Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. Г. Вильке

(Москва)

Доказывается теорема существования и единственности решений динамических задач нелинейной теории упругости конечных деформаций в пространстве Соболева H_1 (Ω). Решение аналогичной задачи для классической теории упругости при малых деформациях и линейном законе упругости базируется на неравенстве Корна [1]. Вопросы существования и единственности решений линейных и квазилинейных уравнений эволюционного типа изучались в работах [2–4].

1. Постановка задачи. Пусть в естественном, недеформированном состоянии тело занимает область Ω в R^3 с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Движение упругого тела задает однопараметрическая группа отображений g^t: $\Omega \to R^3$

$$g^t : \mathbf{a} \to \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{u}(\mathbf{a}, t), \quad \mathbf{r} \in R^3 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{a}$ $(a_1, a_2, a_3) \in \Omega$ — лагранжевы координаты точек тела в некоторой инерциальной системе координат.

Принимая тело однородным и изотропным, $\mathbf{u} \in V(\Omega)$, $\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} \in H_0(\Omega)$, где $V(\Omega)$ и $H_0(\Omega)$ — банахово и гильбертово пространства соответственно, представим функционалы кинетической и потенциальной упругой энергии в виде

$$T[\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}] = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}}) = \frac{1}{2}\rho\int_\Omega \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}2}\, da \quad (\mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = D_t\mathbf{u}) \tag{1.2}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}] = \int_\Omega e(\mathrm{I}_E, \mathrm{II}_E, \mathrm{III}_E)\, da \quad (da = da_1 da_2 da_3)$$

Здесь ρ — плотность тела в естественном состоянии, которую в дальнейшем будем считать равной единице, e: $R^3 \to R_t^1$ — удельная упругая энергия деформаций, I_E, II_E, III_E — инварианты тензора конечной деформации [5]

$$E = {}^1/_2(U + U^T + U^TU), \quad U = (u_{ij} = \partial u_i/\partial a_j) \tag{1.3}$$

Функциональное пространство $V = \{\mathbf{u}\text{: } \mathrm{E}[\mathbf{u}] < +\infty\}$ является пространством Соболева $(W_p{}^1(\Omega))^3$ или многообразием в нем, где [6]

$$W_p{}^1(\Omega) = \left\{u : \Big(\sum_{\alpha\leqslant 1}\int_\Omega |D_a^\alpha u|^p\, da\Big)^{1/p} < \infty\right\}$$

Предположим, что $V \subset (W_2^1(\Omega))^3 \equiv H_1(\Omega)$ и что в $(W_{2-\alpha}^1(\Omega))^3$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ найдется элемент, на котором потенциальная энергия $\mathrm{E}[\mathbf{u}]$ не определена. В этом смысле пространство $H_1(\Omega)$ является наиболее широким пространством, на котором определен функционал потенциальной энергии.

Уравнения движения упругого тела следуют из принципа возможных перемещений Даламбера — Лагранжа в виде

$$(1.4)\qquad (\mathbf{u}^{\cdot\cdot}, \delta\mathbf{u}) + (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \delta\mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \delta\mathbf{u}) - (\mathbf{F}, \delta\mathbf{u})_\Gamma = 0, \quad \delta\mathbf{u} \in V$$

$$(\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \delta\mathbf{u}) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial e}{\partial u_{ij}} \delta u_{ij}\, da, \quad (\mathbf{u}^{\cdot\cdot}, \delta\mathbf{u}) = \int\limits_\Omega \mathbf{u}^{\cdot\cdot} \delta\mathbf{u}\, da$$

$$(\mathbf{f}, \delta\mathbf{u}) = \int\limits_\Omega \mathbf{f}\delta\mathbf{u}\, da, \quad (\mathbf{F}, \delta\mathbf{u})_\Gamma = \int\limits_\Gamma \mathbf{F}\delta\mathbf{u}\, d\sigma$$

Здесь $\mathbf{F}$ — внешняя поверхностная сила, $\mathbf{f}$ — внутренняя сила, $\delta\mathbf{u}$ — вектор возможных перемещений. Предполагается, что внешние поверхностные силы заданы на части границы Γ_F, а на остальной ее части заданы перемещения

$$(1.5)\qquad \mathbf{a} \in \Gamma_U, \mathbf{u} = \mathbf{U}(\mathbf{a}, t) \quad (\Gamma_U \cap \Gamma_F = \phi, \Gamma_U \cup \Gamma_F = \Gamma)$$

Конфигурационным пространством системы в этом случае будет линейное многообразие $V_0 = \{\mathbf{u}\colon \mathbf{u} \in V,\ \mathbf{u}|_{\Gamma_U} = \mathbf{U}(\mathbf{a}, t)\} \subset V$.

