

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С ПОЛУНЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

А. Б. Ковура, В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

Рассматривается контактная задача о вдавливании без трения штампа в упругое полупространство. Боковая поверхность штампа представляет собой круговой цилиндр, а его основание — эллиптический параболоид. Исследуется случай, когда вдавливающая штамп сила достигает такого значения, что часть ребра, получаемого пересечением цилиндрической поверхности с поверхностью эллиптического параболоида, внедрится в границу упругого полупространства. В этом случае возникает смешанная задача теории упругости с частично неизвестной границей области раздела краевых условий на поверхности полупространства.

Определение давления под подошвой штампа посредством применения интегральных преобразований [1] и рядов по степеням малого параметра [2] сводится к построению тригонометрического разложения функции, характеризующей отклонение области контакта от круга. Для решения полученной задачи, которую можно рассматривать как обобщение проблемы гармонического анализа, предлагается приближенный способ, основанный на точечно-интерполяционной аппроксимации соотношений, определяющих искомую функцию [3], и анализе скорости убывания коэффициентов тригонометрического разложения.

Контактная задача теории упругости с частично известной границей зоны контакта, по-видимому, впервые была рассмотрена в статье [4], посвященной изучению давления наклонного кругового в плане штампа на упругое полупространство. В работе [5] построена структура решения и приведен числовой результат для задачи о вдавливании без трения в полупространство кругового штампа, основанием которого является эллиптический параболоид. Решения в [4, 5] получены на основании метода R -функций В. Л. Рвачева [6].

Ниже последняя из указанных задач решается с использованием классических методов математической физики в предположении, что эллиптический параболоид близок к круговому.

1. Пусть в упругое полупространство $z \leq 0$ вдавливается без трения жесткий штамп с цилиндрической боковой поверхностью $\rho = R$ и основанием в виде эллиптического параболоида (z, ρ, φ — цилиндрические координаты)

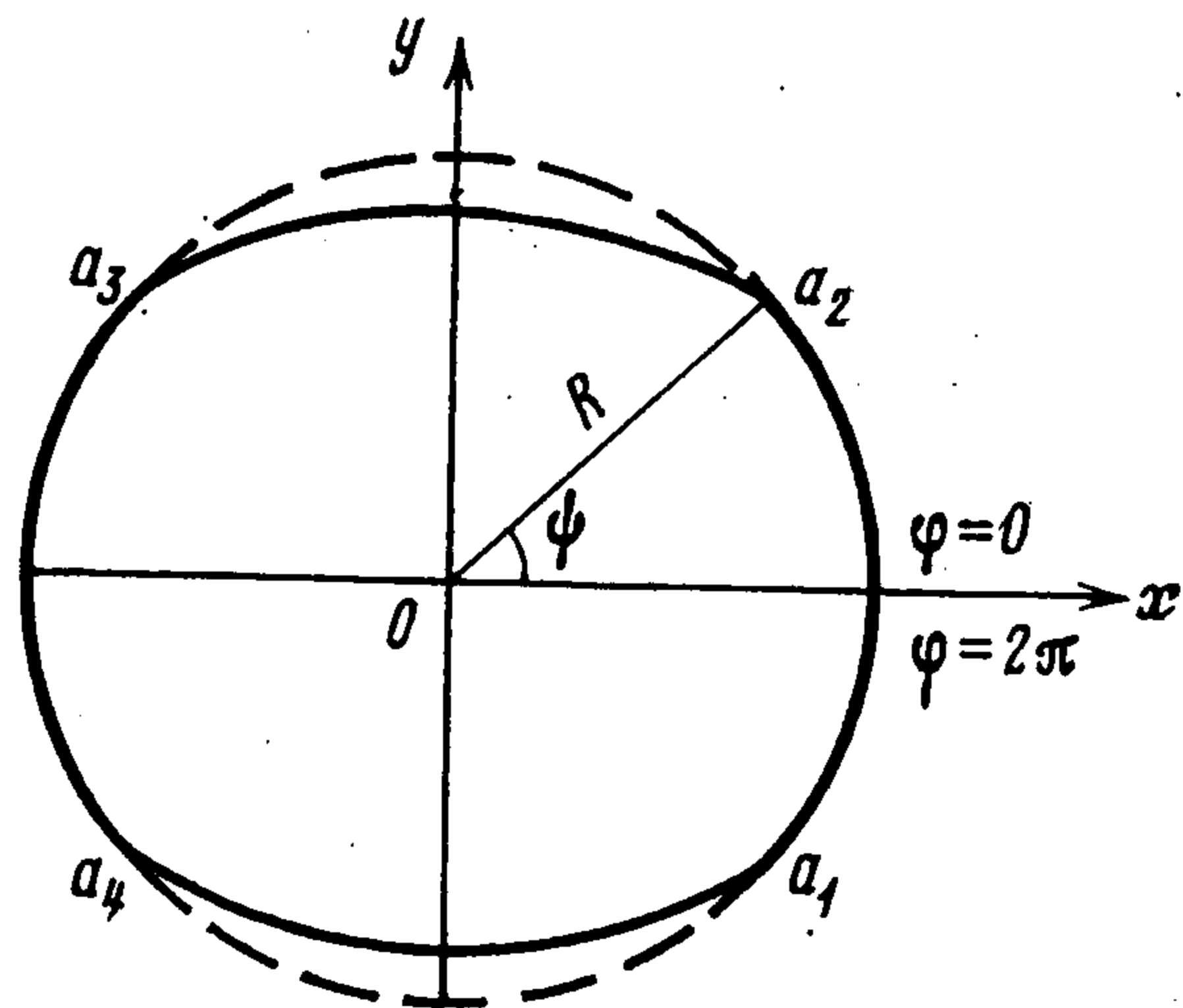
$$z = (A + \alpha \cos 2\varphi) \rho^2$$

