Прикладная математика и механика. Том 43, 1979

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О СЛОЖНОМ СДВИГЕ

В. А. Ибрагимов

(Ивано-Франковск)

Получено точное решение задачи о сложном сдвиге полупространства с угловой в плане выточкой при законе упрочнения (1.1), использовавшемся ранее для анализа состояния около мягких концентраторов в рамках приближенного полуобратного метода В. В. Соколовского [1]. Указываются другие примеры задач о вырезах, допускающие замкнутые решения. Используется метод P-аналитических представлений решений [2]; приложения к аналогичным задачам при иных законах упрочнения содержатся в [3].

1. Примем соотношения деформационной теории без разгрузки с единой кривой

$$\tau = G\gamma/\sqrt{1+a^2\gamma^2} \tag{1.1}$$

Основные функции, связанные с преобразованием разрешающих уравнений статической антиплоской задачи к обобщенной системе Коши — Римана [2], запишутся так:

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+a^2\gamma^2}-1}{\sqrt{1+a^2\gamma^2}+1}, \quad p = \sqrt{\frac{\tau'\gamma}{\tau}} = -\operatorname{th}\eta \tag{1.2}$$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta}, \quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = -\frac{1}{\operatorname{sh}\eta} \quad \left(\eta<0;\ \tau_0 = \frac{G}{a},\quad \gamma_0 = \frac{1}{a}\right)$$

В соотношениях (1.2) и далее приняты обозначения работы [2]; постоянная интегрирования в первой из формул выбирается согласно условию $\eta \to 0$ при $\gamma \to \infty$.

Характеристика обобщенной аналитической функции $f(\zeta) = \alpha + i\beta$ имеет вид

$$P(\eta) = \frac{1}{p}\exp\left(\int\left(\frac{1}{p}-p\right)d\eta\right) = \operatorname{cth}^2\eta$$

поэтому общее решение системы представимо в виде линейной комбинации производных гармонической функции $u(\xi, \eta)$ [4]

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial\eta} - \operatorname{cth}\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}, \quad \alpha = -\frac{\partial u}{\partial\xi} + \operatorname{th}\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} \tag{1.3}$$

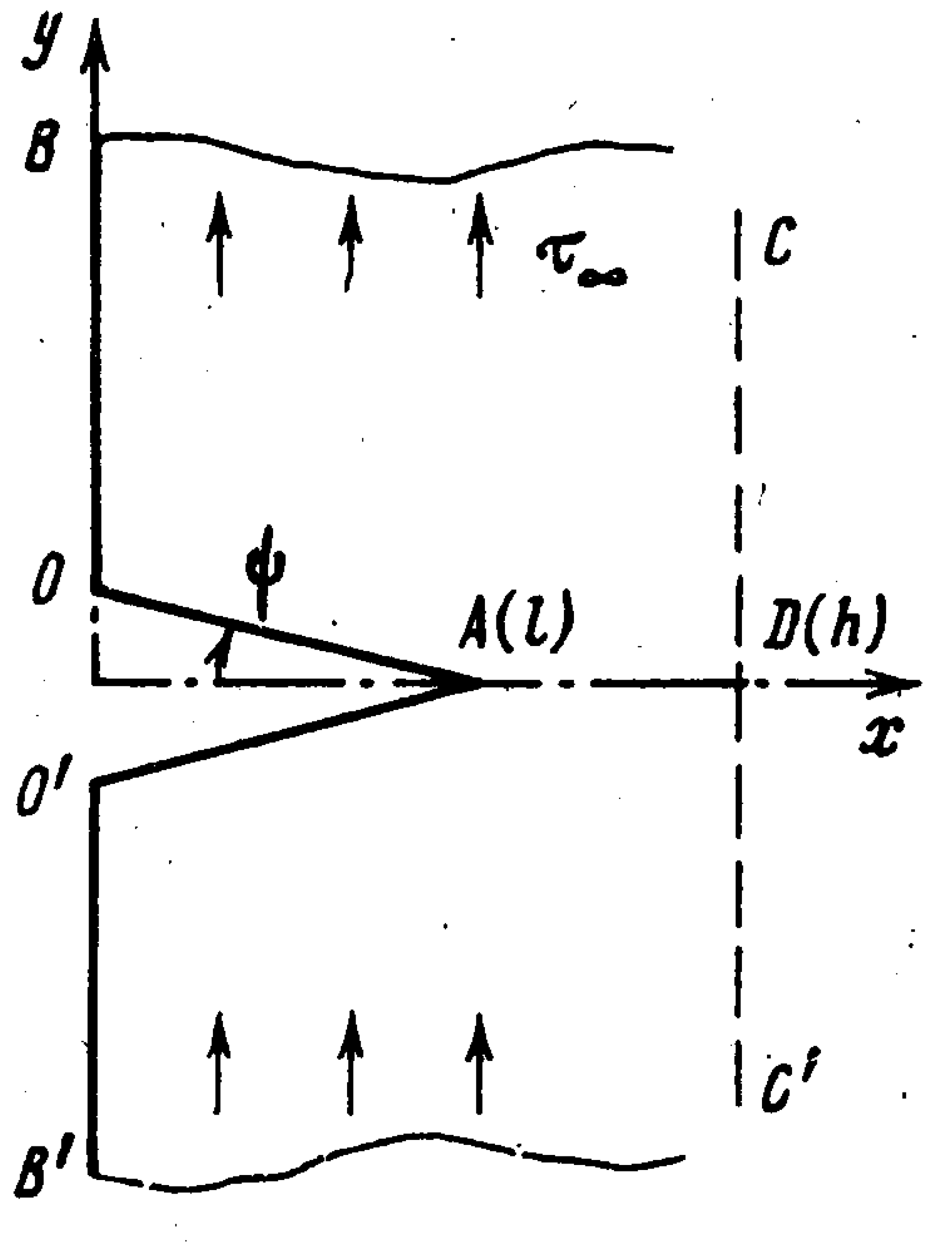
$$\beta(\xi, \eta) = (x\cos\xi - y\sin\xi)\,\gamma/\gamma_0 \tag{1.4}$$

