Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Исследуется класс задач терминального управления многомерными системами, приводящимися к одномерным. Аналогичные задачи оптимального быстродействия для автономных и неавтономных систем рассматривались, например, в [1]. Проводимое в работе решение основано на достаточных условиях метода динамического программирования [2]. Разработаны приемы, позволяющие построить аналитическое решение задачи синтеза, а также определить оптимальные фазовую траекторию и программное управление. Решены задачи об оптимальной по расходуемой энергии стабилизации вращений динамически симметричного твердого тела при помощи двигательной системы ограниченной мощности [3].

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x) + b(t, h) S(t, x) u, \quad h = |x|, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-вектор фазового состояния со значениями, принадлежащими некоторой окрестности точки $x = 0$, включающей начальную точку x_0; $t \in [t_0, T]$ — время, T — заданная величина; u — n-вектор управления, $b \geqslant b_0 > 0$ — скаляр, S — ортогональная $(n \times n)$-матрица: $S^{-1} = S'$. Функции f, b и S предполагаются достаточно гладкими, такими, что при подстановке допустимого непрерывного управления $u(t)$, приводящего в момент $t = T$ фазовую точку в начало координат $x = 0$, система (1.1) имеет единственное решение $x(t, [u])$ $(x(T, [u]) = 0)$. Кроме того, предполагается, что вектор-функция $f(t, x)$ обладает свойством [1]

$$\eta' f(t, x) = a(t, h), \quad \eta = x / h \tag{1.2}$$

Для системы (1.1) ставится следующая задача оптимального управления:

$$x(T) = 0, \quad J[u] = \int_{t_0}^{T} u^2 \, dt \to \min_u \tag{1.3}$$

Дополнительные ограничения на управляющую функцию u пока не налагаются. Физический смысл критерия качества управления (1.3) может заключаться в минимизации энергии, затрачиваемой на управление; величина u^2 в этом случае есть расходуемая мощность [3].

Требуется найти оптимальное управление в виде синтеза $u(t, x)$, приводящее в заданный момент времени $t = T$ фазовую точку системы (1.1) в начало координат $x(T) = 0$, оптимальную фазовую траекторию $x(t, t_0, x_0)$ и минимальное значение функционала J (1.3).

Решение поставленной задачи будет строиться на основе достаточных условий оптимальности метода динамического программирования [2]. При помощи приема, аналогичного изложенному в [1], можно показать, что решение задачи (1.1), (1.3) при условии (1.2) заключается в решении некоторой задачи терминального управления для скалярной переменной h. Действительно, умножением слева системы (1.1) на η' получим уравнение

$$h^{\cdot} = a(t, h) + b(t, h)\eta' v, \quad h(t_0) = h_0, \quad h(T) = 0 \tag{1.4}$$

Здесь v — новое управление

$$v = S(t, x)u \quad (u = S'v), \quad J[u] = J[v] = \int_{t_0}^{T} v^2\, dt \to \min_v \tag{1.5}$$

Из (1.4), (1.5) следует, что $J \to \min_v$, если $v = w\eta$, где w — неизвестное скалярное управление, такое, что $J[w] \to \min_w$. В результате получена задача терминального управления

$$h^{\cdot} = a(t, h) + b(t, h)\,w, \quad h(t_0) = h_0 \tag{1.6}$$

$$h(T) = 0, \quad J[w] = \int_{t_0}^{T} w^2\, dt \to \min_w$$

Применение метода динамического программирования приводит к решению задачи Коши для функции Беллмана $V(t, h)$

$$\partial V / \partial t + a(t, h)\, \partial V / \partial h - {}^1/_4 b^2(t, h)(\partial V / \partial h)^2 = 0 \tag{1.7}$$

$$w(t, h) = -{}^1/_2\, b(t, h)\partial V / \partial h, \quad V(T, h(T)) = V(T, 0) = 0$$

К уравнению вида (1.7) приводится задача Коши для исходной задачи управления (1.1) — (1.3). Действительно, из уравнения и краевого условия для функции Беллмана $W(t, x)$ исходной задачи управления (1.1), (1.3)

$$\partial W / \partial t + \partial W / \partial x\, f(t, x) - {}^1/_4 b^2(t, h)(\partial W / \partial x)^2 = 0 \tag{1.8}$$

$$v'(t, x) = -{}^1/_2 b(t, h)\partial W / \partial x, \quad W(T, x(T)) = W(T, 0) = 0$$

следует, что

$$W(t, x) = V(t, h), \quad \partial W / \partial x = \partial V / \partial h \eta' \tag{1.9}$$

$$v(t, x) = -{}^1/_2 b(t, h)\, \partial V / \partial h \eta = w\eta$$

Подстановка (1.9) в (1.8) приводит к задаче (1.7). Таким образом, если решение задачи (1.7) построено, то оно удовлетворяет также (1.8) и, согласно (1.5), (1.9), дает решение поставленной задачи управления (1.1) — (1.3) в виде синтеза.