$$A = 1/2 (a^{-2} + b^{-2}), \quad \alpha = 1/2 (a^{-2} - b^{-2}), \quad b < a$$

Величина $|\alpha|$ считается малой по сравнению с R^2 , т. е. эллиптический параболоид близок к круговому.

В зависимости от величины силы, приложенной к штампу, или, что то же, в зависимости от вертикального перемещения штампа w_0 возможны три качественно различных типа контактного взаимодействия. Рассмотрим

промежуточный случай: в соприкосновение с упругой средой входит лишь часть торцевой линии штампа. Граница области контакта состоит из дуг окружности a_1a_2 , a_3a_4 , на которых давления неограничены, и заранее неизвестных участков a_2a_3 , a_4a_1 — линий нулевых давлений (фиг. 1). Положение точек a_j ($j = 1, 2, 3, 4$), вблизи которых происходит изменение характера контактных давлений, зависит от величины вертикального перемещения штампа и определяется, ввиду симметрии зоны контакта, одним параметром — углом ψ .



Фиг. 1

2. Для нахождения давления под подошвой штампа, как известно [7], необходимо определить функцию $p(\rho, \varphi) = u_z'(\rho, 0, \varphi)$ в области контакта S , основываясь на том, что гармоническая в полупространстве $z < 0$ функция $u(\rho, z, \varphi)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$(2.1) \quad u(\rho, 0, \varphi) = hw(\rho, \varphi) \quad \text{в } S$$

$$u_z'(\rho, 0, \varphi) = 0 \quad \text{вне } S$$

$$(h = 1/2E(1 - \nu^2)^{-1}, \quad w(\rho, \varphi) = z(\rho, \varphi) - w_0)$$

Здесь $w(\rho, \varphi)$ — просадка под штампом, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

В рассматриваемом случае граница области S известна лишь частично, поэтому функция $\rho(\varphi)$ в уравнении границы $\rho^2 = \rho^2(\varphi)$ подлежит определению.

