

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД**

**И. Г. Филиппов**

(Москва)

Предлагается приближенный метод решения динамических задач для линейных вязкоупругих сред, проявляющих мгновенную упругость. Для сред, удовлетворяющих модели Максвелла, метод дает точные результаты.

Ранее рассматривались, главным образом, простейшие задачи при частных видах ядер вязкоупругих операторов, в частности для тела Максвелла или в окрестности фронта вязкоупругой волны [1-3], а также асимптотические решения с применением метода перевала [4].

**1. Постановка задачи. Приближенный метод решения.** Линейные вязкоупругие тела, проявляющие мгновенную упругость, описываются двумя линейными временными операторами  $L(\zeta)$  и  $M(\zeta)$  больцмановского типа

$$(1.1) \quad L(\zeta) = \lambda \left[ \zeta(t) - \int_0^t f_1(t-\xi) \zeta(\xi) d\xi \right]$$

$$M(\zeta) = \mu \left[ \zeta(t) - \int_0^t f_2(t-\xi) \zeta(\xi) d\xi \right]$$

где  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — ядра вязкоупругих операторов, которые удобнее аппроксимировать в виде суммы экспонент, т. е. [5]

$$(1.2) \quad f_j(t) = \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_{mj}}{\tau_m} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right), \quad \sum_{m=1}^n \gamma_{mj} = 1$$

$\lambda, \mu$  — упругие постоянные,  $\gamma_{mj}$  — вязкие параметры,  $\tau_m$  — времена релаксаций.

Для простоты ограничимся рассмотрением плоских двумерных задач. Уравнения движения линейной изотропной вязкоупругой среды приведем к виду

$$(1.3) \quad L_j(\Delta u_j) = \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad L_j(\Delta v_j) = \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2$$

$$L_1(\zeta) = \frac{1}{1+2\mu} [L(\zeta) + 2M(\zeta)], \quad L_2(\zeta) = \frac{1}{\mu} M(\zeta)$$

При этом функции  $u_j, v_j$  должны удовлетворять дополнительным зависимостям

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad a_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad a_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

В случае постоянства коэффициента Пуассона, что справедливо с большой степенью точности, ядра  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  равны между собой.

Для изложения приближенного метода рассмотрим произвольное интегро-дифференциальное уравнение

$$L(\Delta u) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

типа (1.3) и применим к нему преобразование Лапласа по  $t$ . В случае нулевых начальных данных, что несущественно для излагаемого подхода, для  $u_0(x, y, p)$  получаем уравнение

$$\Delta u_0 = \frac{Q^2(p)}{c^2} u_0, \quad Q^2(p) = p^2 [1 - f_0(p)]^{-1}$$

$$f_0(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt$$

где  $c$  — какая-либо из скоростей  $a_j$ .

Величину  $Q^2(p)$  для ядра  $f(t)$  вида (1.2) представим следующим образом:

$$(1.4) \quad Q^2(p) = p^2 + c_1 p - c_2 + c_2 Q_1(p)$$

$$c_1 = \sum_{m=1}^n \frac{\gamma_m}{\tau_m}, \quad c_2 = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1+m}^n \gamma_m \gamma_l \left( \frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{\tau_l} \right)^2$$

$$|Q_1(p)| \leq \left| \frac{1}{1 + p\tau_1} \right|$$

В частности, для материала Максвелла имеем лишь одно время релаксации, и тогда величина  $Q^2(p)$  принимает простой вид

$$(1.5) \quad Q^2(p) = p^2 + p / \tau_1$$

Сделаем следующее предположение. Так как во многих динамических задачах для линейных вязкоупругих сред время протекания волновых процессов много меньше наименьшего времени релаксации  $\tau_1$ , то для рассматриваемых промежутков времени  $t$  последним слагаемым в выражении (1.4) можно пренебречь (для тела Максвелла отбрасываемый член тождественно равен нулю).

2. Плоская одномерная волна в вязкоупругой среде. Рассмотрим простейшую задачу о распространении в полупространстве  $y > 0$  плоской волны от приложенного к ее границе  $y = 0$  нормального давления. Задача сводится к решению уравнения

$$L_1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a_1 = a$$

относительно смещения  $v$ , удовлетворяющего граничным и начальным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= -F(t) \quad (y = 0), \quad v = 0, \quad (y = \infty) \\ v &= \partial v / \partial t = 0 \quad (t = 0) \end{aligned}$$

Применяя преобразование Лапласа по  $t$ , получаем задачу, решение которой имеет вид

$$(2.1) \quad v_0(y, p) = \frac{Q(p)}{\rho a p} F_0(p) \exp\left[-Q(p) \frac{y}{a}\right]$$