2. Построение оптимального синтеза. В общем случае для произвольных функций $a(t, h)$ и $b(t, h)$ решение задачи управления (1.6) или задачи Коши построить не удается. В предположении кусочной дифференцируемости этих функций по h, $h \in [0, h_0]$ и непрерывности по t, $t \in [t_0,$

T] предлагается следующий алгоритм решения задачи синтеза, основанный на необходимых условиях принципа максимума [2]. Применительно к задаче (1.6) эти условия имеют вид

$$H = -w^2 + (a + bw)p \to \max_w \tag{2.1}$$
$$h^{\cdot} = a(t, h) + b(t, h)w, \quad h(t_0) = h_0 \quad h(T) = 0$$
$$p^{\cdot} = -p(\partial a / \partial h + \partial b / \partial h\, w), \quad p(T) = p_T$$

Максимальное значение H^* функции Гамильтона H равно

$$H^* = pa(t, h) + {}^1/_4 p^2 b^2(t, h), \quad w^* = {}^1/_2 pb(t, h) \tag{2.2}$$

причем на решении системы (2.1) справедливо равенство [1]

$$H^*(t) = H^*(T) - \int_t^T \frac{\partial H}{\partial t}\Big|^* dt', \quad \frac{\partial H}{\partial t} = p\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2}p^2 b\frac{\partial b}{\partial t} \tag{2.3}$$

Далее предполагается, что h и сопряженная переменная p известны как решение системы (2.1) с $w = w^*$

$$h^* = h(t, t_0, h_0), \quad p^* = p(t, t_0, h_0) \tag{2.4}$$

Программное w_p и позиционное w_s управления определяются согласно (2.2) и равны

$$w_p(t, t_0, h_0) = {}^1/_2 p(t, t_0, h_0)\, b(t, h(t, t_0, h_0)) \tag{2.5}$$
$$w_s(t, h) = w_p(t, t, h) = {}^1/_2\, p(t, t, h)\, b(t, h)$$

Аналогично находятся минимальное значение функционала J^* и функция Беллмана V

$$J^* = V(t_0, h_0) = \int_{t_0}^T w_p^2(t, t_0, h_0)\, dt, \quad V(t, h) = \int_t^T w_p^2(\tau, t, h)\, d\tau \tag{2.6}$$

Подстановка оптимального управления $u^* = w^* S' \eta$ в (1.1) приводит к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. В ряде случаев удается построить ее аналитическое решение на основе известного общего решения системы (1.1) при $u \equiv 0$.

Ниже приводятся некоторые частные решения задачи (1.1)—(1.3).

1. Пусть $a = \alpha(t)$, $b = \beta(t)$; тогда $p = \mathrm{const}$; оптимальное управление, согласно (2.5), определяется в виде программы и синтеза

$$w_p(t, t_0, h_0) = {}^1/_2 \beta(t) p(t_0, h_0), \quad w_s(t, h) = {}^1/_2 \beta(t) p(t, h) \tag{2.7}$$
$$p^* = p(t_0, h_0) = -2\left[h_0 + \int_{t_0}^T \alpha(t)\, dt\right] \Big/ \int_{t_0}^T \beta^2(t)\, dt$$

Минимальное значение функционала J^* и функция Беллмана V находятся при помощи (2.6) и с учетом (2.7) равны

$$J^* = V(t_0, h_0) = \frac{p^{*2}}{4}\int_{t_0}^T \beta^2(t)\, dt, \quad V(t, h) = \frac{1}{4}p^2(t, h)\int_t^T \beta^2(\tau)\, d\tau \tag{2.8}$$

Дифференцированием непосредственно можно убедиться, что функция V есть решение (1.7) и (1.8). После подстановки $w_s(t, h)$ (2.7) в (2.1) получается линейное уравнение движения для h с обратной связью. Его решение получается квадратурой

$$h(t, t_0, h_0) = \left[h_0 + \int_{t_0}^{T} \alpha(t)\,dt\right] \int_t^T \beta^2(\tau)\,d\tau \Big/ \int_{t_0}^{T} \beta^2(t)\,dt - \int_t^T \alpha(\tau)\,d\tau \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что $h(T, t_0, h_0) = 0$ при любых t_0, T $(t_0 < T)$, h_0.

Построение оптимальной фазовой траектории $x(t, t_0, x_0)$ после подстановки в (1.1) выражения $u^* = w^* S'\eta$ приводится к решению задачи Коши. Пусть $f(t, x) = g(x) + \alpha(t)\eta$, где α — скаляр, а $\eta' g(x) \equiv 0$, т. е. g — вектор гироскопических сил [1], причем $g(x)$ — однородная функция x степени $m \geqslant 1$: $g(kx) = k^m g(x)$. Тогда система (1.1) для фазового вектора x с обратной связью

$$x^{\boldsymbol\cdot} = g(x) + \alpha(t)\eta - \beta^2(t)\eta\left[h + \int_t^T \alpha(\tau)\,d\tau\right] \Big/ \int_t^T \beta^2(\tau)\,d\tau, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.10}$$

подстановкой $x = hz$ приводится к виду систем с инвариантной нормой [1]

$$\frac{dz}{ds} = g(z), \quad s = \int_{t_0}^{t} h^{m-1}(\tau, t_0, h_0)\,d\tau, \quad z(0) = z_0 = \eta_0, \quad |z| = 1 \tag{2.11}$$

Если известно общее решение системы (2.10) при $\alpha = \beta \equiv 0$: $x^{\boldsymbol\cdot} = g(x)$, $x(t_0) = x_0$ и представлено в виде $x = \varphi(t - t_0, c, h_0)$, где c, например, — вектор направляющих косинусов: $c = \eta_0$, то решения уравнений (2.11) и (2.10) соответственно имеют вид

$$z = \varphi(s, z_0, 1), \quad x = h(t, t_0, h_0)\,\varphi(s, \eta_0, 1)$$

Аналогичным образом вычисляется фазовая траектория в случае, когда $f(t, x) = \delta(t)\, g(x) + \alpha(t)\eta$, где $\delta(t)$ — скалярная функция. Тогда в выражении для s (2.11) под знаком интеграла стоит δh^{m-1}.

