \quad E_z = S(\lambda, 1)$$

$$S(\alpha, \beta) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_k \mu_k^\beta \Omega_k^\circ(\pm 1) [\mp t_k'(\pm 1)]^{1/2} (z_k - c_k)^{-1/2}$$

$$t_k'(\pm 1) = \left. \frac{dt_k}{d\beta} \right|_{\beta=\pm 1}$$

Здесь верхний знак относится к концу трещины,  $c = b$ , нижний — к началу,  $c = a$ .

4. Прямолинейная трещина в пьезоупругой среде. Пусть в среде имеется одна трещина, занимающая отрезок  $[-l; l]$  оси  $Ox$ . В этом случае система (2.5) в совокупности с системой (2.3) имеет вид

$$(4.1) \quad \sum_{k=1}^3 \frac{2\alpha_{nk}}{\pi i} \int_L \frac{\omega_k(t)}{t-t_0} dt = N_n(t_0) \quad (n = 1, 2, 3)$$

Введя параметризацию  $t = \beta l$ ,  $t_0 = \beta_0 l$  и учитывая (3.2), приходим к трем независимым уравнениям

$$(4.2) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{Q_n^\circ(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\beta}{\beta-\beta_0} = N_n^*(\beta_0) \quad (n = 1, 2, 3)$$

$$Q_n^\circ(\beta) = \sum_{k=1}^3 2\alpha_{nk} \Omega_k^\circ(\beta), \quad N_n^*(\beta) = N_n(t)$$

Решение уравнений (4.2) в классе  $h_0$  дает [6]

$$(4.3) \quad Q_n^\circ(\beta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{N_n^*(\beta) \sqrt{1-\beta^2}}{\beta-\beta_0} d\beta + i\delta_n \quad (n = 1, 2, 3)$$

Разделяя в (4.3) вещественную и мнимую части, используя формулы (2.3), (3.2) и (4.2), приходим к выводу, что  $\delta_n$  — вещественные постоянные. Для их вычисления необходимо привлечь условия (2.6). Определив из (4.3) величины  $Q_n^\circ(\beta)$ , находим из системы трех алгебраических уравнений (4.2) функции  $\Omega_k^\circ(\beta)$ . С учетом (3.2) находим затем функции (2.1).

*Примеры.* 1°. Пусть на берегах трещины  $X_n^\pm = Z_n^\pm = \varphi_2^\pm = 0$ , а на бесконечности действует однородное поле напряжений  $\sigma_3, \tau_{13}$ . В этом случае функции (2.1) имеют вид ( $\sigma$  — характерное напряжение)

$$\Phi_k'(z_k) = A_k - c_k \sigma \left( i + \frac{z_k}{\sqrt{l^2 - z_k^2}} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

Значения величин  $\langle c_k \rangle = 10^{-8} c_k$ ,  $\langle \sigma_r \rangle = \alpha \sigma_r$ ,  $\langle \sigma_\theta \rangle = \alpha \sigma_\theta$ ,  $\langle \tau_{r\theta} \rangle = \alpha \tau_{r\theta}$ ,  $\langle E_r \rangle = \delta E_r$ ,  $\langle E_\theta \rangle = \delta E_\theta$  ( $\alpha = \sqrt{2r} / (\sigma \sqrt{l})$ ,  $\delta = \epsilon_{11} \sqrt{2r} / (\sigma d_{33} \sqrt{l})$ )  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, E_r, E_\theta$  — соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора напряженности электрического поля в полярных координатах с центром в вершине трещины  $c$ ;  $r = |z - c|$ ) для кристалла CdSe приведены в таблице. Значения в первой строке каждой клетки таблицы соответствуют случаю  $\sigma = \sigma_3 \neq 0, \tau_{13} = 0$  (при этом  $\langle c_1 \rangle = -155.38i, \langle c_2 \rangle = 119.53i, \langle c_3 \rangle = -7.79i$ ). Значения во второй строке соответствуют случаю  $\sigma = \tau_{13} \neq 0, \sigma_3 = 0$  (при этом  $\langle c_1 \rangle = -95.45, \langle c_2 \rangle = 111.46, \langle c_3 \rangle = -15.31$ ).