Обращая выражение (2.1) по  $p$ , когда величина  $Q^2(p)$  определяется формулой (1.4) без последнего слагаемого, для смещения  $v$  и напряжения  $\sigma_{yy}$  получим

$$v(y, t) = \frac{1}{\rho a} \int_{y/a}^t F(t - \xi) \left[ \exp\left(-\frac{c_1 \xi}{2}\right) I_0\left(c_0 \sqrt{\xi^2 - \frac{y^2}{a^2}}\right) + \right. \\ \left. + c_0 \int_{y/a}^{\xi} \exp\left(-\frac{c_1 \eta}{2}\right) I_0\left(c_0 \sqrt{\eta^2 - \frac{y^2}{a^2}}\right) d\eta \right] d\xi \\ c_0 = \sqrt{\frac{c_1^2}{4} + c_2}$$

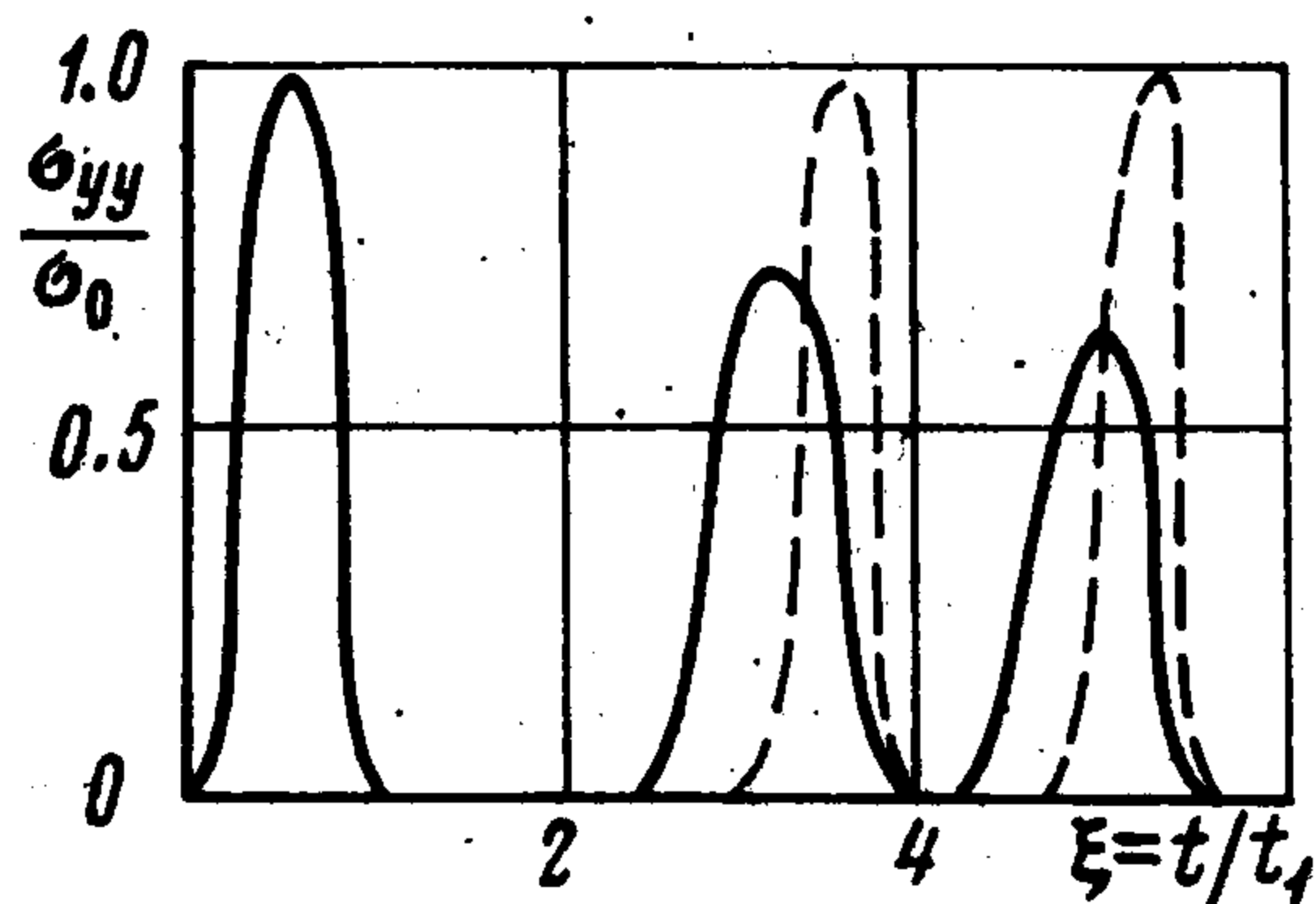
$$\sigma_{yy}(y, t) = -\exp\left(-\frac{c_1 y}{2a}\right) F\left(t - \frac{y}{a}\right) + \frac{c_0 y}{a} \int_{y/a}^t F(t - \xi) \times \\ \times \exp\left(-\frac{c_1 \xi}{2}\right) \left(\xi^2 - \frac{y^2}{a^2}\right)^{-1/2} I_1\left(c_0 \sqrt{\xi^2 - \frac{y^2}{a^2}}\right) d\xi$$