Функция $\mathbf{U}(\mathbf{a}, t)$ на Γ_U должна удовлетворять условиям теоремы о следах: если Ω — открытая область в R^3, граница Γ которой является бесконечно дифференцируемым ориентируемым многообразием размерности два, относительно которого Ω находится локально по одну сторону, то след $\gamma\mathbf{u}$ функции $\mathbf{u} \in H_1(\Omega)$ есть функция, принадлежащая $H_{1/2}(\Gamma)$, и отображение $H_1(\Omega) \to H_{1/2}(\Gamma)$ линейно и непрерывно, т. е.

$$(1.6)\qquad \|\gamma\mathbf{u}\|_{H_{1/2}(\Gamma)} \leqslant c\, \|\mathbf{u}\|_{H_1(\Omega)}$$

Здесь константа c не зависит от $\mathbf{u}$ [6]. Предположим далее, что существует функция $\mathbf{u}_0(\mathbf{a}, t) \in V$ и $\gamma\mathbf{u}_0|_{\Gamma_U} = \mathbf{U}(\mathbf{a}, t)$. Здесь время рассматривается как параметр. Обычно в приложениях указанные условия гладкости функции $\mathbf{U}(\mathbf{a}, t)$ выполняются.

Положим $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ и определим линейное пространство

$$V_0 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in V, \mathbf{v}|_{\Gamma_U} = 0\} \subset H_1(\Omega)$$

Возможные перемещения системы $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{v} \in V_0$. Пространство V_0 является конфигурационным пространством системы, а прямое произведение $V_0 \times H_0$ — фазовым пространством системы $(H_0 = (L_2(\Omega))^3)$.

Задача (1.4) принимает вид

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &(\mathbf{v}^{\cdot\cdot}, \delta\mathbf{v}) + (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v} + \mathbf{u}_0], \delta\mathbf{v}) - (\mathbf{f}_0, \delta\mathbf{v}) - (\mathbf{F}, \delta\mathbf{v})_\Gamma = 0, \quad \forall \delta\mathbf{v} \in V_0 \\ &\mathbf{v}(\mathbf{a}, t)|_{\Gamma_U} = 0 \quad (\mathbf{f}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{u}_0^{\cdot\cdot}) \\ &\mathbf{v}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{a}, 0) - \mathbf{u}_0(\mathbf{a}, 0) \equiv \mathbf{v}_0(\mathbf{a}) \in V_0 \\ &\mathbf{v}^{\cdot}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{u}^{\cdot}(\mathbf{a}, 0) - \mathbf{u}_0^{\cdot}(\mathbf{a}, 0) \equiv \mathbf{v}_0^{\cdot}(\mathbf{a}) \in H_0 \end{aligned}$$

Ниже рассматривается существование и единственность решений задачи (1.7). Все интегралы в (1.7) будут иметь смысл, если

$$\mathbf{v}^{\cdot\cdot},\ \nabla \mathrm{E}\,[\mathbf{v}+\mathbf{u}_0],\quad \mathbf{f}_0 \in V',\quad \mathbf{F} \in H_{-1/2}(\Gamma) \tag{1.8}$$

Здесь V' и $H_{-1/2}(\Gamma)$ — пространства, сопряженные к пространствам V_0 и $H_{1/2}(\Gamma)$ соответственно [6].

2. Теорема существования решений. Пусть отображение $\nabla \mathrm{E}\,[\mathbf{u}]$: $V_0 \to V'$ удовлетворяет условию Липшица

$$\| \nabla \mathrm{E}\,[\mathbf{u}'] - \nabla \mathrm{E}\,[\mathbf{u}''] \|_{-1} \leqslant L \, \| \mathbf{u}' - \mathbf{u}'' \|_1, \quad \forall \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in V_0, \quad L > 0 \tag{2.1}$$

Здесь $\|\cdot\|_{-1}$, $\|\cdot\|_1$ — нормы в $H_{-1}(\Omega)$ и $H_1(\Omega)$ соответственно. Предположим, что для любого $\varkappa > 0$ найдутся такие положительные константы k_1 и k_2, что

$$k_1 \| \mathbf{u} \|_1^2 \leqslant \mathrm{E}\,[\mathbf{u}] + \varkappa \| \mathbf{u} \|_0^2 \leqslant k_2 \| \mathbf{u} \|_1^2, \quad \forall \mathbf{u} \in V_0 \tag{2.2}$$

Здесь $\|\cdot\|_0$ — норма в $H_0(\Omega)$.

