Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62-50

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. С. Осипов, В. Г. Пименов

(Свердловск)

Для управляемых систем с последействием изучается дифференциальная игра сближения — уклонения [1–4]. Особенность рассматриваемой системы состоит в том, что она обладает эффектом запаздывания по управляющим силам, который, как известно [5], наделяет управляемую систему новыми существенными особенностями. При использовании исследований [1–4] указываются условия разрешимости задач и строятся искомые процедуры управления.

1. Задана управляемая система

$$
\begin{aligned}
&x^{\cdot} = f_1(t,\ x,\ u,\ u^\tau) + f_2(t,\ x,\ v) \\
&u^\tau = u(t-\tau), \quad t \in [t_0,\ \vartheta], \quad \tau = \mathrm{const}, \quad 0 < \tau < \vartheta - t_0 \\
&\| f_1(t,\ x,\ u,\ u^\tau) + f_2(t,\ x,\ v) \| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \quad \varkappa = \mathrm{const}
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор; r_1-мерный вектор u и r_2-мерный вектор v — управления, стесненные условиями $u \in P$, $v \in Q$, где P, Q — компакты; r_1-мерный вектор u^τ связан с вектором u указанным соотношением; функции $f_1(t,\ x,\ u,\ u^\tau)$ и $f_2(t,\ x,\ v)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x соответственно на $[t_0,\ \vartheta] \times E_n \times \times P \times P$ и $[t_0,\ \vartheta] \times E_n \times Q$ (E_n — n-мерное евклидово пространство) и в области определения выполняется указанное условие.

Задача сближения состоит в том, чтобы выбором управления u перевести фазовый вектор системы (1.1) на заданное множество M в заданные сроки, какова бы при этом ни оказалась допустимая реализация управления v. Задача уклонения состоит в выборе управления v, гарантирующего уклонение системы (1.1) от встречи с множеством M, какова бы при этом ни оказалась допустимая реализация управления u.

Уточним постановку задачи.

Всякую тройку $p = \{t;\ x;\ u(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}$, где $t \in [t_0,\ \vartheta]$, $x \in E_n$, $u(s) \in L^2[-\tau,\ 0)$, будем называть позицией. Здесь $L^2[-\tau,\ 0)$ — пространство суммируемых с квадратом на промежутке $[-\tau,\ 0)$ функций. Стратегией U (V) назовем правило, ставящее в соответствие каждой позиции игры p множество $U(p) \subset P$ $(V(p) \subset Q)$. Допустим, что задана начальная позиция $p_0 = \{t_0;\ x_0;\ u_0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}$. Пусть Δ означает некоторое покрытие отрезка $[t_0,\ \vartheta]$ полуинтервалами $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, $\tau_0 = t_0$,

$i = 0, 1, \ldots, N(\Delta)$; $\delta = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Обозначим символом $x[t, p_0, U]_\Delta$ абсолютно непрерывную на $[t_0, \vartheta]$ функцию $x[t]_\Delta$, удовлетворяющую начальному условию

$$x[t_0]_\Delta = x_0 \tag{1.2}$$

и при почти всех t из отрезка $[t_0, \vartheta]$ уравнению

$$\begin{gathered} x^{\bullet}[t]_\Delta = f_1(t, x[t]_\Delta, u[t], u[t-\tau]) + f_2(t, x[t]_\Delta, v[t]) \\ u[t] = u[\tau_i] \in U(\tau_i; x[\tau_i]_\Delta; u_{\tau_i}[s], -\tau \leqslant s < 0) \\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \; i = 0, 1, \ldots, N \\ u[t-\tau] = u_0(t - \tau - t_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau); \quad u_t(s) \equiv u(t + \\ + s), \; s \in [-\tau, 0) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $v[t]$ — какая-то реализация управления, являющаяся интегрируемой функцией времени со значениями в Q.

Движением $x[t] = x[t, p_0, U]$ из позиции p_0, отвечающим стратегии U, будем называть всякую непрерывную функцию, обладающую следующим свойством: существует последовательность покрытий $\{\Delta_j\}$ с $\delta_j \to 0$, такая, что некоторая последовательность функций $\{x[t, p_0, U]_{\Delta_j}\}$ сходится равномерно на $[t_0, \vartheta]$ к $x[t, p_0, U]$.

Подобным же образом определяется движение $x[t] = x[t, p_0, V]$ системы (1.1) из позиции p_0, отвечающее стратегии V.

Задача 1.1. (*сближения*). Заданы система (1.1), отрезок времени $[t_0, \vartheta]$, начальная позиция p_0, замкнутое ограниченное множество $M \subset E_n$ и число $c \geqslant 0$. Требуется построить стратегию U°, гарантирующую выполнение условия $x[\vartheta] \in M^c$ для любого движения $x[t] = x[t, p_0, U^\circ]$. Здесь M^c — замкнутая c-окрестность множества M.

Задача 1.2 (*уклонения*). Заданы система (1.1), отрезок времени $[t_0, \vartheta]$, начальная позиция p_0, замкнутое ограниченное множество $M \subset E_n$ и число $c \geqslant 0$. Требуется построить стратегию V°, гарантирующую условие $x[\vartheta] \notin M^c$ для любого движения $x[t] = x[t, p_0, V^\circ]$.

Ниже приводятся достаточные условия разрешимости задач 1.1 и 1.2 и способ построения искомых процедур управления.