$$\alpha(\xi, \eta) = (x\sin\xi + y\cos\xi)\,\tau/\tau_0$$

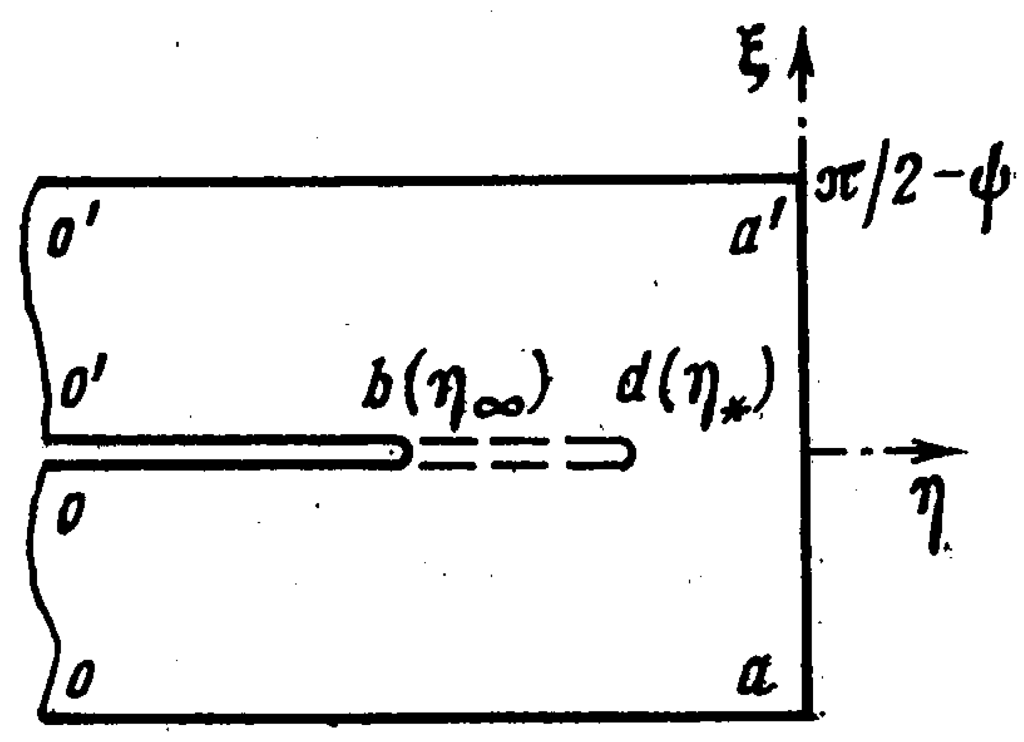
$$(\gamma_{yz} + i\gamma_{xz} = \gamma e^{i\xi})$$

Представление (1.3) позволяет построить в квадратурах ряд новых решений канонических задач о многоугольных вырезах (в частности, задач о трещинах) посредством сведения их к краевым задачам для аналитической функции $\Phi(\zeta) = \partial u / \partial\eta - i\partial u / \partial\xi$ комплексного переменного $\zeta = \eta + i\xi$.