2). Пусть теперь $a(t, h) = \gamma(t) h + \alpha(t)$, $b(t, h) = \beta(t)$; тогда оптимальные программа w_p и синтез w_s имеют вид

$$\begin{gathered} w_p(t, t_0, h_0) = {}^1\!/_2\,\beta(t)\, p_T(t_0, h_0)\, \Gamma(T, t) \\ w_s(t, h) = {}^1\!/_2\,\beta(t) p_T(t, h)\, \Gamma(T, t) \\ p_T^* = p_T(t_0, h_0) = -2\,[h_0 \Gamma(T, t_0) + \mathrm{A}(T, t_0)]\, \mathrm{B}(T, t_0) \\ \Gamma(T, t) = \exp\left[\int_t^T \gamma(\tau)\,d\tau\right], \quad \mathrm{A}(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \alpha(t)\,\Gamma(T, t)\,dt \\ \mathrm{B}(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \beta^2(t)\,\Gamma^2(T, t)\,dt \end{gathered} \tag{2.12}$$

Минимальное значение функционала J (1.3) вычисляется на основе первой формулы (2.6)

$$J^* = V(t_0, h_0) = {}^1\!/_4\, p_T^2(t_0, h_0),\ B(T, t_0) \tag{2.13}$$

Функция Беллмана V задачи согласно (2.6) равна

(2.14) $$V(t, h) = [h\Gamma(T, t) + \mathrm{A}(T, t)]^2 / \mathrm{B}(T, t)$$

Подстановка выражения (2.14) в (1.7) и (1.8) показывает, что V — искомая функция Беллмана. Модуль вектора x — функция h при $w^* = w_s(t, h)$ убывает в соответствии с уравнением (2.1) с отрицательной линейной обратной связью, коэффициент которой неограниченно возрастает при $t \to T$. Решение этого уравнения имеет вид

(2.15) $$h(t, t_0, h_0) = h_0 [\Gamma(t, t_0) - \Gamma(T, t)\Gamma(T, t_0)\,\mathrm{B}(t, t_0) / \mathrm{B}(T, t_0)] + \mathrm{A}(t, t_0) - \Gamma(T, t)\,\mathrm{A}(T, t_0)\,\mathrm{B}(t, t_0) / \mathrm{B}(T, t_0)$$

Как следует из (2.15), $h(T, t_0, h_0) = 0$ при любых t_0, T, h_0.

Оптимальная фазовая траектория $x(t, t_0, x_0)$ получается интегрированием задачи Коши, аналогичной (2.10), после подстановки выражения $u^* = w^* S'\eta$ в (1.1). При исследовании некоторых прикладных задач (см. п. 4) функция f имеет вид $f(t, x) = \delta(t)g(x) + \gamma(t)x + \alpha(t)\eta$ (δ, γ, α — скалярные функции), где g — гироскопический вектор. Оптимальная траектория строится способом, аналогичным рассмотренному выше в п. 1)

$$x = hz, \quad z = \varphi(s, \eta_0, 1), \quad s = \int_{t_0}^{t} \delta(\tau)\, h^{m-1}(\tau, t_0, h_0)\, d\tau$$

Теперь на основе известного выражения для вектор-функции $x(t, t_0, x_0)$ получается управление u^* в виде программы.

3). В случае $a = \alpha(h)$, $b = \beta(h)$, где α, β — достаточно гладкие, например, непрерывно дифференцируемые функции h, $h \in [0, h_0]$, решение задачи (1.6) строится следующим образом. Так как функция Гамильтона H^* (2.2), согласно (2.3), постоянна

$$H^*(t) = H^*(T) = {}^1/_4 p_T^2 \beta^2(0) + p_T \alpha(0)$$

то отсюда следует выражение для p

(2.16) $$p = p(h, p_T) = -[2 / \beta^2(h)]\{\alpha(h) \mp [\alpha^2(h) + H^*(T)\beta^2(h)]^{1/2}\}$$

Подстановка (2.16) в w^*, а затем в (2.1) приводит к уравнению для h с разделяющимися переменными

(2.17) $$\pm \int_{h_0}^{h} \frac{dl}{[\alpha^2(l) + H^*(T)\,\beta^2(l)]^{1/2}} = t - t_0$$

Из (2.17) определяем, что в выражении (2.16) для p нужно брать нижний знак плюс. Так как $h(T) = 0$, то постоянная p_T есть корень уравнения (2.17) при $t = T$, $h = 0$. Найденное выражение $p_T^* = p_T(T - t_0, h_0)$ подставляется в (2.16). В результате управление w^* находится в виде синтеза: $w_s(T - t, h) = {}^1/_2 \beta(h) p(h, p_T(T - t, h))$. Неявная функция $h(t - t_0, T - t_0, h_0)$ определяется квадратурой (2.17) после подстановки $p_T^* = p_T(T - t_0, h_0)$. При помощи соотношений (2.5), (2.6) и описанной ранее схемы могут быть построены оптимальное программное управление $w_p(t-t_0, T-t_0, h_0)$, минимальное значение функционала J^* и функция Беллмана V, а также оптимальная фазовая траектория x. Если, в частности, $f(t, x) = \delta(t)g(x)$, т. е. $\alpha \equiv 0$, то $p = p_T\, \beta(0) / \beta(h)$, где

$$p_T = -\frac{2}{\beta(0)(T-t_0)}\int_0^{h_0}\frac{dh}{\beta(h)} = -\frac{2}{\beta(0)(T-t)}\int_0^{h}\frac{dl}{\beta(l)}$$

Синтез управления w_s и соотношение для h имеют вид

$$w_s(T-t, h) = -\frac{1}{T-t}\int_0^h\frac{dl}{\beta(l)}, \quad \int_{h_0}^h\frac{dl}{\beta(l)} = -\frac{t-t_0}{T-t_0}\int_0^{h_0}\frac{dh}{\beta(h)}$$

Фазовая траектория x описывается системой уравнений с обратной связью

$$x^{\cdot} = \delta(t)g(x) - \frac{x}{h}\frac{\beta(h)}{T-t}\int_0^h\frac{dl}{\beta(l)}, \quad x(t_0) = x_0$$

Подстановкой $x = zh$, $|z| = 1$ получается задача Коши для системы уравнений с инвариантной нормой (2.11). Порядок этой системы может быть уменьшен на два, а ее интегрирование в ряде прикладных задач проведено до конца (см. п. 4).

