

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПО КОНТУРУ

В. М. Александров, В. Б. Зеленцов

(Москва, Ростов-на-Дону)

Изучаются динамические задачи об изгибе плиты, прямоугольной в плане, боковые стороны которой шарнирно закреплены. На верхней грани задается смешанное граничное условие, а нижняя грань: а) шарнирно закреплена, б) заделана, в) свободна. Аналогично изучается задача об изгибе прямоугольной плиты с начальными усилиями в срединной плоскости плиты. На верхней грани задается смешанное граничное условие, а боковые грани и нижняя шарнирно закреплены. Смешанная краевая задача методом разделения переменных приводится к парному ряду. Аналогично [1,2] парный ряд сводится к некоторой сингулярной алгебраической системе первого рода, которая затем точно обращается [3], и получается новая бесконечная алгебраическая система второго рода. Для преодоления технических трудностей вводится специальная аппроксимация функции, входящей в первое соотношение парного ряда. Изучаются асимптотические свойства полученной бесконечной алгебраической системы. Показано, что система квазирегулярна при всех параметрах, входящих в задачу. На основании предыдущего исследуется возможность повышения эффективности метода и выделяется область параметров наибольшей эффективности работы метода для изучаемых задач. Полученный численный материал подтверждает высокую эффективность метода в весьма широком диапазоне изменения параметров. Результаты численного анализа представлены в виде графиков. Вопрос о собственных частотах поставленных задач не рассматривается.

1. Рассмотрим прямоугольную пластину длины $2b$ и высоты H . Уравнение колебания пластины в соответствии с теорией Кирхгоффа имеет вид [4]

$$(1.1) \quad D\Delta\Delta w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — прогиб пластины, D — ее изгибная жесткость, $q(x, y, t)$ — нормальная нагрузка. Далее будем полагать, что $q(x, y, t) = 0$. Для исследования гармонических колебаний пластины решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$(1.2) \quad w(x, y, t) = w(x, y) e^{-i\omega t}$$

Рассмотрим три варианта граничных условий на нижней грани пластины [4]:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \text{а) } w(x, H) = w(x, 0) = M_y(x, 0) = 0 \quad (|x| \leq b) \\ M_y(x, H) = 0 \quad (-b \leq x < -a, a < x \leq b) \\ w_y'(x, H) = \theta(x) \quad (|x| \leq a) \end{aligned}$$

$$\text{б) } w(x, H) = w(x, 0) = w_y'(x, 0) = 0 \quad (|x| \leq b)$$

$$M_y(x, H) = 0 \quad (-b \leq x < -a, a < x \leq b)$$

$$w_y'(x, H) = \theta(x) \quad (|x| \leq a)$$

$$\text{в) } w(x, H) = M_y(x, 0) = Q_y(x, 0) = 0 \quad (|x| \leq b)$$

$$M_y(x, H) = 0 \quad (-b \leq x \leq -a, a \leq x \leq b)$$

$$w_y'(x, H) = \theta(x) \quad (|x| \leq a)$$

Далее для простоты положено $\theta(x) = \theta = \text{const}$. После подстановки (1.2) в (1.1) получим уравнение для функции $w = w(x, y)$

$$D\Delta\Delta w - \rho h \omega^2 w = 0$$

Чтобы удовлетворить шарнирному закреплению на боковых гранях пластины, будем искать решение этого уравнения в виде

$$(1.4) \quad w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(y) \cos \left[\frac{\pi(1+2n)}{2b} x \right]$$

При выполнении граничных условий вида а) — в) смешанная задача сводится к следующему парному ряду ($q(\xi)$ — искомый реактивный момент в заделке, λ, β — безразмерные геометрические параметры):

$$(1.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n^\circ K(u_n h) \cos au_n x = 1 \quad (|x| \leq a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n^\circ \cos au_n x = 0 \quad (-b \leq x < -a, a < x \leq b)$$

$$u_n = \frac{\pi(1+2n)}{2b}, \quad q_n^\circ = \lambda \int_{-1}^1 q^\circ(\xi) \cos au_n \xi d\xi$$

$$q(\xi) = \beta (\lambda a)^{-1} D\theta q^\circ(\xi), \quad \lambda = a/b, \quad \beta = h/b$$