2. Пусть полупространство, ослабленное выходящей на границу угловой выточкой глубины l, подвергнуто на бесконечности однородному сдвигу величины γ_∞ (фиг. 1). Используя соотношения (1.2), (1.4), можно



Фиг. 1



Фиг. 2

показать, что отображение области в плоскости x, y на плоскость η, ξ является полуполосой ($|\xi| \leqslant \pi / 2 - \psi$, $\eta < 0$) с разрезом вдоль луча ($\eta < \eta_\infty$, $\xi = 0$); соответствие точек при этом указано на фиг. 1, 2 одноименными буквами. Величина η_∞ определяется первой из формул (1.2) при $\gamma = \gamma_\infty$.

Для определения краевых условий заметим, что

$$\xi = 0, \quad x = 0 \quad (OB,\ O'B') \tag{2.1}$$

$$\xi = \pm(\pi / 2 - \psi), \quad (x - l)\sin\psi \mp y\cos\psi = 0 \quad (O'A),\ (OA)$$

поэтому, согласно (1.2) — (1.4), получаем

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial\eta} - \operatorname{cth}\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \begin{cases} 0, & (ob,\ o'b) \\ -l\sin\psi/\operatorname{sh}\eta, & (o'a',\ oa) \end{cases} \tag{2.2}$$

Интегрируя относительно функции $\partial u / \partial\eta$ обыкновенные уравнения (2.2) и учитывая очевидное вследствие (1.4) условие ее ограниченности при $\eta \to -\infty$, находим ($\operatorname{Re}\Phi = \partial u / \partial\eta$)

$$\operatorname{Re}\Phi = 0 \quad (ob,\ o'b), \quad \operatorname{Re}\Phi = le^{\eta}\sin\psi \ (oa,\ o'a') \tag{2.3}$$

Для любого $\xi \in [\psi - \pi / 2,\ \pi / 2 - \psi]$ при $\eta \to 0$ асимптотика функций, согласно (1.2), (1.4), имеет вид

$$\beta \sim -l\cos\xi / \operatorname{sh}\eta, \quad \alpha \sim l\sin\xi / \operatorname{ch}\eta$$

С помощью представлений (1.3) можно показать, что в окрестности отрезка aa' функция $u(\xi, \eta)$ имеет вид

$$u = l(c \operatorname{sh} \eta + \operatorname{ch} \eta) \cos \xi, \quad c = \mathrm{const}$$

поэтому краевое условие на aa' запишется так:

$$\operatorname{Im} \Phi = -\partial u / \partial \xi = l \sin \xi \quad (\eta = 0, \ |\xi| \leqslant \pi/2 - \psi) \tag{2.4}$$

Кроме того, имеем

$$\Phi(\zeta) \to 0 \quad (\zeta \to \infty) \tag{2.5}$$

Для решения линейной краевой задачи (2.3) — (2.5) совершим переход на плоскость вспомогательного переменного

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 = \exp(\zeta / \mu) \quad (\mu = 1 - 2\psi / \pi; \ 0 < \mu \leqslant 1)$$

Областью аналитичности функции $\Phi(\omega) = \Phi(\zeta(\omega))$ является правый полукруг ($|\omega| < 1$, $\omega_1 > 0$) с разрезом вдоль отрезка действительной оси ($0 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_\infty$), причем $\omega_\infty = \exp(\eta_\infty / \mu)$. Вводя аналитическую функцию

$$\Psi(\omega) = \Phi(\omega) + l\omega^\mu \quad (\arg \omega^\mu = \mu\pi / 2, \ \omega = i) \tag{2.6}$$

доопределим ее вне указанной области по правилу

$$\Psi(\omega) = \overline{\Psi(1/\overline{\omega})}, \ \Psi(\omega) = -\overline{\Psi(-\overline{\omega})} \tag{2.7}$$

Условия на скачках, согласно (2.3), (2.4), имеют вид

$$\Psi_+ - \Psi_- = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 (|\omega| = 1), \quad \Gamma_2 (\omega_1 = 0) \tag{2.8}$$

$$\Psi_+ + \Psi_- = 2g(\omega_1) \ \text{ на } \ \Gamma_3 (\omega_2 = 0, \ |\omega_1| < \omega_\infty, \ |\omega_1| > 1/\omega_\infty)$$

причем функция

$$g(\omega_1) = -l\,|\omega_1|^\mu \quad (0 < \omega_1 < \omega_\infty) \tag{2.9}$$

определяется на оставшихся участках линии Γ_3 согласно условиям (2.7) (например $g = l / |\omega_1|^\mu$ при $\omega_1 < -1 / \omega_\infty$). Предельные значения функции $\Psi(\omega)$ из верхней полуплоскости отмечены в последнем условии (2.8) индексом плюс.