Отсюда для тела Максвелла получаем точное решение, построенное в работе [1] по принципу соответствия, а в случае упругого тела, когда ядро  $f(t) = 0$ , получаем известное решение о распространении плоской волны в упругой среде.

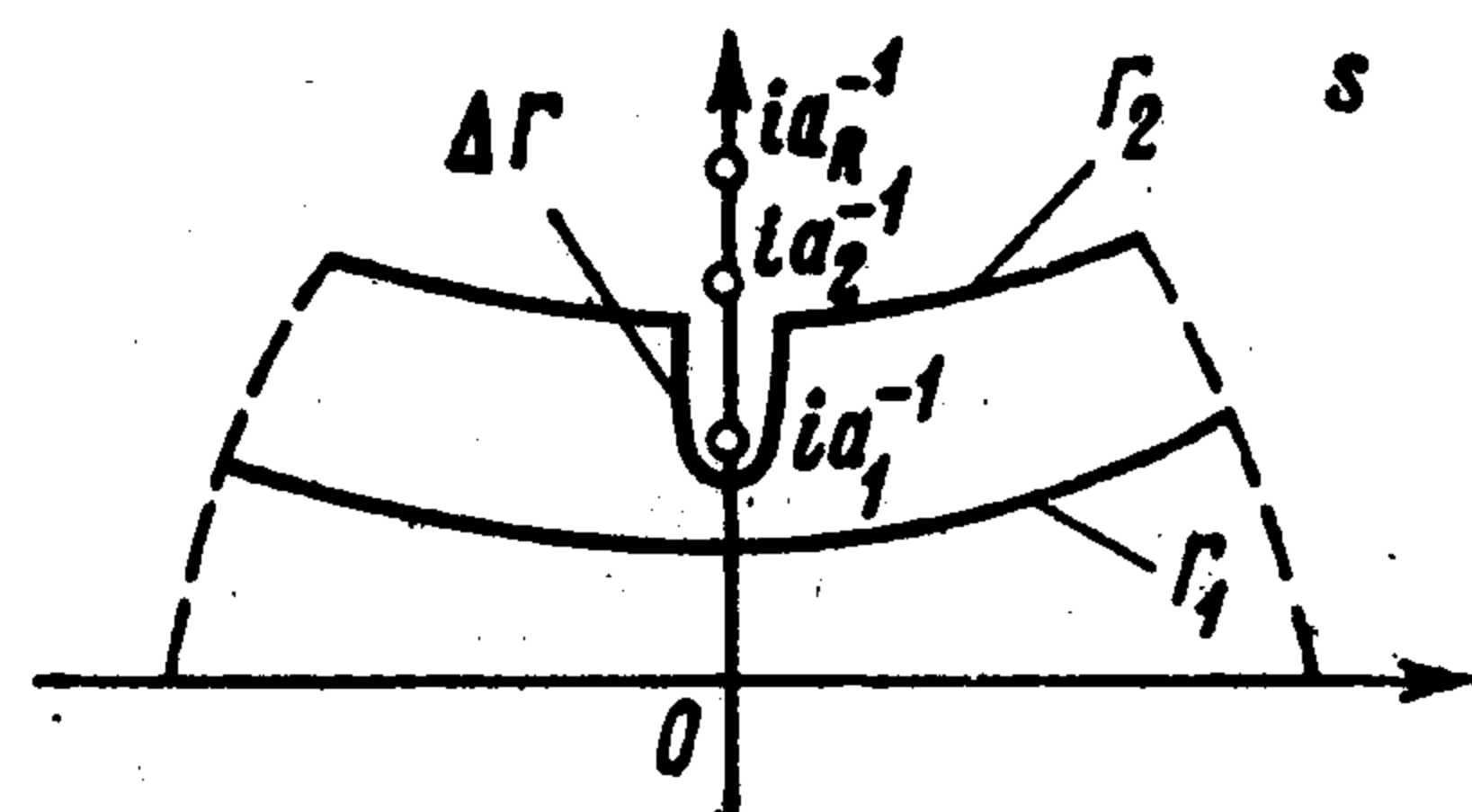
Нетрудно получить и приближенную зависимость величины напряжения от скорости частиц за фронтом волны

$$\sigma_{yy}(y, t) = -\rho a \left\{ \frac{dv}{dt} + \int_{y/a}^t \frac{dv}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \exp\left(-\frac{c_1 \xi}{2}\right) I_0(c_0 \xi) \right] d\xi \right\}$$