Относительно внешних сил и перемещений на части границы предполагаем выполненными условия

$$\begin{aligned} &f_i,\ f_i^{\cdot} \in L_2(Q), \quad Q = \Omega \times [0,\ T] \quad (T > 0) \\ &F_i,\ F_i^{\cdot} \in L_2(\Sigma),\ \Sigma = \Gamma \times [0,\ T] \qquad\qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \\ &U_i^*, U_i^{*\cdot}, U_i^{*\cdot\cdot}, U_i^{*\cdot\cdot\cdot} \in L_2(0, T; H_{1/2}(\Gamma)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь U_i^* совпадает с U_i на Γ_U.

Теорема. Если функционал потенциальной энергии удовлетворяет условиям (2.1), (2.2), внешние силы и перемещения $\mathbf{U}$ на Γ_U условиям (2.3) и

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}, 0) \in V_0(\Omega), \quad \mathbf{u}^{\cdot}(\mathbf{a}, 0) \in H_0(\Omega) \tag{2.4}$$

то задача (1.7) имеет решение и

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\mathbf{a}, t) \in L_\infty(0, T; V_0), \quad \mathbf{v}^{\cdot}(\mathbf{a}, t) \in L_\infty(0, T; H_0) \\ &\mathbf{v}^{\cdot\cdot}(\mathbf{a}, t) \in L_\infty(0, T; V') \end{aligned} \tag{2.5}$$

Замечение 1. Первые два условия (2.3) можно ослабить, предположив

$$\mathbf{f},\ \mathbf{f}^{\cdot} \in L_2(0,\ T;\ H_{-1}(\Omega)), \quad \mathbf{F},\ \mathbf{F}^{\cdot} \in L_2(0,\ T;\ H_{-1/2}(\Gamma))$$

Однако для физических задач вполне достаточно первых двух условий (2.3).

Замечание 2. В последнем условии (2.3) функция U^* является продолжением функции U, заданной на Γ_U, на все многообразие Γ. Из последнего условия (2.3) и теоремы о следах следует, что существует функция $\mathbf{u}_0$ $(\mathbf{a},\ t)$, такая, что

$$\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}_0^{\cdot},\ \mathbf{u}_0^{\cdot\cdot},\ \mathbf{u}_0^{\cdot\cdot\cdot} \in L_2(0,\ T;\ H_1(\Omega))$$

Тогда справедливы вложения для начальных условий в (1.7) и $\mathbf{f}_0$ из (1.7) удовлетворяет условию $f_{0i},\ f_{0i}^{\cdot} \in L_2(Q)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Замечание 3. Неравенство (2.2) в случае линейного закона упругости и малых деформаций следует из неравенства Корна [1].

Доказательство теоремы основывается на применении метода Галеркина построения последовательных приближений решения в конечномерных пространствах, оценки их ограниченности в фазовом пространстве системы и доказательстве того факта, что предельная функция удовлетворяет (1.7).

Построение приближенных решений. Используя свойство сепарабельности пространства V_0, выберем в нем базис $\{\mathbf{w}_m\}_{m=1}^{\infty}$, ортонормированный в смысле $H_0(\Omega)$, приняв $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_0 / \| \mathbf{v}_0 \|_0$. Пусть $V_1^{(m)}$ — конечномерное пространство линейных комбинаций векторов $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, $V_0^{(m)} \subset V_0$.