Следуя [1, 2], краевую задачу (2.1) сведем к задаче линейного сопряжения для плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с разрезом $|\xi| < \rho(\varphi)$

$$\Phi^+ + \Phi^- = (4A\xi^2 - w_0 + 8/3\alpha\xi^2 \cos 2\varphi) + G(\xi, \varphi)$$

$$G(\xi, \varphi) = P_0(\xi) \cos 2\varphi + P_2(\xi) \cos 4\varphi + \dots, \quad |\xi| < \rho(\varphi)$$

где $P_{2n}(\xi)$ — полиномы порядка $2n$ с неизвестными коэффициентами, φ — параметр.

Функцию $\rho^2(\varphi)$ и аналитические по переменной ζ функции $G(\zeta, \varphi)$, $\Phi(\zeta, \varphi)$ представим в виде разложений по малому параметру [2, 8]

$$(2.2) \quad \rho^2(\varphi) = R^2 + \alpha f_1(\varphi) + \dots$$

$$\Phi(\zeta, \varphi) = \Phi_0 + \alpha\Phi_1 + \dots =$$

$$= \frac{F_0(\zeta, \varphi) + \alpha F_1(\zeta, \varphi) + \dots}{\sqrt{\zeta^2 - \rho^2(\varphi)}} + \left(4A\zeta^2 - w_0 + \frac{8}{3}\alpha\zeta^2 \cos 2\varphi\right) +$$

$$+ \alpha G_1(\zeta, \varphi) + \dots$$

При этом контактное давление определяется по формуле

$$(2.3) \quad p(\rho, \varphi) = h \frac{F_0(\zeta, \varphi) + \alpha F_1(\zeta, \varphi) + \dots}{\rho \sqrt{\rho^2(\varphi) - \rho^2}}, \quad \rho < \rho(\varphi)$$

В дальнейшем ограничимся приближением порядка α . Тогда для нахождения давления $p(\rho, \varphi)$ потребуется определить функции $F_0(\zeta, \varphi)$, $F_1(\zeta, \varphi)$ и функцию $f(\varphi) = \alpha R^{-2} f_1(\varphi)$, которая, ввиду симметрии области контакта относительно прямых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, должна иметь вид

$$(2.4) \quad f(\varphi) = c_0 + c_2 \cos 2\varphi + c_4 \cos 4\varphi + \dots$$

Из формулы (2.2), используя разложение величины $[\zeta^2 - R^2 - \alpha f_1(\varphi)]^{-1/2}$ в ряд по α при $\alpha f_1(\varphi) < |\zeta^2 - R^2|$, найдем

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= F_0 / \sqrt{\zeta^2 - R^2} + 4A\zeta - w_0 \\ \Phi_1 &= \frac{F_1(\zeta^2 - R^2) + 1/2 f_1(\varphi) F_0}{(\zeta^2 - R^2)^{3/2}} + \frac{8}{3} \zeta^2 \cos 2\varphi + G_1 \end{aligned}$$

Требую, чтобы функции Φ_0 и Φ_1 исчезали на бесконечности и обеспечивали регулярность давления в окрестности начала координат, $\zeta = 0$, получим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} F_0 &= -4A\zeta^3 + (w_0 + 2AR^2)\zeta \\ F_1 &= \frac{1}{2} \alpha^{-1} R^2 \zeta (\zeta^2 - R^2)^{-1} \left[-f(\varphi) F_0 + (w_0 - 2AR^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \left(\frac{\zeta}{R}\right)^{2k} \cos 2k\varphi \right] - \frac{3}{8} \zeta^3 \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Выражения (2.3), (2.5) показывают, что задача нахождения контактного давления сводится к построению тригонометрического разложения (2.4) функции $f(\varphi)$.

3. Для определения коэффициентов c_{2k} , входящих в разложение (2.4), используем условия на границе области контакта.

На круговой части границы, очевидно

$$(3.1) \quad f(\varphi) = 0$$

а на остальной, заранее неизвестной части

$$(3.2) \quad p(\rho, \varphi)|_{\rho^2=R^2[1+f(\varphi)]} = 0$$

С точностью до членов, содержащих α^2 , соотношение (3.2) можно, в соответствии с (2.3) — (2.5), переписать в виде (δ — безразмерное перемещение штампа)

$$(3.3) \quad f(\varphi) + D \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} k \cos 2k\varphi = -2D - \varepsilon \cos 2\varphi$$

$$\varepsilon = 3\alpha (16A)^{-1}, \quad D = 1/4 (2 - \delta), \quad \delta = w_0 (AR^2)^{-1}$$

Функция $f(\varphi)$ характеризует отклонение контура области контакта от окружности $\rho^2 = R^2$. Следовательно, она должна быть непрерывной и кусочно-монотонной на промежутке $[0, 2\pi]$, а также принимать одинаковые значения в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.