которая является хорошо известным соотношением для плоской упругой волны.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлена зависимость величины напряжения  $\sigma_{yy}$  в двух точках и зависимости от  $t$  при следующих исходных данных задачи:

$$F(t) = \sigma_0 \sin^2(\pi t / t_1) \quad (0 \leq t \leq t_1), \quad n = 3, \quad \gamma_1 = 0.6 \\ \gamma_2 = 0.3, \quad \gamma_3 = 0.1, \quad \tau_1 = 10^5 \text{ мксек}, \quad \tau_2 = 10^7 \text{ мксек}, \\ \tau_3 = 10^7 \text{ мксек}$$

причем пунктирная кривая соответствует упругой задаче. Аналогично решаются другие одномерные задачи по распространению плоских волн.

**3. Приближенное решение задачи Лэмба.** Задача сводится к решению уравнений (1.3) для полуплоскости  $y < 0$  при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \sigma_0 \delta(x) \delta(t), \quad \sigma_{xy} = \sigma_1 \delta(x) \delta(t) \quad (y = 0) \\ u_j &= v_j = 0 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} = \infty) \\ u_j &= v_j = \partial u_j / \partial t = \partial v_j / \partial t = 0 \quad (t = 0) \end{aligned}$$

В предположении постоянства коэффициента Пуассона применим к задаче преобразование Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Тогда для функций

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} u_j \exp(i\omega x - pt) dt \\ \bar{v}_{j0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} v_j \exp(i\omega x - pt) dt \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} (3.1) \quad \bar{u}_{10} &= A_1 \exp[yR_1(p)], \quad \bar{v}_{20} = A_2 \exp[yR_2(p)] \\ \bar{u}_{20} &= -i\omega^{-1}R_2(p)\bar{v}_{20}, \quad \bar{v}_{10} = i\omega^{-1}R_1(p)\bar{u}_{10} \\ R_j(p) &= [\omega^2 + Q^2(p)/a_j^2]^{1/2}, \quad A_j = \Delta_j/\Delta, \quad j = 1, 2 \\ \Delta &= [(2\omega^2 a_2^2 + Q^2(p))^2 - 4\omega^2 a_2^4 R_1(p)R_2(p)] \\ \Delta_1 &= -\frac{\omega Q^2(p)}{\rho p^2 a_2^2} [i\sigma_0(2\omega^2 a_2^2 + Q^2(p)) + 2\omega^2 a_2^2 \sigma_1 R_2(p)] \\ \Delta_2 &= -\frac{\omega Q^2(p)}{\rho p^2 a_2^2} [2\omega^2 a_2^2 \sigma_0 R_1(p) - i\sigma_1(2\omega^2 a_2^2 + Q^2(p))] \end{aligned}$$

Исследуем величины напряжений. Исходя из вида решения (3.1), для преобразованных по Лапласу и Фурье величин напряжений  $\sigma_{ij}^0$  получим выражения

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \sigma_{ij}^{(0)} &= Q(p) \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} P_{ij}^{(k)}(s) \exp[Q(p)(yR_{j0}(s) - isx)] ds \\ P_{xx}^{(1)} &= -i \frac{\Delta_{10}}{\Delta_0} [a_1^2 s^2 - (a_1^2 - 2a_2^2) R_{10}^2(s)], \quad P_{xx}^{(2)} = -P_{yy}^{(2)} \\ P_{xx}^{(2)} &= -2s \frac{\Delta_{20}}{\Delta_0} R_{20}, \quad P_{yy}^{(1)} = -i \frac{\Delta_{10}}{\Delta_0} [s^2(a_1^2 - 2a_2^2) - \\ &\quad - a_1^2 R_{10}^2(s)] \\ P_{xy}^{(1)} &= 2sa_2^2 \frac{\Delta_{10}}{\Delta_0} R_{10}(s), \quad P_{xy}^{(2)} = -i \frac{\Delta_{20}}{\Delta_0} R_0(s) \\ R_{j0}(s) &= \sqrt{s^2 + a_j^2}, \quad R_0(s) = (1 + 2s^2 a_2^2) \\ \Delta_0 &= [R_0^2(s) - 4s^2 a_2^4 R_{10}(s) R_{20}(s)] \\ \Delta_{10} &= -[i\sigma_0 R_0(s) + 2sa_2^2 \sigma_1 R_{20}(s)] \\ \Delta_{20} &= -[2sa_2^2 \sigma_0 R_{10}(s) - i\sigma_1 R_0'(s)] \end{aligned}$$