Назовем приближенным решением (1.7) функцию $\mathbf{v}^{(m)} \in V_0^{(m)}$, удовлетворяющую уравнению

$$(\mathbf{v}^{\cdot\cdot(m)}, \delta\mathbf{v}) + (\nabla E[\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0], \delta\mathbf{v}) - (\mathbf{f}_0, \delta\mathbf{v}) - \\ - (\mathbf{F}, \delta\mathbf{v})_\Gamma = 0, \quad \forall \delta\mathbf{v} \in V_0^{(m)} \tag{2.6}$$

и начальным условиям $\mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{a})$, $\mathbf{v}^{\cdot}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{v}_{0m}^{\cdot}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{v}_{0m}^{\cdot}(\mathbf{a})$ — проекция $\mathbf{v}_0^{\cdot}$ на $V_0^{(m)}$). Уравнение (2.6) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$. Полагая

$$\mathbf{v}^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} q_{im}(t)\, \mathbf{w}_i$$

и заменяя в (2.6) $\delta\mathbf{v}$ на w_i ($i = 1, \ldots, m$), приходим к системе

$$\ddot{q}_{im} + \left(\nabla E \left[\sum_{k=1}^{m} q_{km}\mathbf{w}_k + \mathbf{u}_0 \right], \mathbf{w}_i \right) - (\mathbf{f}_0, \mathbf{w}_i) - (\mathbf{F}, \mathbf{w}_i)_\Gamma = 0 \\ (i = 1, \ldots, m) \tag{2.7}$$

Покажем, что система (2.7) удовлетворяет условию Липшица, а значит, имеет единственное решение на некотором отрезке $[0, T_m]$. Используя евклидову метрику в пространстве $V_0^{(m)}$ и (2.1), приходим к оценке

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \left(\nabla E \left[\sum_{k=1}^{m} q'_{km}\mathbf{w}_k + \mathbf{u}_0 \right] - \nabla E \left[\sum_{k=1}^{m} q''_{km}\mathbf{w}_k + \mathbf{u}_0 \right], \mathbf{w}_i \right)^2 \right]^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m} \left\| \nabla E \left[\sum_{k=1}^{m} q'_{km}\mathbf{w}_k + \mathbf{u}_0 \right] - \nabla E \left[\sum_{k=1}^{m} q''_{km}\mathbf{w}_k + \mathbf{u}_0 \right] \right\|_{-1}^2 \times \\ \times \| \mathbf{w}_i \|_1^2 \right]^{1/2} \leqslant L \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \| \mathbf{w}_i \|_1 \sqrt{m} \left\| \sum_{k=1}^{m} (q'_{km} - q''_{km})\, \mathbf{w}_k \right\|_1 \leqslant \\ \leqslant L \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \| \mathbf{w}_i \|_1^2\, m \left[\sum_{k=1}^{m} (q'_{km} - q''_{km})^2 \right]^{1/2} \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что для системы (2.7) выполняется условие Липшица с константой (заметим, что уравнения (2.7) — уравнения второго порядка)

$$L(m) = \max(1, Lm \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \| \mathbf{w}_i \|_1^2).$$

Константа $L(m)$ возрастает с ростом размерности пространства m, а также за счет роста $\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \| \mathbf{w}_i \|_1^2$.

Таким образом, согласно теореме существования и единственности решений для обыкновенных дифференциальных уравнений, решение (2.7) существует и единственно на некотором отрезке $[0, T_m]$ и $T_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Равномерная ограниченность решений. Возможность продолжения решений (2.7) на некоторый отрезок $[0, T]$, не зависящий от m, вытекает из равномерной ограниченности всех решений независимо от номера m в фазовом пространстве системы $V_0 \times H_0$.

Заменим в (2.6) $\delta \mathbf{v}$ на $\mathbf{v}^{\cdot(m)}$ и проинтегрируем полученное выражение по времени от 0 до t. Получим

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(m)}\|_0^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(m)}(0)\|_0^2 + \mathrm{E}[\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0] - \mathrm{E}[\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0(0)] = \tag{2.9}$$
$$= \int_0^t [(\mathbf{f}_0, \mathbf{v}^{\cdot(m)}) + (\mathbf{F}, \mathbf{v}^{\cdot(m)})_\Gamma + (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0], \mathbf{u}_0^{\cdot})]\,dt$$