Так как

$$(3.4) \quad f(\varphi) = f(2\pi - \varphi), \quad f(\pi/2 + \varphi) = f(\pi/2 - \varphi)$$

то требование $f(0) = f(2\pi)$ удовлетворяется автоматически, а непрерывность функции $f(\varphi)$ обеспечивается выполнением условия $f(\psi - 0) = f(\psi + 0)$.

Формулы (3.1), (3.3) образуют систему соотношений для нахождения коэффициентов разложения (2.4), причем в силу (3.4) достаточно, чтобы условие (3.1) имело место в промежутке $[0, \psi)$, а (3.3) — в промежутке $(\psi, \pi/2]$.

Характерно, что положение точки ψ заранее не фиксируется, а должно быть определено таким образом, чтобы удовлетворялись наложенные на функцию $f(\varphi)$ ограничения. В этой связи отметим следующее. При соблюдении указанных ограничений функция $f(\varphi)$ абсолютно непрерывна [9], вследствие чего коэффициенты тригонометрического ряда (2.4) стремятся к нулю быстрее, чем $1/k$ [10]. В противном случае можно утверждать лишь, что $c_{2k} = 0$ (1).

Следовательно, искомое значение параметра $\psi \in [0, \pi/2]$ обеспечивает наиболее быстрое убывание коэффициентов тригонометрического разложения функции $f(\varphi)$, определяемого соотношениями (3.1), (3.3) при заданном значении постоянной D , или, что то же, постоянной δ .

В частности, если $\delta = 2$ ($D = 0$), то условия (3.1), (3.3) позволяют сразу заключить, что $\psi = \pi/4$. Применяя формулы для вычисления коэффициентов Фурье, получим

$$\begin{aligned} c_0 &= \varepsilon / \pi, & c_2 &= -1/2\varepsilon \\ c_{4k+6} &= 0, & c_{4k+4} &= (-1)^k [(2k+1)(2k+3)] \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Таким образом, для $\delta = 2$ параметр ψ и коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$ определяются точно.

Точное решение рассматриваемой задачи удастся найти также в предельных случаях, когда а) в соприкосновение с упругой средой входят лишь две диаметрально противоположные точки торцевой линии штампа, лежащие в плоскости zx ; б) с полупространством контактирует вся линия торца штампа, за исключением двух точек в плоскости zy (переход к круговой зоне контакта).

В первом случае условие (3.3) задается на всем промежутке $(0, \pi/2]$, а в точке $\psi = 0$ требуется выполнения условия (3.1). Из соотношения (3.3), правая часть которого представляет полином Фурье, получим

$$c_0 = -2D, \quad c_2 = -\varepsilon(1+D), \quad c_{2k} = 0, \quad k > 1$$

Используя (3.1), определим соответствующее значение постоянной

$$\delta_- = 2(2 - \sqrt{1 - 2\varepsilon})$$

Во втором случае условие (3.3) задается в точке $\psi = \pi/2$, в то время как (3.1) распространяется на полусегмент $[0, \pi/2)$. Последнее позволяет заключить, что $c_{2k} \equiv 0$. Тогда из (3.4) имеем

$$\delta_+ = 2(1 - \varepsilon)$$

Для остальных $\delta \in (\delta_-, \delta_+)$ получить точно разложение (2.4) не представляется возможным.

4. Приведенные в п. 3 соображения относительно критерия определения параметра ψ позволяют построить алгоритм приближенного решения задачи, положив в основу вычисления коэффициентов тригонометрического разложения функции $f(\varphi)$ метод коллокации [3,11].