Для задач а) — в) функция $K(u)$ имеет вид

$$(1.6) \quad \text{а) } K(u) = \kappa^{-2} [\sigma_1 \text{cth } \sigma_1 - \sigma_2 \text{cth } \sigma_2]$$

$$\text{б) } K(u) = 2\kappa^{-2} [\sigma_1 \sigma_2 (1 - \text{ch } \sigma_1 \text{ch } \sigma_2) + u^2 \text{sh } \sigma_1 \text{sh } \sigma_2] R(u)$$

$$R(u) = [\sigma_1 \text{ch } \sigma_1 \text{sh } \sigma_1 - \sigma_2 \text{ch } \sigma_2 \text{sh } \sigma_1]^{-1}$$

$$\text{в) } K(u) = 2\kappa^{-2} R(u) \{ \sigma_1 \sigma_2 [(1 - \nu)^2 u^4 - \nu^4] +$$

$$+ u^2 \text{sh } \sigma_1 \text{sh } \sigma_2 [(1 - \nu)^2 u^4 -$$

$$- (1 - 2\nu) \kappa^4] - \sigma_1 \sigma_2 \text{ch } \sigma_1 \text{ch } \sigma_2 [(1 - \nu)^2 u^4 + \kappa^4] \}$$

$$R(u) = \{ \sigma_1 [(1 - \nu) u^2 - \kappa^2]^2 \text{ch } \sigma_1 \text{sh } \sigma_2 - \sigma_2 [(1 - \nu) u^2 + \kappa^2]^2 \text{sh } \sigma_1 \text{ch } \sigma_2 \}^{-1}$$

$$(\sigma_{1,2} = \sqrt{u^2 \pm \kappa^2}, \quad \kappa^2 = H^2 \omega \sqrt{\rho h D^{-1}})$$

где κ^2 — безразмерная обобщенная частота колебаний. Функции $K(u)$ задач а) — в) — мероморфные в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ и при определенных значениях κ имеют нули и полюса на действительной оси. Исследование функций $K(u)$ показывает, что все они четные и обладают одинаковыми асимптотическими свойствами

$$(1.7) \quad K(u) \sim A^\circ + O(u^2), \quad u \rightarrow 0 \quad (A^\circ = \lim_{u \rightarrow 0} K(u))$$

$$K(u) \sim u^{-1} + O(u^{-3}), \quad u \rightarrow \infty$$

Перечисленные свойства функции $K(u)$ дают возможность представить ее в виде отношения двух целых функций

$$(1.8) \quad K(u) = A^\circ \frac{P_1(u^2)}{P_2(u^2)} = A^\circ \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1 + u^2 \delta_i^{-2}}{1 + u^2 \gamma_i^{-2}}$$

где A° то же, что в (1.7), $i\delta_n$ и $i\gamma_n$ — счетное количество нулей и полюсов функции $K(u)$, лежащих в верхней полуплоскости, а конечное число их сходится на действительную ось.

2. Рассмотрим также прямоугольную пластину длины $2b$ и высоты H с начальными усилиями в срединной плоскости (задача г). Дифференциальное уравнение изгибных колебаний пластины имеет вид [4]

$$(2.1) \quad D\Delta\Delta w - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q$$

$$\left(\frac{\partial N_{11}}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_{22}}{\partial y} = 0 \right)$$

Здесь N_{ij} — усилия, действующие в срединной плоскости пластины, удовлетворяющие уравнениям, указанным в скобках; w, q, D, ρ, h те же, что и в (1.1).