Используя неравенство Юнга, интегрирование по частям и условия (2.3), (2.4), оценим интеграл, стоящий в правой части (2.9):

$$|I| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{f}_0\|_{-1}^2 + \|\mathbf{F}\|_{\Gamma,-1/2}^2) + \frac{\varepsilon}{2}(1+c^2)\|\mathbf{v}^{(m)}\|_1^2 + \tag{2.10}$$
$$+ \frac{1}{2}[\|\mathbf{f}_0(0)\|_{-1}^2 + (1+c^2)\|\mathbf{v}_0\|_1^2 + \|\mathbf{F}(0)\|_{\Gamma,-1/2}^2] +$$
$$+ \int_0^t [\|\mathbf{f}_0^{\cdot}\|_{-1}^2 + \|\mathbf{F}^{\cdot}\|_{\Gamma,-1/2}^2 + (1+c^2+L^2)\|\mathbf{v}^{(m)}\|_1^2 +$$
$$+ \|\mathbf{u}_0^{\cdot}\|_1^2 + L^2\|\mathbf{u}_0\|_1^2]\,dt$$

Здесь ε — любое положительное число, c — константа в неравенстве (1.6), $\|\cdot\|_{\Gamma,-1/2}$ — норма в $H_{-1/2}(\Gamma)$.

Согласно (2.2)

$$\mathrm{E}[\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0] \geqslant k_1\|\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0\|_1^2 - \varkappa\|\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0\|_0^2 \tag{2.11}$$

$$\|\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0\|_0^2 \leqslant 2\|\mathbf{v}^{(m)}(0) + \mathbf{u}_0(0)\|_0^2 + c_1\int_0^t \|\mathbf{v}^{\cdot(m)} + \mathbf{u}_0^{\cdot}\|_0^2\,dt \tag{2.12}$$

Здесь c_1 — положительная константа, общая для всех функций из $H_0(\Omega)$.

Неравенства (2.10) — (2.12) позволяют получить из (2.9) оценку

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(m)}\|_0^2 + k_1\|\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0\|_1^2 - \frac{\varepsilon}{2}(1+c^2)\|\mathbf{v}^{(m)}\|_1^2 \leqslant \tag{2.13}$$
$$\leqslant \Psi_1(t) + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}^{\cdot(m)}(0)\|_0^2 + \int_0^t [(1+c^2+L^2)\|\mathbf{v}^{(m)}\|_1^2 +$$
$$+ 2\varkappa c_1\|\mathbf{v}^{\cdot(m)}\|_0^2]\,dt$$
$$\Psi_1(t) = \mathrm{E}[\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0(0)] + \frac{1}{2\varepsilon}(\|\mathbf{f}_0\|_{-1}^2 + \|\mathbf{F}\|_{\Gamma,-1/2}^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}[\|\mathbf{f}_0(0)\|_{-1}^2 + (1+c^2)\|\mathbf{v}_0\|_1^2 + \|\mathbf{F}(0)\|_{\Gamma,-1/2}^2] +$$
$$+ 2\varkappa\|\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0(0)\|_0^2 + \int_0^t (\|\mathbf{f}_0^{\cdot}\|_{-1}^2 + \|\mathbf{F}^{\cdot}\|_{\Gamma,-1/2}^2 +$$
$$+ \|\mathbf{u}_0^{\cdot}\|_1^2 + L^2\|\mathbf{u}_0\|_1^2 + 2\varkappa c_1\|\mathbf{u}_0^{\cdot}\|_0^2)\,dt$$

Принимая во внимание неравенство $\|\mathbf{v}^{(m)} + \mathbf{u}_0\|_1^2 \geqslant 1/2\|\mathbf{v}^{(m)}\|_1^2 - \|\mathbf{u}_0\|_1^2$, выберем ε так, чтобы $1/2[k_1 - \varepsilon(1+c^2)] = \mu_1 > 0$. Тогда из (2.13) и неравенства $\|\mathbf{v}^{\cdot(m)}(0)\|_0 \leqslant \|\mathbf{v}_0\|_0$ имеем

$$\alpha_1\varphi_m(t) \leqslant \Psi_2(t) + \alpha_2\int_0^t \varphi_m(t)\,dt \quad (\varphi_m(t) = \|\mathbf{v}^{\cdot(m)}\|_0^2 + \|\mathbf{v}^{(m)}\|_1^2) \tag{2.14}$$
$$\alpha_1 = \min(1/2, \mu_1), \quad \alpha_2 = \max(1 + c^2 + L^2, 2\varkappa c_1)$$
$$\Psi_2(t) = \Psi_1(t) + 1/2\|\mathbf{v}_0^{\cdot}\|_0^2 + k_1\|\mathbf{u}_0\|_1^2$$

Функция Ψ_2 положительна, ограничена и не зависит от m. Пользуясь неравенством Гроноулла для оценки (2.14) [3], имеем

$$\varphi_m(t) \leqslant \alpha_1^{-1}\Psi_2^* \exp(\alpha_2\alpha_1^{-1}t), \quad \Psi_2^* = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \Psi_2(t)$$

Следствия:

1) $\mathbf{v}^{(m)}$ (соответственно $\mathbf{v}^{\cdot(m)}$) остается ограниченной в $L_\infty(0, T_m; V_0)$ (соответственно в $L_\infty(0, T_m; H_0)$).