Выберем на интервале (δ_-, δ_+) систему точек.

$$\delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m$$

и для каждого δ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) поступим следующим образом.

В (2.4) положим $c_{2k} = 0$ при $k > N$, т.е. заменим ряд тригонометрическим полиномом. На интервале $(0, \pi/2)$ зададим, используя, например формулу

$$(4.1) \quad \varphi_s = (s + 1/2)\pi / (2N + 2), \quad s = 0, 1, \dots, N$$

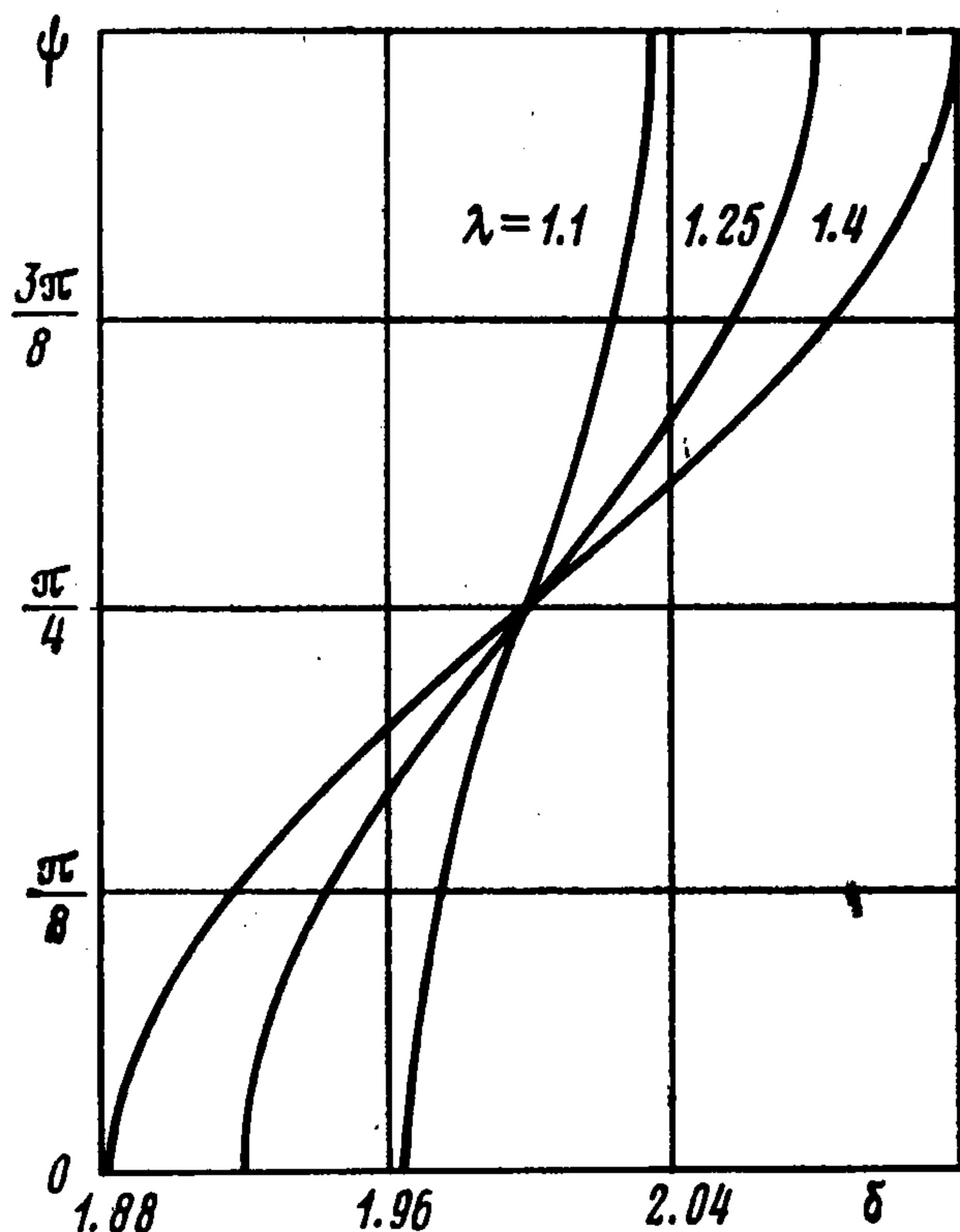
$N + 1$ равноотстоящих точек.