3. Обобщение задачи терминального управления. Приведение многомерной задачи оптимального управления к одномерной типа (1.6) возможно в более общем случае. Например, пусть система уравнений движения имеет вид

$$x^{\cdot} = f(t, x, |u|) + b(t, h, |u|)\, S(t, x, u)u, \quad x(t_0) = x_0 \tag{3.1}$$

Здесь функции f, b, S аналогичны рассмотренным ранее.

Ставится задача о переводе фазовой точки системы x из начального состояния $x(t_0) = x_0$ на многообразие

$$|x(T)| \leqslant M \quad (|x_0| > M), \quad |x(T)| \geqslant M \quad (|x_0| < M) \tag{3.2}$$

таким образом, чтобы функционал

$$J = F(h(T)) + \int_{t_0}^T G(t, h, |u|)\,dt, \quad h = |x| \tag{3.3}$$

принимал наименьшее возможное значение. На управляющий вектор u может быть наложено дополнительное ограничение [1]

$$|u| \leqslant u_0, \quad |u| = (u_1^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2} \tag{3.4}$$

Тогда при помощи рассуждений п. 1 получим эквивалентную одномерную задачу управления

$$h^{\cdot} = a(t, h, |w|) + b(t, h, |w|)\, w, \quad h(t_0) = h_0 \tag{3.5}$$

$$h(T) \lesseqgtr M \quad (h_0 \gtreqless M), \quad J = F(h(T)) + \int_{t_0}^T G(t, h, |w|)\,dt \to \min_{|w| \leqslant u_0}$$

Итак, уравнение Беллмана исходной задачи оптимального управления (3.1) — (3.4) вследствие центральной симметрии соотношений (3.5) и с учетом условия типа (1.2) приводится к форме (1.7)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min_{|w|\leqslant u_0}\left\{\frac{\partial V}{\partial h}\left[a(t,h,|w|)+b(t,h,|w|)w\right]-G(t,h,|w|)\right\}=0, \tag{3.6}$$
$$V(T,h(T))=F(h(T)),\quad h(T)\lesseqgtr M$$

Считается, что задача терминального управления (3.5), (3.6), решена и при помощи приемов п. 2 найдено оптимальное управление в виде программы $w_p(t, t_0, h_0)$ или по обратной связи $w_s(t, h)$. Тогда для определения позиционного управления $u_s(t, x)$ получается конечное уравнение $S(t, x, u)\,u = w_s(t, h)\eta$, $|u| \leqslant u_0$, из которого находится функция $u^* = u_s(t, x)$. В частности, если матрица S зависит только от $|u|$ или вовсе не зависит от u, то $u_s(t, x) = w_s S'(t, x, |w_s|)\eta$. Построение оптимальной фазовой траектории в предположении $f(t, x, |u|) = \chi(t, |u|)g(x) + a(t, h, |u|)\eta$ проводится аналогичным образом, как и в п. 2.

Отметим, что в практических задачах идеализация (3.1) — (3.4) не всегда имеет место. Например, соотношение типа (1.2), как правило, выполняется с некоторой ошибкой

$$\eta' f(t, x, u) = a(t, h, |u|) + \varepsilon\varphi(t, x, u)$$

где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ — некоторая малая величина, а $\varphi(t, x, u)$ — ограниченная функция при $t \in [t_0, T]$, $|x| \leqslant |x_0|$, $|u| \leqslant u_0$. Система (3.1) может подвергаться воздействию также других возмущающих факторов. Тогда возникает задача оценки этих возмущений или построения приближенного решения задачи терминального управления с учетом малого параметра ε, если указанная идеализация недопустима.

Исследование задач управления методами теории возмущений проводилось в [4-6]. Автором [7,8] для автономных систем типа (1.1) разработана методика построения приближенного решения задач оптимального быстродействия с ограничением на управление (3.4), основанная на достаточных условиях оптимальности [2].

4. Оптимальное управление движением твердого тела относительно центра масс. Рассматривается задача управления вращениями динамически симметричного тела в случае Эйлера [1,7,8]