2) Решение $\mathbf{v}^{(m)}$ может быть продолжено на некоторый отрезок времени T для любого m.

3) Для функций $\mathbf{v}^{(m)}$ и $\mathbf{v}^{\cdot(m)}$ имеем

$$\mathbf{v}^{(m)} \in L_\infty(0, T; V_0), \quad \mathbf{v}^{\cdot(m)} \in L_\infty(0, T; H_0) \tag{2.15}$$

Сходимость последовательности приближенных решений. Из (2.15) следует, что из последовательности $\mathbf{v}^{(m)}$ можно выделить подпоследовательность $\mathbf{v}^{(\mu)}$, такую, что $\mathbf{v}^{(\mu)}$ ($\mathbf{v}^{\cdot(\mu)}$) слабо сходится к $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}^\cdot$) в $L_\infty(0, T; V_0)$ (соответственно в $L_\infty(0, T; H_0)$).

Покажем, что $\mathbf{v}(t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям (1.7). Введем пространство функций φ

$$G = \left\{\varphi : \varphi = \sum_{i=1}^{\mu_0} \varphi_i(t)\mathbf{w}_i, \ \varphi_i \in C^1([0, T]), \varphi_i(T) = 0\right\}$$

Здесь μ_0 — конечное целое число. Заменяя в (2.6) $\delta\mathbf{v}$ на φ и интегрируя полученное выражение, найдем

$$\int_0^T \{-(\mathbf{v}^{\cdot(\mu)}, \varphi^\cdot) + (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v}^{(\mu)} + \mathbf{u}_0], \varphi) - (\mathbf{f}_0, \varphi) - (\mathbf{F}, \varphi)_\Gamma\}\,dt = \tag{2.16}$$
$$= (\mathbf{v}_0^{\cdot(\mu)}, \varphi(0)), \quad \forall\varphi \in G \quad (\mu = m \geqslant \mu_0)$$

Переходя к пределу по μ в (2.16), получим

$$\int_0^T \{-(\mathbf{v}^\cdot, \varphi^\cdot) + (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v} + \mathbf{u}_0], \varphi) - (\mathbf{f}_0, \varphi) - (\mathbf{F}, \varphi)_\Gamma\}\,dt = (\mathbf{v}_0^\cdot, \varphi(0)), \tag{2.17}$$
$$\forall\varphi \in G$$

Так как конечные линейные комбинации $\mathbf{w}_i$ плотны в V_0, то (2.17) справедливо для любого $\varphi \in C^1([0, T]; V_0)$, $\varphi(T) = 0$. Следовательно, в смысле распределений на $[0, T]$ со значениями в V_0 справедливо равенство

$$\mathbf{v}^{\cdot\cdot} + \nabla \mathrm{E}[\mathbf{v} + \mathbf{u}_0] = \Phi \quad ((\Phi, \varphi) \equiv (\mathbf{f}_0, \varphi) + (\mathbf{F}, \varphi)_\Gamma) \tag{2.18}$$

Отсюда следует $\mathbf{v}^{\cdot\cdot} \in L_\infty(0, T; V')$. Убедимся, что $\mathbf{v}(t)$ удовлетворяет начальным условиям (1.7). Сравним скалярное произведение (2.18) и $\varphi \in G$ с (2.17). Получим

$$(\mathbf{v}_0^\cdot, \varphi(0)) = (\mathbf{v}^\cdot(0), \varphi(0)) \quad \forall\varphi \in G$$

Следовательно, $\mathbf{v}^\cdot(0) = \mathbf{v}_0^\cdot$. Из сходимости последовательности приближенных решений вытекает, что $\mathbf{v}^{(\mu)} = \mathbf{v}_0 \to \mathbf{v}(0)$, а, значит, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Так как $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$, приходим к выводу, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

3. Единственность решений. Докажем две теоремы, устанавливающие единственность решений в случае стационарности решения и случае достаточной гладкости решения, а именно, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^{\cdot} \in H_1(\Omega)$.