Требую, чтобы условие (3.1) выполнялось в точках $0 < \varphi_s \leq \varphi_j$, а (3.3) — в точках $\varphi_{j+1} \leq \varphi_s < \pi/2$, и придавая φ_j последовательно значения $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$, будем всякий раз приходиться к системе линейных алгебраических уравнений

$$(4.2) \quad \sum_{k=0}^N c_{2k} \cos 2k\varphi_s = 0, \quad 0 < \varphi_s \leq \varphi_j$$

$$\sum_{k=0}^N c_{2k} (1 + Dk) \cos 2k\varphi_s = -2D - \varepsilon \cos 2\varphi_s, \quad \varphi_{j+1} \leq \varphi_s < \frac{\pi}{2}$$

для приближенного определения коэффициентов c_{2k} ($k = 0, 1, \dots, N$).



Фиг. 2

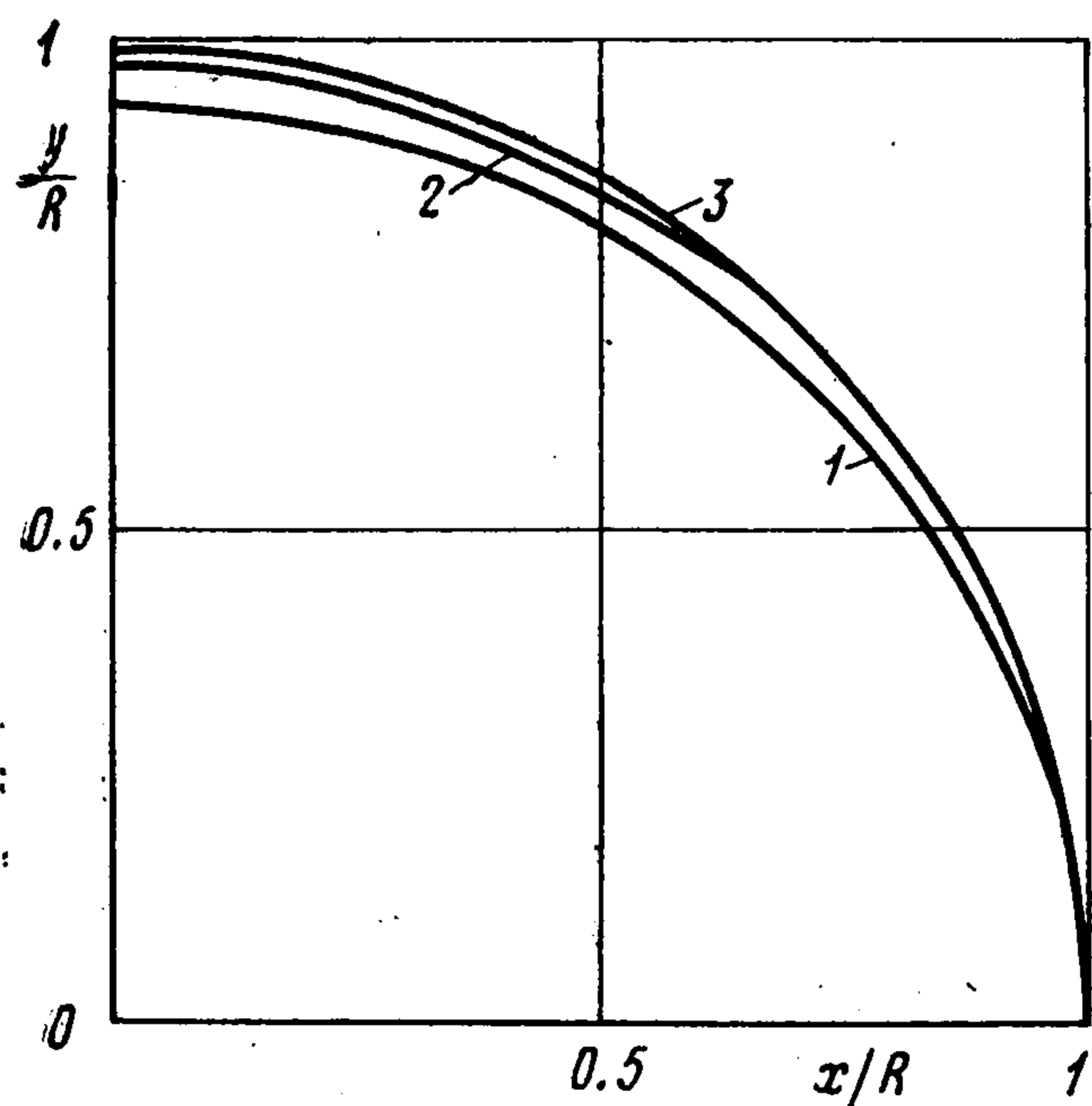
Из решений системы (4.1), отвечающих указанным значениям φ_j , в качестве искомого выберем то, которое образует наиболее быстро убывающую по модулю последовательность величин c_{2k} . Соответствующее этому решению φ_j определит тем самым промежуток $[\varphi_j, \varphi_{j+1}]$, в котором содержится отыскиваемое значение ψ . В частности, будем полагать