Далее будем полагать, что $q(x, y, t) = 0$. Так как в дальнейшем будут изучаться гармонические колебания, то решение уравнения (2.1) естественно искать в виде (1.2). Граничные условия имеют вид условий а) в (1.3).

Как и в п. 1, $\theta(x) = \theta = \text{const}$. Предположим, что $N_{12} = 0$, и введем обозначения $N_{ii}D^{-1}2^{-1} = q_i^2$ ($i = 1, 2$). После подстановки (1.2) в (2.1) получим уравнение для $w(x, y)$

$$(2.2) \quad D\Delta\Delta w - \rho h \omega^2 w = 2Dq_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2Dq_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Далее везде $q_i = \text{const}$.

Аналогично п. 1, чтобы удовлетворить шарнирному закреплению на боковых гранях пластины, будем искать решение уравнения (2.2) в виде (1.4).

Выполнив граничные условия а) в (1.3), смешанную задачу приведем к решению парного ряда (1.5), где функция $K(u)$ имеет вид (κ то же, что в (1.6))

$$\text{г) } K(u) = L^{-1/2} [\sigma_1 \text{cth } \sigma_1 - \sigma_2 \text{cth } \sigma_2]$$

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{u^2 + q_2^2 \pm L^{1/2}}, \quad L = u^2 (q_2^2 - q_1^2) + \kappa^4 + q_2^4$$

Рассмотрим отдельно случаи для q_i ($i = 1, 2$).

Пусть 1) $q_1 = q_2$, тогда функция $K(u)$ — мероморфная в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, в случае 2) $q_2 > q_1$ функция $K(u)$ в комплексной плоскости имеет точки ветвления при $u = \pm iu^*$, а в случае 3) $q_1 > q_2$ точки ветвления выходят на действительную ось $u = \pm u^*$ ($u^* = [(\kappa^4 + q_2^4)(q_1^2 - q_2^2)^{-1}]^{1/2}$).

Исследование функции $K(u)$ показывает, что она четная и обладает асимптотическими свойствами (1.7).

Случай 1) полностью совпадает со случаями, рассмотренными в п. 1. В случае 3) в плоскости $u = \sigma + i\tau$ проведем разрезы параллельно мни-

мой оси — в правой полуплоскости вверх, а в левой — вниз. Ветвь в разрезанной плоскости фиксируем условием $\arg [K(u)] = 0$ при $u \rightarrow \infty$. В случае 2) точки ветвления разрезом соединяем через бесконечно удаленную точку.

Далее, функция $K(u)$ аппроксимируется в сколь угодно малой окрестности действительной оси функцией $K^*(u)$, мероморфной во всей комплексной плоскости и имеющей асимптотические свойства (1.7). Следовательно, $K^*(u)$ можно представить в виде (1.8).

3. Учитывая свойства $K(u)$, парный ряд (1.5) можно привести к бесконечной алгебраической системе [1,2] вида

$$(3.1) \quad CX = F$$

Из матрицы C выделяется нерегулярная матрица A , и система (3.1) принимает вид (γ_m и δ_n те же, что и в (1.8))

$$(3.2) \quad AX = BX + F$$

$$A = \{a_{nm}\} = \{(\gamma_m - \delta_n)^{-1}\}, \quad B = \{b_{mk}\}, \quad F = \{f_m\}, \quad X = \{x_n\}$$

$$(3.3) \quad b_{mk} = \frac{2\delta_k(c_m + d_k)}{(1 + c_m)(1 + d_k)(\gamma_m^2 - \delta_k^2)}$$

$$c_m = \exp(-2\gamma_m(1 - \lambda)\beta^{-1}), \quad d_k = \exp(-2\delta_k\lambda\beta^{-1})$$

$$f_m = -K^{-1}(0)\gamma_m^{-1}$$

Далее, обращая точно матрицу A с помощью интегрального оператора Винера — Хопфа [1,3] по формуле

$$(3.4) \quad \{(\gamma_m - \delta_n)^{-1}\} = \{[K^{-1}(\gamma_m)]' K_+'(-\delta_n)(\gamma_m - \delta_n)\}^{-1}$$