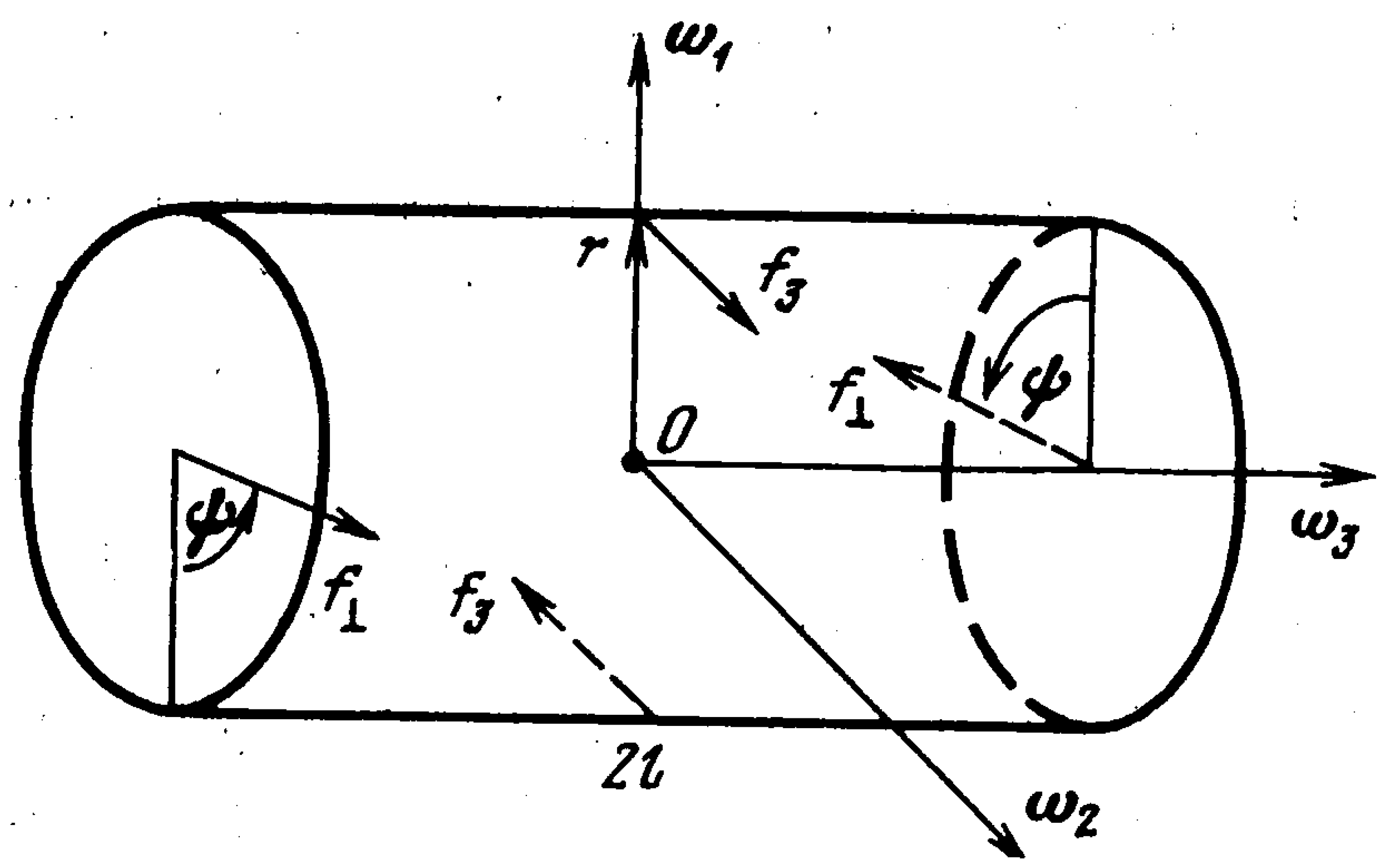
$$\begin{aligned}
&I\omega_1{}^{\cdot} + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad \omega_1(t_0) = \omega_{10}\\
&I\omega_2{}^{\cdot} - (I_3 - I)\omega_1\omega_3 = M_2, \quad \omega_2(t_0) = \omega_{20}\\
&I_3\omega_3{}^{\cdot} = M_3, \ I, I_3 = \mathrm{const}, \quad \omega_3(t_0) = \omega_{30}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь I, I_3 — главные центральные моменты инерции тела, M_i — компоненты внешнего момента сил относительно каждой из связанных осей; t_0, ω_{i0} — начальные данные ($i = 1,2,3$).

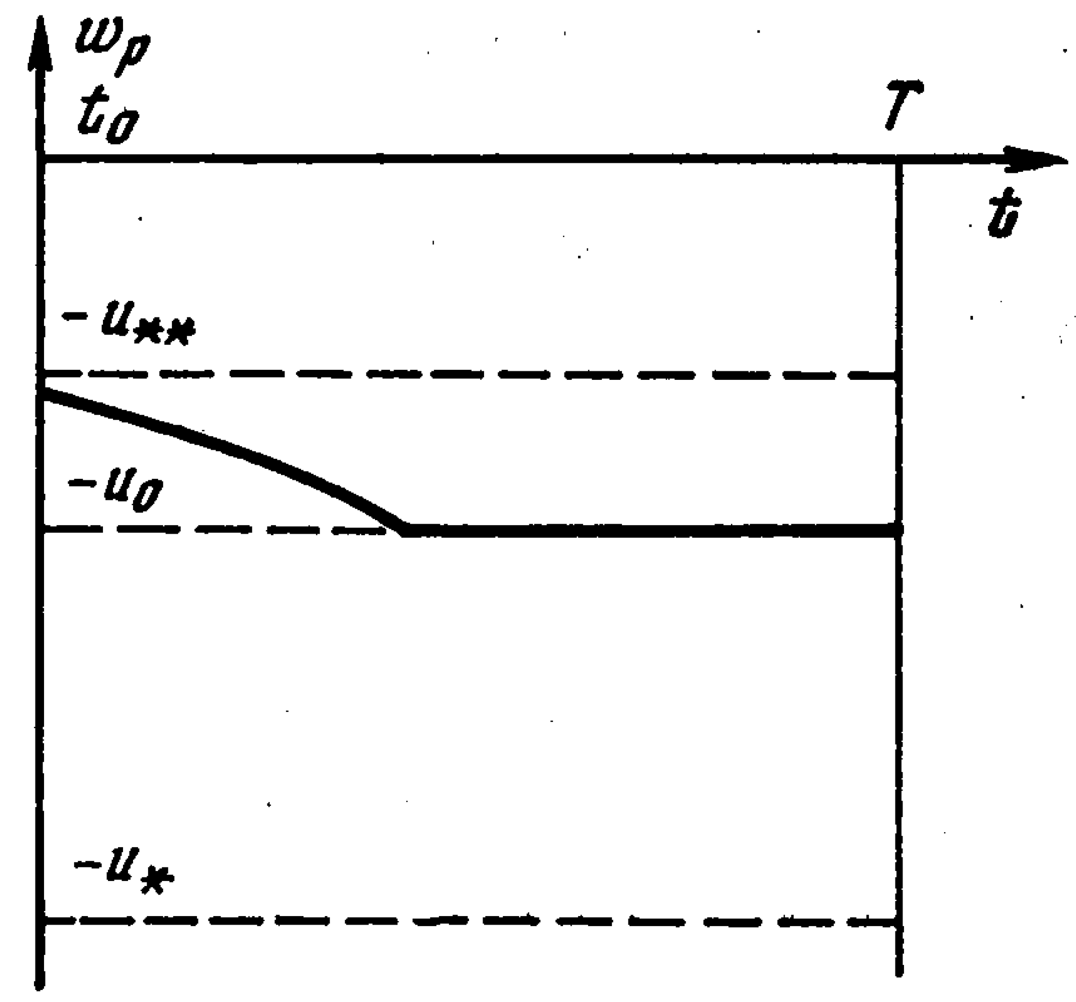
1). Вначале рассматривается схема управления вида, представленного на фиг. 1. Здесь (f_3, f_3) — пара фиксированных двигателей, создающих момент сил относительно оси симметрии $O\omega_3$; $(f_\perp, f_\perp)$ — пара верньерных двигателей, находящихся на этой оси, создающая момент управляющих сил относительно осей $O\omega_1$ и $O\omega_2$. Если другие воздействия отсутствуют, то