Из приведенных данных видно, что в пьезоупругой среде с трещиной при чисто механических внешних воздействиях возникает сильное электрическое поле, приводящее в некоторых случаях к потере «электрической прочности», т. е. к пробое диэлектрика.

Условие разрушения для случая  $\sigma_3 \neq 0, \tau_{13} = 0$  получим, используя [2] и формулы (4.4) и (1.4). Находим после соответствующих вычислений

$$\gamma = \pi l \sigma_3^2 \sum_{k=1}^3 c_k q_k$$

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\langle \sigma_r \rangle$	0.93	0.92	1.12	1.14	0.75	0.45	0
	0	0.01	0.03	-0.35	-1.04	-1.77	-1.82
	0	-0.74	-0.42	0.2	-0.01	-0.47	-1.43
$\langle \sigma_\theta \rangle$	0.98	0.88	0.62	0.32	0.12	0.01	0
	0	-0.84	-1.15	-1.11	-0.69	-0.37	-0.25
	0	-0.14	-0.25	-0.25	-0.003	-0.34	0
$\langle \tau_{r\theta} \rangle$	0	0.26	0.39	0.33	0.19	0.06	0
	0.98	0.66	0.25	-0.34	-0.64	-0.47	0
	0	0.12	0.26	0.11	-0.186	-0.17	0
$\langle E_r \rangle$	0	-2.46	-0.41	-0.41	0	-0.41	0
	0	-0.41	-1.23	-1.64	-1.64	-1.23	0
	-1	-0.97	-0.88	-0.74	-0.53	-0.29	0
$\langle E_\theta \rangle$	0	-6.54	-1.23	-0.41	-1.23	0	0
	0	-2.46	-2.46	-1.64	-0.82	-2.05	0
	0	0.22	0.45	0.68	0.883	0.77	1.1

2°. Пусть теперь  $\sigma_1 = \tau_{13} = \sigma_3 = 0$ ,  $X_n^\pm = Z_n^\pm = 0$ ,  $\varphi_2^\pm = \varphi_0 x / l$ . В этом случае функции (2.1) имеют вид

$$\Phi_k'(z_k) = A_k - \frac{\varphi_0 c_k^*}{l} \left( i + \frac{z_k}{\sqrt{l^2 - z_k^2}} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

Значения величин  $\langle c_k^* \rangle = 10^{-9} c_k$ ,  $\langle \sigma_r \rangle = \alpha_0 \sigma_r$ ,  $\langle \sigma_\theta \rangle = \alpha_0 \sigma_\theta$ ,  $\langle \tau_{r\theta} \rangle = \alpha_0 \tau_{r\theta}$ ,  $\langle E_r \rangle = \delta_0 E_r$ ,  $\langle E_\theta \rangle = \delta_0 E_\theta$  ( $\alpha_0 = 41 d_{33} \sqrt{gl} / (\varphi_0 \epsilon_{11} \sqrt{2})$ ,  $\delta_0 = \sqrt{gl} / (\varphi_0 \sqrt{2})$ ) для керамики PZT — 5 приведены в третьих строках каждой клетки таблицы (при этом  $\langle c_1^* \rangle = 52.95$ ,  $\langle c_2^* \rangle = 0.01 - 1.46i$ ,  $\langle c_3^* \rangle = 0.01 + 1.46i$ ).

Величины  $\langle \sigma_r \rangle$ , ...,  $\langle E_\theta \rangle$ , фигурирующие в таблице, имеют нулевую размерность, размерность напряжений  $n / m^2$ , размерность вектора напряженности  $n / \kappa$ , размерность  $\langle c_k \rangle - nm^2 / \kappa^2$ , размерность  $\langle c_k^* \rangle - n / \kappa$ .

Поступила 17 X 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
2. Кудрявцев Б. А., Партоп В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
3. Кудрявцев Б. А., Ракитин В. И. Периодическая система трещин на границе пьезоэлектрика и твердого проводника. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
4. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Physical acoustics, vol. 1, p. A., Ed by W. P. Mason, New York — London, Acad. Press, 1964.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.