приходим к системе второго рода

$$(3.5) \quad X = A^{-1}BX + A^{-1}F$$

Здесь сделаем отступление и исследуем систему второго рода, полученную в [1,2], так как в дальнейшем потребуются ее асимптотические свойства. Бесконечная алгебраическая система в [1,2] после регуляризации принимает вид (3.5), где при аппроксимации $K(u) \approx \text{th}(A^\circ u)$ u^{-1} имеют место соотношения

$$(3.6) \quad A^{-1} = \{a_{nm}^\circ\}, \quad a_{nm}^\circ = \frac{(2m-3)!!(2n-1)!!}{A^\circ(2m-2)!!(2n-2)!!(2n-2m+1)}$$

$$\gamma_m = \pi(A^\circ)^{-1}(m - 1/2), \quad \delta_k = \pi(A^\circ)^{-1}k \quad (k, m = 1, 2, \dots)$$

($B = \{b_{nk}\}$ и $F = \{f_m\}$ те же, что в (3.5)).

Далее, исследуем матрицу $A^{-1}B = G$. Ее элементы имеют вид

$$g_{nk} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^\circ b_{mk}$$

Исследование g_{nk} при больших номерах k проводилось при помощи формулы суммирования Эйлера — Маклорена и дало [5,6]

$$(3.7) \quad \begin{aligned} g_{nk} &\sim \frac{M_1}{k} + O\left(\frac{\ln k}{k\sqrt{k}}\right), \quad k \gg 1, \quad M_1 < \infty \\ g_{nk} &\sim \frac{M_2}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right), \quad n \gg 1, \quad M_2 < \infty \\ l_n &\sim \frac{M_3}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right), \quad A^{-1}F = \{l_k\}, \quad M_3 < \infty \end{aligned}$$

Оценки (3.7) позволяют утверждать, что бесконечная алгебраическая система вида (3.5) квазирегулярна и, следовательно, ее можно решать методом редукции [7].

Далее исследуем решение парного ряда, полученное в [1,2]. Оно записывалось в виде

$$(3.8) \quad \frac{a}{D\theta} q(x) = \frac{\lambda}{\beta} \left[K^{-1}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \operatorname{ch} \frac{a\delta_n x}{h} \operatorname{ch}^{-1} \frac{a\delta_n}{h} \right]$$

где x_k те же, что в (3.2), (3.3). Проанализируем, как влияют параметры, входящие в ряд (3.8), на его сходимость. Для этого выпишем n -й член ряда (3.8) и преобразуем его, учитывая последнюю оценку в (3.7), к виду

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x_n \operatorname{ch} \frac{a\delta_n x}{h} \operatorname{ch}^{-1} \frac{a\delta_n}{h} &\approx \frac{M_4}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{\delta_n a}{h}(1-x)\right) + \\ &+ O\left(\exp\left(-\frac{\delta_n a}{h}(1+x)\right)\right) \\ n &\gg 1, \quad M_4 < \infty \end{aligned}$$

Можно сделать вывод, что радиус сходимости ряда $x < 1$. При $x = 1$ ряд (3.8) расходится, а последняя оценка в (3.7) дает возможность заключить, что $q(x)$ при $x = 1$ имеет корневую особенность. Необходимо отметить (это следует из (3.9)), что ряд тем быстрее сходится, т. е. метод тем лучше работает, чем больше a/h , а также если $\delta_n \gg 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Оказывается, если для функции $K(u)$ ввести аппроксимацию

$$(3.10) \quad K(u) = \frac{\operatorname{th} \varepsilon A^\circ u}{u} \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + a_i^2}{u^2 + b_i^2}, \quad \varepsilon \prod_{i=1}^N \frac{a_i^2}{b_i^2} = 1, \quad \varepsilon \ll 1$$