$$(4.3) \quad \psi \approx 1/2 (\varphi_j + \varphi_{j+1})$$

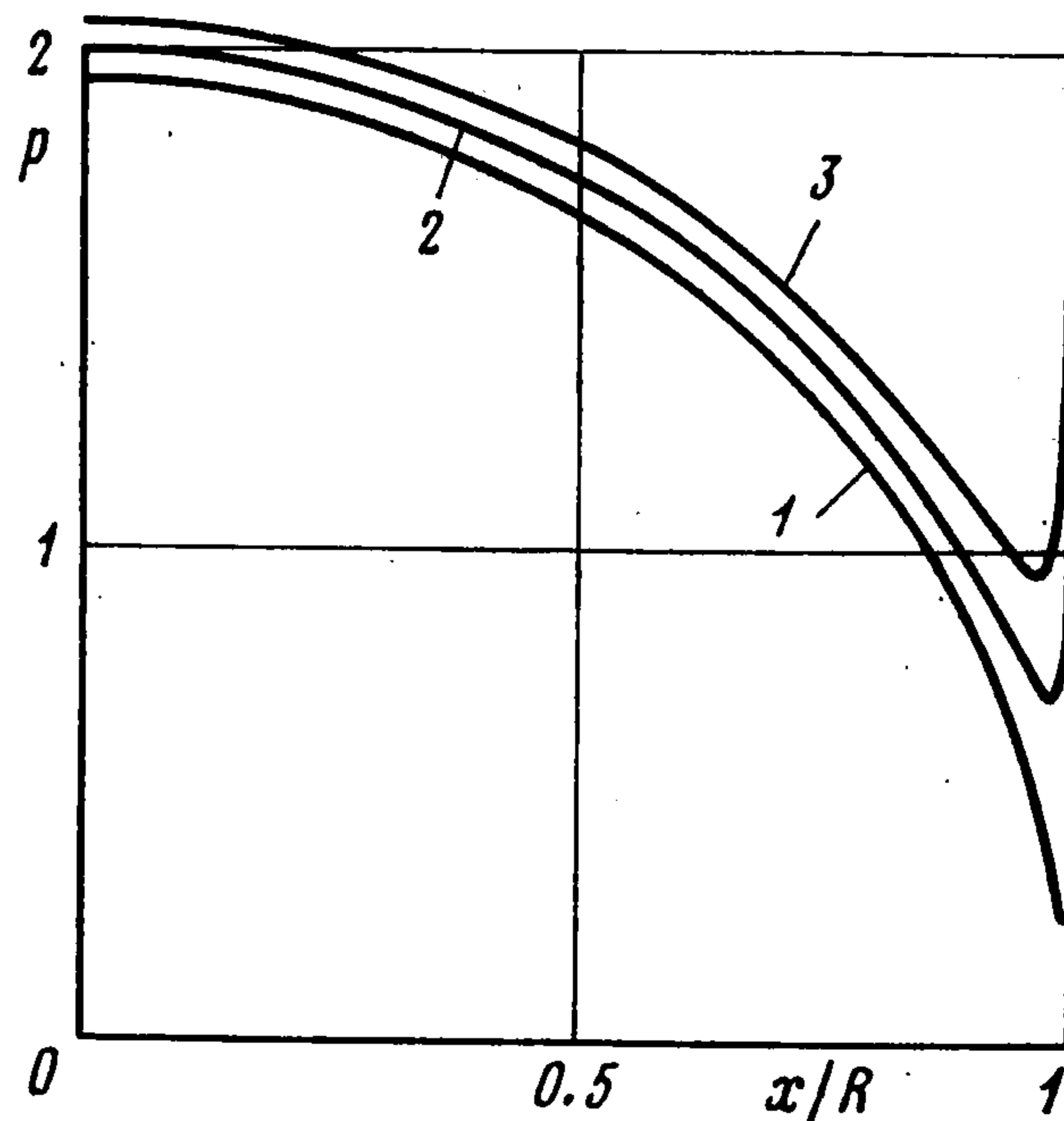
Для заданных δ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) после нахождения приближенных значений первых $N + 1$ коэффициентов ряда (2.4) и определения параметра ψ можно построить по первой формуле (2.2) границу области контакта, а по формулам (2.3), (2.5) — распределение давления $p(\rho, \varphi)$ в зоне контакта.