(4.2) $$M_1 = 2lf_\perp \sin\psi, \quad M_2 = 2lf_\perp \cos\psi, \quad M_3 = 2rf_3$$
$$0 \leqslant f_\perp \leqslant f_{\perp 0}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant f_3 \leqslant f_{30}$$

Здесь $2l$ и r — соответствующие линейные характеристики системы. Считается, что угловая скорость вращения тела вокруг оси динамической



Фиг. 1



Фиг. 2

симметрии ω_3 изменяется согласно выбранному закону управления $u_3(t)$, например, приводящему в фиксированный момент времени $t = T$ к заданному значению ω_{3T}.

Ставится задача оптимального гашения вектора (ω_1, ω_2)

(4.3) $$\omega_3(t) = \omega_{30} + \int_{t_0}^{t} u_3(\tau)\,d\tau, \quad \omega_{1,2}(T) = 0, \quad J = \int_{t_0}^{T} (u_1^2 + u_2^2)\,dt \to \min$$
$$u_3 = M_3 I_3^{-1}, \quad u_{1,2} = M_{1,2} I^{-1}, \quad (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \leqslant u_0 \quad (u_0 = 2lf_{\perp 0} I^{-1})$$

Если управляющая сила $f_\perp$ в (4.2) создается двигательной системой ограниченной мощности [3], то функционал J (4.3) имеет смысл энергии, затрачиваемой на управление. Уравнения движения (4.1) для ω_1, ω_2 приводятся к виду

(4.4) $$\omega_1^\cdot = -\nu(t)\omega_2 + u_1, \quad \omega_2^\cdot = \nu(t)\omega_1 + u_2$$
$$\nu(t) = (I_3 - I) I^{-1} \omega_3(t)$$

Система (4.4) удовлетворяет условию (1.2). Решение задачи управления при условии $u_0 \geqslant \omega_{\perp 0}(T - t_0)^{-1}$ имеет вид

(4.5) $$V(t, \omega_\perp) = \omega_\perp^2 (T - t)^{-1}, \quad w^* = -\omega_\perp (T - t)^{-1}, \quad \omega_\perp = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}$$
$$u_{1,2}^* = -\omega_{1,2}(T - t)^{-1}$$

Оптимальная фазовая траектория и минимальное значение функционала находятся при помощи методики п. 2 и равны

(4.6) $$\omega_1^* = (T - t)(T - t_0)^{-1}(\omega_{10}\cos s - \omega_{20}\sin s)$$
$$\omega_2^* = (T - t)(T - t_0)^{-1}(\omega_{10}\sin s + \omega_{20}\cos s), \quad s = \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\,d\tau$$
$$J^* = \frac{\omega_{\perp 0}^2}{T - t_0}, \quad \omega_\perp = \omega_{\perp 0}(T - t)(T - t_0)^{-1}$$

Если $u_0 < \omega_{\perp 0}(T - t_0)^{-1}$, то поставленная задача не имеет решения. Если же ограничение (4.3) на u_1, u_2 практически отсутствует, т. е. $u_0 \to \infty$, то из (4.5), (4.6) следует, что при $t_0 \to T$ программные управления переходят в дельта-функции [9], а интегральный функционал расходится: $J^* \to +\infty$; наоборот, при $T - t_0 \to \infty$ величина $J^* \to 0$.

Пусть на симметричное твердое тело со стороны внешней среды действует тормозящий момент сил вязкого трения. Тогда уравнения движения типа (4.4) принимают вид (см. 2) п. 2)

$$(4.7) \qquad \omega_1^{\cdot} = -\nu(t)\omega_2 - \gamma\omega_1 + u_1, \quad \omega_2^{\cdot} = \nu(t)\omega_1 - \gamma\omega_2 + u_2$$

Если $\gamma = \mathrm{const}$, то решение задачи синтеза имеет форму

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} &V(t, \omega_\perp) = 2\gamma\omega_\perp^2\Gamma^2(t, T)[1 - \Gamma^2(t, T)]^{-1} \\ &\Gamma(t, T) = \exp\gamma\ (t - T) \\ &u_{1,2} = \omega_{1,2}\omega^*\omega_\perp^{-1}, \quad w^* = w_s(t - T, \omega_\perp) = -2\gamma\omega_\perp\Gamma^2(t, T) \times \\ &\times[1 - \Gamma^2(t, T)]^{-1} \end{aligned}$$