Первые два краевые условия задачи сопряжения (2.8) осуществляют аналитическое продолжение решения через линии Γ_1, Γ_2.

Канонической функцией задачи является

$$X(\omega) = \omega / [(\omega^2 - \omega_\infty^2)(1 / \omega_\infty^2 - \omega^2)]^{1/2} \tag{2.10}$$

$$(X(\omega) = \overline{X(-\overline{\omega})}, \ X(\omega) = \overline{X(1/\overline{\omega})})$$

причем выберем ветвь радикала, для которой $\arg X = -\pi / 2$ на верхнем береге разреза ($|\omega_1| < \omega_\infty$).

Из соотношений (2.8) следует

$$\frac{\Psi_+}{X_+} - \frac{\Psi_-}{X_-} = 0 \quad (\Gamma_1, \Gamma_2), \quad \frac{\Psi_+}{X_+} - \frac{\Psi_-}{X_-} = \frac{2g}{X_+} \quad (\Gamma_3) \tag{2.11}$$

Учитывая условия симметрии (2.7), (2.8) и асимптотику (2.5), решение задачи (2.11) представим интегралом типа Коши

$$\frac{\Psi(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{2g(t)\,dt}{X_+(t)(t - \omega)}$$

Преобразуя последний с учетом нечетной функции $g(t)$, находим

$$\Psi'(\omega) = \frac{2}{\pi} X(\omega)\,\omega(\omega^2+1)\int_0^{\omega_\infty} \frac{g(t)(t^2-1)\,dt}{|X_+(t)|(t^2-\omega^2)(t^2\omega^2-1)} \quad (2.12)$$

что вместе с формулами (2.6), (2.9), (1.2) — (1.4) завершает решение задачи. В частности, для значения $\psi = 0$ ($\mu = 1$) получаем случай трещины-разреза, выходящей на границу полуплоскости.

Не приводя для краткости вычислений, укажем некоторые иные постановки антиплоских задач о жесткой концентрации, допускающие решение в замкнутом виде.

3. Для полуполосы с разрезом, ограниченной свободной от усилий плоскостью $x = h$ (след CC' показан на фиг. 1 штриховой линией), краевое условие на дополнительной части разреза bd в плоскости отображения определится аналогично (2.3) из уравнения $\beta = -h / \operatorname{sh}\eta$, так что

$$\operatorname{Re}\Phi = h(\operatorname{sh}\eta - \operatorname{th}\eta_* \operatorname{ch}\eta) \quad (\eta_\infty < \eta < \eta_*,\ \xi = 0) \quad (3.1)$$

Решение задачи (2.3), (2.4), (3.1) отыскивается аналогично указанному в п. 2, при этом значение η_*, отвечающее деформации сдвига в точке D, заранее неизвестно и определяется из условия (2.5). Вследствие симметрии указанное решение соответствует одновременно случаю плоскости, ослабленной вдоль действительной оси системой ромбических вырезов или разрезов с периодом $2h$.

Случаи плоскости с периодической вдоль направления сдвига или двоякопериодической системой вырезов также не доставляют осложнений. Используя условия симметрии решений относительно координатных линий $y = 2Hn$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) или $x = 2hk$, $y = 2Hn$ ($k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) соответственно, видим, что областью аналитичности функции $\Phi(\zeta)$ по-прежнему является полоса с разрезом. Краевые условия (2.3), (2.4) сохраняются; дополнительное условие на разрезе bd для однопериодической системы принимает вместо (3.1) вид

$$\operatorname{Im}\Phi = H(\operatorname{ch}\eta - C\operatorname{sh}\eta) \quad (\eta_{**} < \eta < \eta_\infty,\ \xi = 0) \quad (3.2)$$

Значения координаты η_{**} точки b и постоянной C отыскиваются из условий (2.5) и ограниченности решения при $\eta \to \eta_{**}$.

Для двоякопериодической системы вырезов к соотношению (3.2) следует добавить краевое условие (3.1) на вновь вводимой части разреза de ($\eta_\infty < \eta < \eta_*$, $\xi = 0$), причем постоянная η_* имеет тот же смысл, что и в формуле (3.1).

Поступила 27 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
2. *Ибрагимов В. А.* Об одном представлении решений задачи антиплоского деформирования физически нелинейной упругой среды. ПММ, 1977, т. 41, вып. 4.
3. *Ибрагимов В. А.* Об одном классе решений упругопластической задачи в условиях антиплоского состояния. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
4. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд-во Киевск. ун-та, 1965.