то при такой аппроксимации нули $\operatorname{th} \varepsilon A^\circ u$, по которым строится решение, очень велики по сравнению с a_i , и основной вклад в решение дают нули a_i . Функции вида

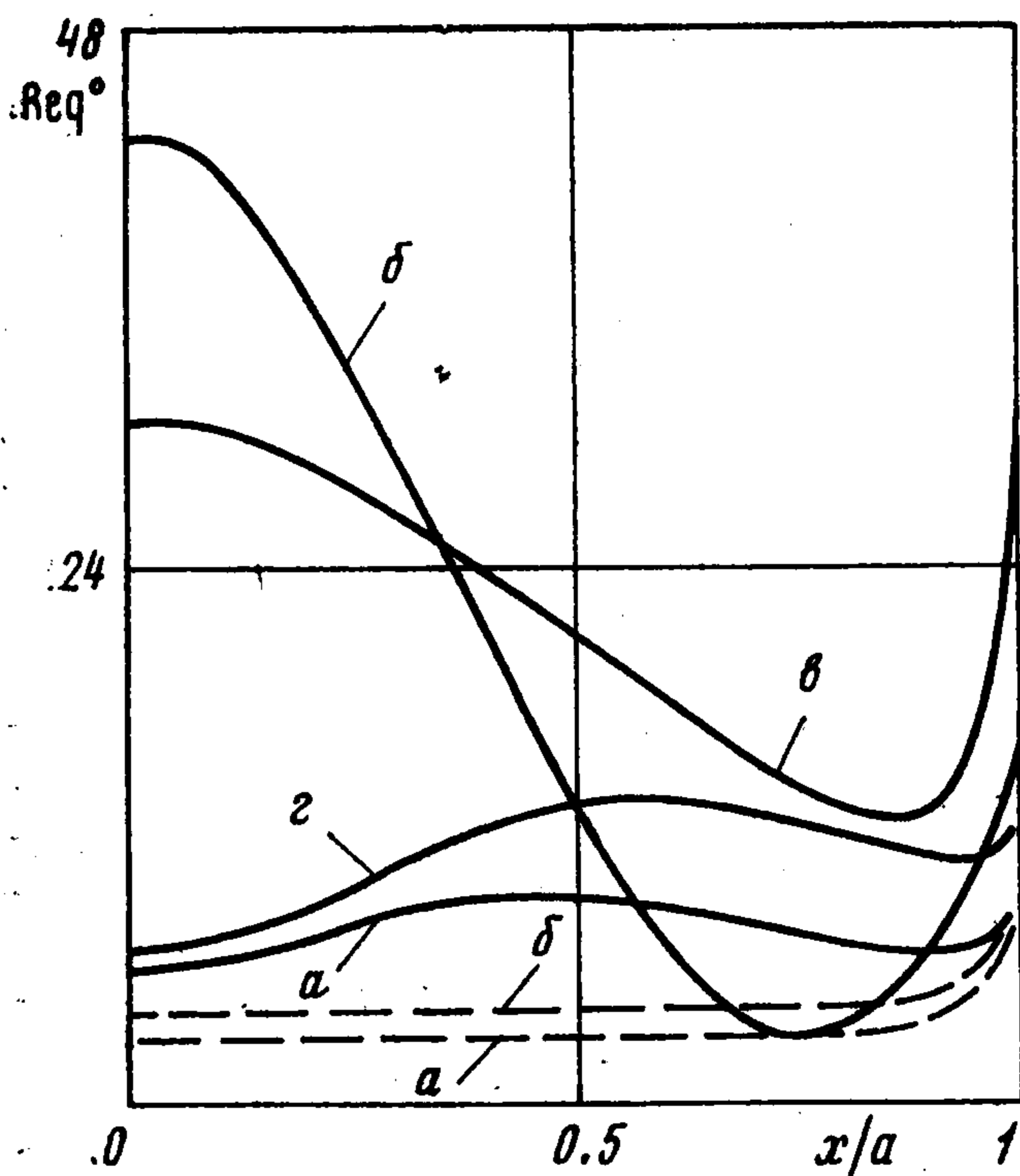
$$K_1(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u - 2u}{2u \operatorname{sh}^2 u}, \quad K_2(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1 - 2u^2}{u (\operatorname{sh} 2u - 2u)}$$