Введем функционал Гамильтона

$$H = {}^1/_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \mathrm{E}[\mathbf{v} + \mathbf{u}_0] - (\mathbf{\Phi}(t), \mathbf{v}) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{v}^{\cdot}$, $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_0, \mathbf{v}) + (\mathbf{F}, \mathbf{v})_\Gamma$, $\forall \mathbf{v} \in V_0$. Заменим вариационное уравнение (1.7) каноническими уравнениями

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}/dt &= -\nabla_v H \equiv -\nabla \mathrm{E}[\mathbf{v} + \mathbf{u}_0] + \mathbf{\Phi}(t) \\ d\mathbf{v}/dt &= \nabla_p H \equiv \mathbf{p} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Первое уравнение (3.2) рассматривается в пространстве $H_{-1}(\Omega)$, а второе — в $H_0(\Omega)$.

Предположим, что $(\mathbf{p}, \mathbf{v})$, $(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}, \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ — два решения уравнений (3.2), отвечающие одним и тем же начальным условиям ($\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{v}$ в начальный момент равны нулю). Тогда функции $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{v}$ являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} d\Delta\mathbf{p}/dt &= -(\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u} + \Delta\mathbf{v}] - \nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}]) \\ d\Delta\mathbf{v}/dt &= \Delta\mathbf{p} \quad (\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}_0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Определим функционал $W(\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{v}, t)$ согласно равенству

$$W = {}^1/_2(\Delta\mathbf{p}, \Delta\mathbf{p}) + \mathrm{E}[\mathbf{u} + \Delta\mathbf{v}] - \mathrm{E}[\mathbf{u}] - (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \Delta\mathbf{v}) \tag{3.4}$$

Заметим, что он является функционалом Гамильтона для уравнений (3.3), а, значит, его полная производная в силу уравнений (3.3) имеет вид

$$dW/dt = \partial W/\partial t = (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u} + \Delta\mathbf{v}] - \nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \mathbf{u}^{\cdot}) - (\nabla^2 \mathrm{E}[\mathbf{u}]\mathbf{u}^{\cdot}, \Delta\mathbf{v}) \tag{3.5}$$

Теорема (*стационарный случай*). Пусть решение $\mathbf{v}$ уравнений (1.7) таково, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$ не зависит от времени, и функционал $\mathrm{E}[\mathbf{u}]$ выпуклый, т. е.

$$\begin{gathered} \mathrm{E}[\mathbf{u} + \Delta\mathbf{v}] - \mathrm{E}[\mathbf{u}] - (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \Delta\mathbf{v}) \geqslant \alpha \|\Delta\mathbf{v}\|_1^2 \\ (\alpha > 0, \|\Delta\mathbf{v}\|_1 < h, h > 0) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Тогда решение $\mathbf{v}$ единственно.

Замечание 4. Стационарное решение соответствует либо положению равновесия системы, для чего нужно предполагать стационарными граничные условия (1.5) и внешние силы в (1.4), либо случаю, когда деформированное тело перемещается как твердое тело.

Замечание 5. Условие (3.6) можно заменить условием на вторую вариацию по Фреше функционала $\mathrm{E}[\mathbf{u}]$:

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|_1 < h\,(h > 0), \quad (\nabla^2 \mathrm{E}[\mathbf{w}]\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) \geqslant 2\alpha \|\Delta\mathbf{v}\|_1^2$$

Действительно, пусть $F_1(\tau)$: $[0, 1] \to R^1$ и $F_1(\tau) = \mathrm{E}[\mathbf{u} + \tau\Delta\mathbf{v}] - \mathrm{E}[\mathbf{u}] - (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \tau\Delta\mathbf{v})$. Имеем

$$\begin{gathered} dF_1(\tau)/d\tau = (\nabla \mathrm{E}[\mathbf{u} + \tau\Delta\mathbf{v}] - \nabla \mathrm{E}[\mathbf{u}], \Delta\mathbf{v}) \\ \|\Delta\mathbf{v}\|_1 < h, \; d^2F_1(\tau)/d\tau^2 = (\nabla^2 \mathrm{E}[\mathbf{u} + \tau\Delta\mathbf{v}]\Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) \geqslant 2\alpha \|\Delta\mathbf{v}\|_1^2 \end{gathered} \tag{3.7}$$

Интегрируя второе неравенство (3.7) дважды по τ, получим (3.6).