Алгоритм решения задачи был записан на языке АЛГОЛ-60 и апробирован на ЭВМ М-222 для разных значений отношения $\lambda = a/b$, определяющего геометрию штампа. На фиг. 2 приведены кривые, характеризующие зависимость положения точки ψ от

величины безразмерного перемещения δ . Вычисления проводились при $N = 31$, $\delta = 2 \pm l\Delta$, $\Delta = 0.0025$, $l = 1, 2, \dots, [(2 - \delta_-) / \Delta]$ в соответствии с формулами (4.1), (4.3), причем построение кривых для значений δ , близких к δ_- и δ_+ , уточнялось путем четырехкратного дробления шага Δ . Полученный результат согласуется с физическими представлениями о характере контактирования штампа с полупространством: удлинение круговой части границы области контакта, соответствующее удлинению со-



Фиг. 3



Фиг. 4

прикасающихся с упругой средой участков торцевой линии, происходит с ростом δ наиболее интенсивно вблизи $\delta = \delta_-$ и $\delta = \delta_+$, т. е. при переходе от одного типа контактного взаимодействия к другому. Положение границы области контакта для $\lambda = 1.4$ и $\delta = 1.89125, 2, 2.11125$ изображено на фиг. 3 соответственно кривыми 1, 2, 3. Тем же значениям λ и δ отвечают помещенные на фиг. 4 эпюры распределения контактного давления на оси $\varphi = 0$, построенные по формулам (2.3), (2.5) с точностью до множителя $2ARh$.

Поступила 28 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. Моссаковский В. И. Давление штампа, близкого в плане к круговому, на упругое полупространство. ПММ, 1954, т. 18, вып. 6.
3. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
4. Рвачев В. Л., Проценко В. С. О структуре решения контактной задачи с наклонным штампом. Доп. АН УССР. Сер. А, 1970, № 11.
5. Рвачев В. Л., Проценко В. С., Архипова Е. С. Структурный метод и его приложение к решению пространственных контактных задач теории упругости. Тр. конф.: Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе, Киев, 1974.
6. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев, «Наукова думка», 1974.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
8. Моссаковский В. И. Зависимость между силой и осадкой для близкого к круговому в плане плоского штампа. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 14. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1972.
9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
10. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. М., Физматгиз, 1962.
11. Галин Л. А. Решение краевых задач теории упругости методом точечной интерполяции. ПММ, 1939, т. 3, вып. 4.