можно аппроксимировать на действительной оси выражением (3.10) при $N = 3$, где для $K_1(u)$ $a_1 = 14.042$, $a_2 = 5.1949$, $a_3 = 80.217$, $b_1 = 28.045$, $b_2 = 2.4173$, $b_3 = 8.6316$, $A^\circ = 0.6667$; для $K_2(u)$ $a_1 = 1.7086$, $a_2 = 4.6173$, $a_3 = 66.597$, $b_1 = 11.778$, $b_2 = 2.6227$, $b_3 = 1.7008$, $A^\circ = 0.5$ ($\varepsilon = 0.01$). Погрешность аппроксимации не превышает 3%. Здесь использовался метод аппроксимации, аналогичный примененному в работе¹.

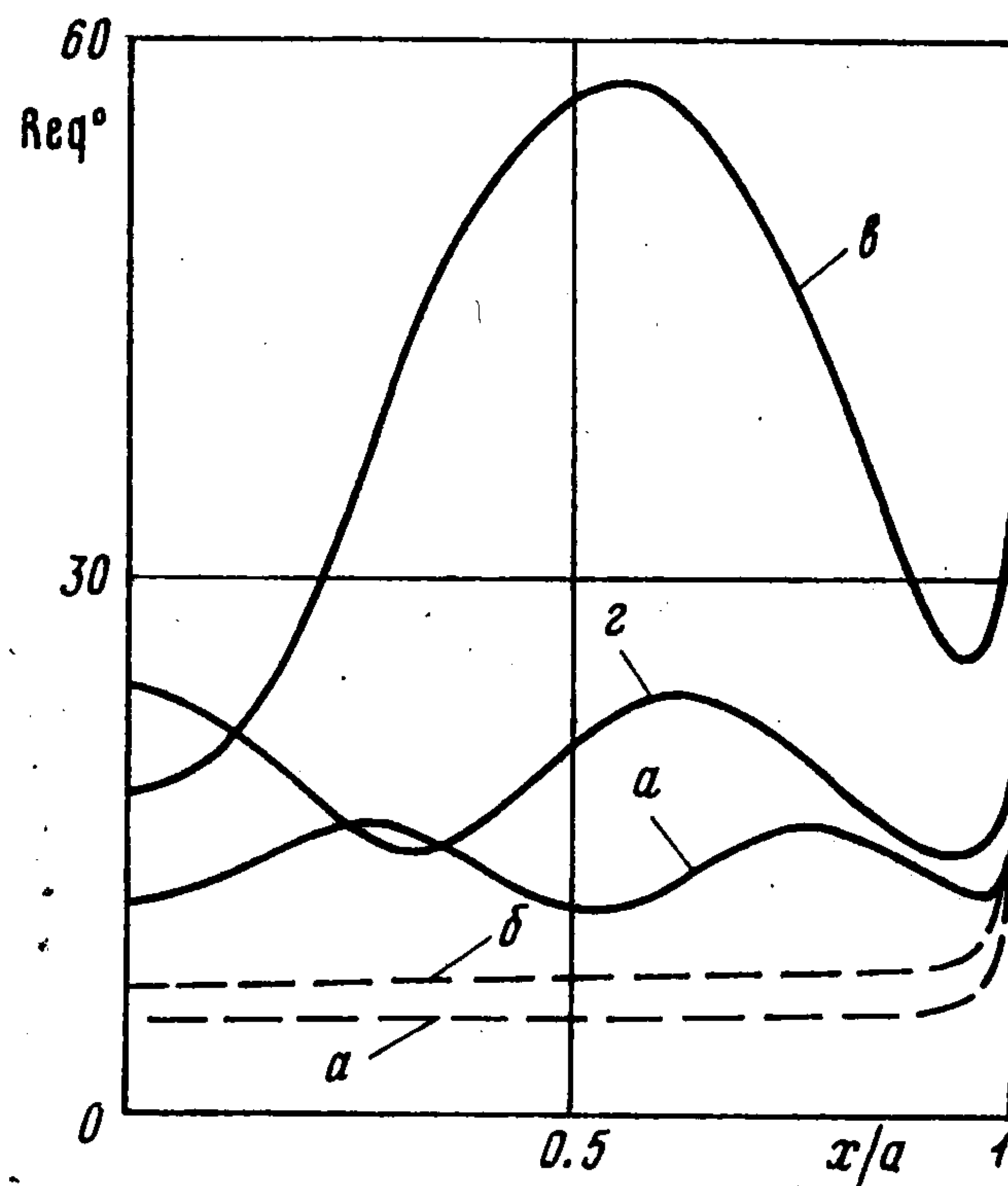
¹ Зеленцов В. Б. Метод парных рядов — уравнений в задаче об изгибе круглой пластины со смешанными условиями закрепления. Смешанные задачи механики деформируемого тела. Всес. научн. конф. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону, ч. 2, 1977.