Доказательство теоремы. Поскольку u не зависит от времени, функционал W, определяемый равенством (3.4), также не содержит явно времени. Тогда из (3.5) следует, что функционал $W(\Delta p, \Delta v)$ постоянен и равен нулю, так как в начальный момент $\Delta p = \Delta v = 0$. В силу (3.6) при $\| \Delta v \|_1 < h$ имеем

$$W(\Delta p, \Delta v) \geqslant {}^1/_2 \| \Delta p \|_0^2 + \alpha \| \Delta v \|_1^2$$

Следовательно, при $t \in [0, T]$ $\Delta p = \Delta v = 0$ и решение единственно.

Теорема (динамический случай). Если

$$\mathbf{u}^\cdot = \mathbf{v}^\cdot + \mathbf{u}_0^\cdot \in H_1(\Omega), \quad \| \mathbf{u}^\cdot \|_1 < c_2 \tag{3.8}$$
$$\mathbf{w} \in V_0, \quad \| \mathbf{w} \|_1 < c_3, \quad (\nabla^3 E[\mathbf{w}](\Delta v, \Delta v), \mathbf{u}^\cdot) \leqslant M \| \Delta v \|_1^2$$

где c_2, c_3, M — положительные константы, и справедливо условие (3.6), то решение $\mathbf{v}(t)$ уравнений (1.7) единственно.

Замечание 6. Первое условие (3.8) выполняется, если $\mathbf{v}^\cdot \in H_1(\Omega)$, так как $\mathbf{u}_0^\cdot \in V_0$ согласно замечанию 2.

Доказательство теоремы. Рассмотрим функцию

$$F_2(\tau) = (\nabla E[\mathbf{u} + \tau \Delta v] - \nabla E[\mathbf{u}], \mathbf{u}^\cdot) - $$
$$- (\nabla^2 E[\mathbf{u}] \mathbf{u}^\cdot, \tau \Delta v) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

для которой справедливы соотношения

$$F_2(0) = 0, \ F_2(1) = \partial W / \partial t, \quad dF_2(0) / d\tau = 0 \tag{3.9}$$
$$d^2 F_2 / d\tau^2 = (\nabla^3 E[\mathbf{u} + \tau \Delta v](\Delta v, \nabla v), \mathbf{u}^\cdot)$$

Здесь $\nabla^2 E[\mathbf{u}]$ и $\nabla^3 E[\mathbf{u}]$ — второй и третий дифференциалы по Фреше функционала $E[\mathbf{u}]$ [6].

Оценивая правую часть последнего соотношения (3.9) с учетом (3.8), приходим к неравенству

$$d^2 F_2 / d\tau^2 \leqslant M \| \Delta v \|_1^2$$

Интегрируя дважды по τ, получим

$$F_2(1) = \partial W / \partial t \leqslant {}^1/_2 M \| \Delta v \|_1^2$$

Интегрирование (3.5) дает

$$W(t) - W(0) \leqslant \frac{1}{2} M \int_0^t \| \Delta v \|_1^2 dt \tag{3.10}$$

Заметим, что $W(0) = 0$, и, согласно (3.6), усилим неравенство (3.10):

$$\frac{1}{2} \| \Delta p \|_0^2 + \alpha \| \Delta v \|_1^2 \leqslant \frac{M}{2\alpha} \int_0^t \left(\frac{1}{2} \| \Delta p \|_0^2 + \alpha \| \Delta v \|_1^2 \right) dt$$

Из неравенства Гроноулла следует

$$t \in [0, T], \quad {}^1/_2 \| \Delta p \|_0^2 + \alpha \| \Delta v \|_1^2 \leqslant 0$$

Последнее возможно при $\Delta p = \Delta v = 0$, следовательно, решение единственно.

Поступила 11 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duvaut G., Lions J.- L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris, Dunod 1972.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1976.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
5. *Eringen A. C.* Non-linear theory of continuous media. New McGrow-Hill, 1964.
6. *Бирман М. Ш., Виленкин Н. Я., Горин Е. А. и др.* Функциональный анализ (под ред. С. Г. Крейна). М., «Наука», 1972.