Оптимальная фазовая траектория, программное управление и минимальное значение функционала для системы (4.7) равны

$$(4.9) \qquad \begin{aligned} &\omega_1^* = \omega_\perp\omega_{\perp 0}^{-1}(\omega_{10}\cos s - \varphi_{20}\sin s), \quad \omega_2^* = \omega_\perp\omega_{\perp 0}^{-1}(\omega_{10}\sin s + \omega_{20}\cos s) \\ &\omega_\perp^* = \omega_{\perp 0}\{\Gamma(t_0, t) - \Gamma(t_0, T)[\Gamma(t, T) - \Gamma(t_0, t)\Gamma(t_0, T)] \times \\ &\times [1 - \Gamma^2(t_0, T)]^{-1}\} \\ &w^* = w_p(t - T, \ T - t_0, \ \omega_{\perp 0}) = -2\gamma\omega_{\perp 0}\,\Gamma(t, T)\,\Gamma(t_0, T) \times \\ &\times[1 - \Gamma^2(t_0, T)]^{-1} \\ &J^* = 2\gamma\omega_{\perp 0}^2\Gamma^2(t_0, T)[1 - \Gamma^2(t_0, T)]^{-1}, \qquad s = \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Из (4.8), (4.9) следует справедливость замечания, сделанного после соотношений (4.6). Решение (4.8), (4.9), действительно, имеет место, если управление w_p не выходит на ограничение, т. е.

$$u_0 \geqslant u_* = 2\gamma\omega_{\perp 0}\Gamma(t_0, T)[1 - \Gamma^2(t_0, T)]^{-1}$$

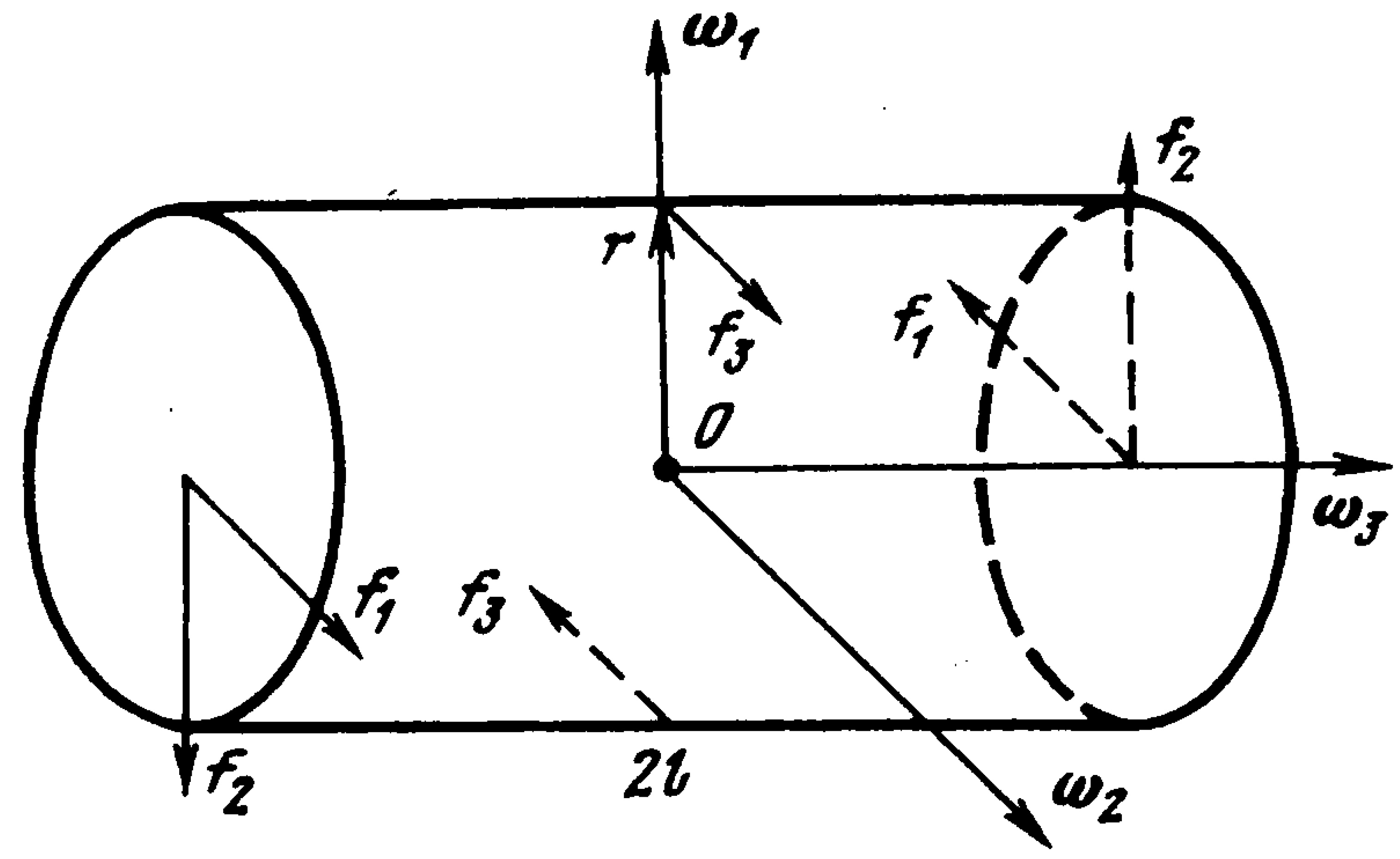
Если же

$$u_0 < u_{**} = \gamma\omega_{\perp 0}\Gamma(t_0, T)[1 - \Gamma(t_0, T)]^{-1} \quad (u_{**} < u_*)$$

то система (4.7) не может быть стабилизирована за время $T - t_0$. В промежуточном случае $u_{**} < u_0 < u_*$ программное управление разбивается на два участка (см. фиг. 2)

$$w^* = w_p(t - T, T - t_0, \omega_{\perp 0}) = \begin{cases} -u_0\Gamma(t, t_1), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ -u_0, & t_1 < t \leqslant T \end{cases}$$