Численные расчеты показывают, что для одного и того же значения a/h для достижения необходимой точности (четыре верные цифры) при аппроксимации (3.10) достаточно взять три уравнения бесконечной системы. Необходимо отметить, что метод работает тем лучше, чем больше $a/h = \lambda/\beta$ (в плоскости λ, β это область, где $\beta \ll \ll \alpha\lambda, \alpha > 1$). Числовые расчеты подтверждают указанные выводы.

На фиг. 1, 2 приведены штриховой линией графики реактивного момента в заделке соответственно для $\lambda = 0.7, \beta = 0.25$ и $\lambda = 0.9, \beta = 0.25$, вычисленного с помощью аппроксимации (3.10) при $N = 3$.



Фиг. 1



Фиг. 2

4. Для численного исследования поставленных в п. 1, 2 задач необходимо аппроксимировать, как и раньше, функцию $K(u)$ выражением, сходным с ней по асимптотическим свойствам и легко факторизуемым. Как отмечалось выше, при определенной обобщенной частоте κ в функции $K(u)$ появляются нули и полюса на действительной оси. Учитывая опыт работ [8-10], выделяя нули и полюса на действительной оси, аппроксимируем функцию $K(u)$ в окрестности действительной оси выражением вида

$$(4.1) \quad K(u) = \frac{\text{th } \varepsilon A^\circ u}{u} \prod_{i=1}^{N_1} (u^2 - \zeta_i^2)^{-1} \prod_{i=1}^{N_2} (u^2 - \xi_i^2) \prod_{i=1}^{N_3} (u^2 + a_i^2) \prod_{i=1}^{N_4} (u^2 + b_i^2)^{-1}$$

$$A^\circ = \lim_{u \rightarrow 0} K(u), \quad \varepsilon \ll 1$$

Здесь, как и раньше ξ_i, ζ_i — нули и полюса на действительной оси, a_i, b_i — параметры аппроксимации, N_3, N_4 — количество параметров аппроксимации. Ясно, что $N_1 + N_3 = N_2 + N_4$. Учитывая, что нули и полюса аппроксимаций функций, входящих в первое соотношение парного ряда (1.5), имеют одинаковую асимптотику по номеру, можно утверждать, что все оценки (3.7) с точностью до постоянных будут верны и для системы (3.5). Следовательно, система (3.5) квазирегулярна и может решаться методом редукции [7].

Для каждой задачи а) — в) был просчитан численный пример. После задания обобщенной частоты $\kappa = 5$ были найдены аппроксимации для функции $K(u)$ задач а) — г) при $\varepsilon = 0.01$, приведенные в таблице.