Для анализа выражений (3.2) перейдем в комплексную плоскость  $s$ , при этом интегрирование по  $s$  заменим интегрированием по контурам  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Delta\Gamma$ , как показано на фиг. 2. Точками ветвления и пол юсами подын-

тегральных функций будут

$$\operatorname{Re} s_1 = 0, \quad \operatorname{Re} s_2 = 0, \quad \operatorname{Im} s_1 = a_1^{-1}, \quad \operatorname{Im} s_2 = a_2^{-1}$$

$$\operatorname{Re} s_R = 0, \quad \operatorname{Im} s_R = a_R^{-1}, \quad \Delta_0(s)|_{s=s_R} = 0$$

Вычисляя квадратуры в выражениях (3.2) по контурам  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta\Gamma$  с использованием леммы Жордана и теории вычетов, следуя методу работы [6], можно получить выражения для напряжений  $\sigma_{ij}^{(0)}$  в полуплоскости  $y \leq 0$ . Например, для величины напряжения  $\sigma_{xx}^{(0)}$  на свободной границе  $y = 0$  при  $\sigma_1 = 0$  получим выражение

$$(3.3) \quad \sigma_{xx}^{(0)} = Q(p) \{ [P_{xx}^{(1)} + P_{xx}^{(2)}] (s - ia_R^{-1}) \exp[i|x|sQ(p)] \}_{s=ia_R^{-1}} +$$

$$+ Q(p) \int_{a_2^{-1}}^{a_1^{-1}} \sigma_0 \left[ \frac{F_1(i\eta)}{\Delta_0(i\eta)} + \frac{F_2(i\eta)}{\bar{\Delta}_0(i\eta)} \right] \exp[-\eta|x|Q(p)] d\eta$$

$$\bar{\Delta}_0(s) = [R_0^2(s) + 4s^2 a_2^4 R_{10}(s) R_{20}(s)]$$

$$F_{1,2}(s) = 4s^2 R_{10}(s) R_{20}(s) \mp (2s^2 + a_2^{-2}) [2s^2 - a_2^{-2} (1 - 2a_2^2/a_1^2)]$$

причем данное выражение в близкой по постановке задаче работы [7] вычислено неверно.

Для того чтобы обратить выражение (3.3) по  $p$ , необходимо обратить по  $p$  выражение

$$Q(p) \exp[-\alpha Q(p)]$$

которое для величины  $Q^2(p)$ , определяемой по формуле (1.4), легко обращается. Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} Q(p) \exp[-\alpha Q(p) + pt] dp =$$

$$= \exp(-1/2 c_1 t) \{ \delta'(t - \alpha) I_0(c_0 \sqrt{t^2 - \alpha^2}) -$$

$$- 2\delta(t - \alpha) (t^2 - \alpha^2)^{-1/2} I_1(c_0 \sqrt{t^2 - \alpha^2}) +$$

$$+ c_0 [(t^2 - \alpha^2)^{-1/2} - 1/2 \alpha^2 (t^2 - \alpha^2)^{-3/2}] I_1(c_0 \sqrt{t^2 - \alpha^2}) +$$

$$+ c_0^2 \alpha^2 (t^2 - \alpha^2)^{-1/2} I_1'(c_0 \sqrt{t^2 - \alpha^2}) \} H(t - \alpha)$$

Для вязкоупругой полуплоскости, материал которой удовлетворяет модели Максвелла, формула (3.3) дает точное выражение  $\sigma_{xx}^{(0)}$  на границе  $y = 0$ .

Поступила 6 II 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
2. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
3. Галин Л. А., Шматкова А. А. О движении штампа по границе вязкоупругой полуплоскости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Брук С. З. Задача Лемба для вязкоупругой полуплоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
5. Филиппов И. Г. Динамические задачи линейной теории вязкоупругости. В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНТИ, 1974.
6. Cagniard L. Reflection and refraction of progressive seismic waves. New York, McGraw-Hill, 1962.
7. Chwalczyk F., Rafa J., Wlodarczyk E. Propagation of two-dimensional non-stationary stress waves in a semiinfinite viscoelastic body, produced by a normal load moving over surface with subsonic velocity. Proc. Vibrat. Problems, 1972, vol. 13, No. 3, p. 241—257.