Здесь t_1, $t_0 < t_1 < T$ — некоторый момент выхода управления w_p на минимальное значение $-u_0$. Отметим, что, согласно (4.9), оптимальное управление $w_p < 0$ имеет убывающий характер для $t \in [t_0, t_1]$. Ве-



Фиг. 3

личина t_1 определяется из условия обращения в нуль значения $\omega_\perp$ при $t = T$. Текущее значение величины $\omega_\perp$, равно

$$\omega_\perp = \omega_{\perp 0}\Gamma(t_0, t) - u_0\Gamma(0, t) \times$$
$$\times \begin{cases} {}^1\!/_2\,[\Gamma(2t, t_1) - \Gamma(2t_0, t_1)], & t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ {}^1\!/_2\,[\Gamma(t_1, 0) - \Gamma(2t_0, t_1)] + \Gamma(t, 0) - \Gamma(t_1, 0), & t_1 < t \leqslant T \end{cases}$$

Разрешая соответствующее квадратное уравнение, находим

$$t_1^*(t_0, \omega_{\perp 0}) = \gamma^{-1}\ln(\Gamma(T, 0) - \gamma\omega_{\perp 0}u_0^{-1}\Gamma(t_0, 0) +$$
$$+ \{[\Gamma(T, 0) - \gamma\omega_{\perp 0}u_0^{-1}\Gamma(t_0, 0)]^2 - \Gamma^2(t_0, 0)\}^{1/2})$$

В пределе, если $u_0 \downarrow u_{**}$, то $t_1^* \downarrow t_0$; если же $u_0 \uparrow u_*$, то $t_1^* \uparrow T$. В окрестности предельных значений получаем приближенные выражения: при $u_0 = u_{**}\ (1 + \varepsilon)\quad (1 \gg \varepsilon > 0)$

$$t_1^* = t_0 + \sqrt{2\varepsilon}\gamma^{-1}[1 - \Gamma(t_0, T)]^{1/2}\Gamma({}^1\!/_2\,t_0, {}^1\!/_2\,T) + O(\varepsilon),$$
$$t_1^* - t_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$$

при $u_0 = u_*(1 - \mu)\ (1 \gg \mu > 0)$

$$t_1^* = T - \mu\gamma^{-1} + O(\mu^2), \quad T - t_1^* = O(\mu)$$

2). Рассмотрим теперь схему управления при помощи двигательной системы общей ограниченной мощности [1,3,7] (см. фиг. 3); в этом случае уравнения движения (4.1) принимают форму

$$\begin{aligned} &\omega_1^{\cdot} + \varkappa\omega_2\omega_3 = bu_1, \quad \omega_1(t_0) = \omega_{10}, \quad \varkappa = (I_3 - I)I^{-1} \\ &\omega_2^{\cdot} - \varkappa\omega_1\omega_3 = bu_2, \quad \omega_2(t_0) = \omega_{20}, \quad b = 2l\mu I^{-1} \\ &\omega_3^{\cdot} = b_3u_3, \quad \omega_3(t_0) = \omega_{30}, \quad b_3 = 2r\mu I_3^{-1} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь $\mu \approx \mathrm{const}$ — скорость расхода рабочего тела в режиме насыщения, $u_{1,2,3}$ — регулируемые в широких диапазонах скорости истечения реактивной струи ($f_{1,2,3} = \mu u_{1,2,3}$); расходуемая на управление мощность $N = {}^1\!/_2\mu\,(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$, $N \leqslant N_0$. Минимизируемый функционал — затрачиваемая на управление энергия системы E — равен

$$E = \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{T}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\,dt, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant u_0^2 = 2\frac{N_0}{\mu} \tag{4.11}$$

Ставится задача оптимального торможения вращений твердого тела к заданному моменту времени $t = T$. Заменами

$$x_{1,2} = \omega_{1,2} b^{-1}, \quad x_3 = \omega_3 b_3^{-1}, \quad \chi = \varkappa b_3, \quad E = {}^1/_2 \mu J \tag{4.12}$$

задача (4.10), (4.11) приводится к виду (1.1), (1.3), (3.4). Синтез оптимального управления при условии $u_0 \geqslant h_0 (T - t_0)^{-1}$ равен

$$V(t, h) = h^2 (T - t)^{-1}, \quad u_i^* = w^* \eta_i, \quad w^* = -h (T - t)^{-1}$$
$$\eta_i = x_i h^{-1}, \quad h = |x| \quad (i = 1,2,3)$$

Если $u_0 < h_0 (T - t_0)^{-1}$, то затормозить вращения твердого тела за указанное время нельзя. Оптимальная фазовая траектория x и минимальное значение функционала J находятся явно и равны

$$x_i^* = h z_i \quad (i = 1,2,3), \quad h = h_0 (T - t)(T - t_0)^{-1}$$
$$z_1^* = \eta_{10} \cos s - \eta_{20} \sin s, \quad z_2^* = \eta_{10} \sin s + \eta_{20} \cos s$$
$$z_3^* = \eta_{30}$$
$$s = \chi h_0 \eta_{30} (t - t_0)(T - t_0)^{-1} [T - {}^1/_2 (t + t_0)], \quad J^* = h_0^2 (T - t_0)^{-1}$$

Обращением формул (4.12) вычисляются исходные величины ω_i^*, E^*. Следует отметить, что $s^{\cdot} = 0$ при $t = T$. Аналогично п. 1) исследуется влияние момента сил вязкого трения.

Поступила 3 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968.
2. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
3. *Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., «Наука», 1975.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
5. *Альбрехт Э. Г.* Об управлении движением нелинейных систем. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 3.
6. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
7. *Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р.* Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела управлениями, ограниченными эллипсоидом. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
8. *Акуленко Л. Д.* Приближенный синтез оптимальных по быстродействию управлений в задачах, близких к сферически-симметричным. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.