Также был рассмотрен пример для задачи г) при $q_1^2 = 5, q_2^2 = 0, \kappa = 5$. Ноль и полюс на действительной оси имеют значения $\xi_1 = 3.196407, \zeta_1 = 3.703872$. Сравнивая

ξ_1 (фазовые скорости реактивного момента) задачи а) и задачи г), видим, что начальные усилия q_2 сильнее влияют на фазовые скорости реактивного момента.

	а)	б)	в)	г)
A°	0.2592	0.08698	0.09565	0.1833
$N_1 = N_2$	1	1	2	1
$N_3 = N_4$	3	3	3	3
q_1^2	—	—	—	0
q_2^2	—	—	—	5
ξ_1	3.3732	2.0786	1.5863	2.7840
ξ_2	—	—	4.7454	—
ζ_1	3.8898	3.3732	2.7352	3.4283
ζ_2	—	—	4.8167	—
a_1	95.009	179.17	326910	224.48
a_2	0.6773	1.0875	15.598	0.6773
a_3	3.0166	4.3380	6.9051	3.0166
b_1	18.296	2.9641	5.3570	1.9296
b_2	0.7771	1.1968	6.8634	0.7771
b_3	11.847	14.682	54729	24.794

Все аппроксимации получены с ошибкой, меньшей 3%, на всей действительной оси. При сделанных здесь аппроксимациях, имея в виду все сказанное в п. 3 относительно эффективности метода, для достижения необходимой точности можно ограничиться $N_2 + N_3$ уравнениями бесконечной системы в широком диапазоне изменения параметров λ, β . Это наводит на мысль, что систему невысокого порядка не обязательно обращать точно по формулам (3.4), (3.5) (последнее приводит к громоздким формулам для элементов матрицы A^{-1}), а можно обращать ее численно на ЭВМ. Результаты расчетов не обнаружили расхождения в точности между численным обращением и точным во всех решаемых здесь задачах.

Решение парных рядов (1.5) для $q(x)$ дается формулой (3.8), причем

$$(4.2) \quad \delta_n = \{a_1, a_2, a_3, i\xi_l, \pi n (A^\circ \varepsilon)^{-1}\}, \quad |x| \leq 1$$

где $l = 1$ для задач а), б), г) и $l = 2$ для задачи в). Для иллюстрации на фиг. 1, 2 сплошными линиями приведены графики изменения $\operatorname{Re} q(x)$ для задач а) — г) соответственно для $\lambda = 0.7, \beta = 0.25$ и $\lambda = 0.9, \beta = 0.25$. Особенность в $q(x)$ при $x = 1$ можно выделить подобно [11]. Однако особой необходимости в этом нет, так как особенность проявляет себя только очень близко к краю заделки. Это нетрудно заметить при анализе формул (4.1), (4.2).

Обращает на себя внимание тот факт, что в системах, механически более жестких, нули и полюса выходят на действительную ось с увеличением обобщенной частоты позже, чем в системах менее жестких. При более высоких обобщенных частотах колебаний ($\kappa > 5$) использование уравнений модели Кирхгоффа — Лява может быть поставлено под сомнение. Поэтому при больших частотах целесообразнее использовать более точные прикладные модели изгиба плит [4].

Поступила 28 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных рядов — уравнений к бесконечным алгебраическим системам. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
2. Александров В. М. О решении одного класса парных уравнений. ДАН СССР, 1973, т. 240, № 1.
3. Бабешко В. А. Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
4. Прочность, устойчивость, колебания (под ред. И. А. Биргера), т. 3. М., «Машиностроение», 1968.
5. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М. — Л., Физматгиз, 1962.
8. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Koiter W. T. Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Proc. 1954, Bd 57, Nr 5.
10. Бабешко В. А., Векслер В. Е. Возбуждение вибрирующим штампом волн в слое. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
11. Александров В. М., Чебаков М. И. Метод парных рядов по функциям Бесселя в смешанных задачах теории упругости для круглой плиты. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.