2. Пусть на пространстве позиций задан функционал $\varepsilon(p) = \varepsilon(t; x; u_t(s), -\tau \leqslant s < 0)$, удовлетворяющий следующим условиям.

1°. Функционал $\varepsilon(p)$ непрерывен при изменении позиции p в следующем смысле: если последовательность позиций $\{p_k\} = \{\{t_k; x_k; u_{t_k}^{(k)}(s), -\tau \leqslant s < 0\}\}$ такова, что $t_k \to t_*$, $x_k \to x_*$ при $k \to \infty$, $u^{(k)}(t_* + s) = u^*(t_* + s)$ при $s \in [-\tau, 0) \cap [t_k - t_* - \tau, t_k - t_*)$ для любого k, то $\varepsilon(p_k) \to \varepsilon(p_*) = \varepsilon(t_*; x_*; u_{t_*}^*(s), -\tau \leqslant s < 0)$ при $k \to \infty$.

2°. При $t \in [\vartheta - \tau, \vartheta]$ $\varepsilon(t; x; u_t^{(1)}(s), -\tau \leqslant s < 0) = \varepsilon(t; x; u_t^{(2)}(s), -\tau \leqslant s < 0)$, если только $u_t^{(1)}(s) = u_t^{(2)}(s)$ при $s \in [-\tau, \vartheta - \tau - t)$.

3°. Существует такое число $c \geqslant 0$, что $\varepsilon(\vartheta, x, u_\vartheta(s)) = \varepsilon(\vartheta, x) > c$, если $x \notin M^c$.

Пусть, кроме того, в области $t < \vartheta$, $c < \varepsilon(p) < \beta + c$, где $\beta > 0$, выполняются условия.

4°. При фиксированных t, $u_t(s)$ функция $\varepsilon(t, x, u_t(s))$ обладает непрерывными частными производными $\partial\varepsilon / \partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$.

5°. Если функция $u(t)$ непрерывна справа в точках t и $t - \tau$, то возможно представление

$$\varepsilon(t + \Delta t, x, u_{t+\Delta t}(s)) - \varepsilon(t, x, u_t(s)) = = D(t, x, u_t(s), u(t), u(t - \tau))\Delta t + o(\Delta t) \tag{2.1}$$

где $\Delta t > 0$, $D(t, x, u_t(s), u(t), u(t - \tau)) = D(p, u(t), u(t - \tau))$ — функционал, непрерывный по всем аргументам, причем непрерывность по изменению позиции p понимается в смысле условия 1°.

6°. Справедливо неравенство

$$\min_{u\in P}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} f_1(t, x, u, u(t-\tau)) + D(t, x, u_t(s), u, u(t-\tau))\right\} + + \max_{v\in Q}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} f_2(t, x, v)\right\} \leqslant 0 \tag{2.2}$$

Примечание 2.1. В соответствии с условием 2° при $t \in [\vartheta - \tau, \vartheta]$ функционал $D(t, x, u_t(s), u(t), u(t - \tau))$ в (2.1) зависит только от t, x, $u_t(s)$, $u(t - \tau)$, поэтому условие 6° принимает вид

$$\min_{u\in P}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} f_1(t, x, u, u(t-\tau))\right\} + D(t, x, u_t(s), u(t-\tau)) + + \max_{v\in Q}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} f_2(t, x, v)\right\} \leqslant 0 \tag{2.3}$$

Аналогично [2] введем понятие экстремальной стратегии U°. Если $\varepsilon(p) \leqslant c$ или $\varepsilon(p) \geqslant c + \beta$, то положим $U^\circ(p) = P$, если $c < \varepsilon(p) < < c + \beta$, то $U^\circ(p)$ — множество векторов $u^\circ \in P$, удовлетворяющих условию

$$\min_{u\in P}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} f_1(t, x, u, u(t-\tau)) + \lambda D(t, x, u_t(s), u, u(t-\tau))\right\} = = \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} f_1(t, x, u^\circ, u(t-\tau)) + \lambda D(t, x, u_t(s), u^\circ, u(t-\tau))$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & t \in [\vartheta - \tau, \vartheta] \\ 1, & t \in [t_0, \vartheta - \tau) \end{cases}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть существует функционал $\varepsilon(p)$, удовлетворяющий условиям 1° — 3° и в области $t < \vartheta$, $c < \varepsilon(p) < c + \beta$, где $\beta > 0$, — условиям 4° — 6°. Тогда, если $\varepsilon(p_0) \leqslant c$, то экстремальная стратегия U° разрешает задачу 1.1 сближения.

Аналогично решается задача об уклонении.

Пусть задан функционал $\varepsilon(p)$, удовлетворяющий условиям 1°, 2°, а также следующему условию.

3°а. Существует такое число $c \geqslant 0$, что $\varepsilon(\vartheta, x, u_\vartheta(s)) = \varepsilon(\vartheta, x) \leqslant c$, если $x \in M^c$.

Кроме того, пусть в области $t < \vartheta$, $c - \gamma < \varepsilon(p) \leqslant c$, где $\gamma > 0$, выполняются условия 4°, 5°, а также условие 6°а.

6°а. Справедливо неравенство, получающееся из (2.2) заменой знака $\leqslant$ на знак $\geqslant$.

Примечание 2.2. При $t \in [\vartheta - \tau, \vartheta]$ последнее неравенство можно представить в виде (2.3) с заменой знака $\leqslant$ на знак $\geqslant$.

Определим экстремальную стратегию V° следующим образом: если $\varepsilon(p) > c$ или $\varepsilon(p) \leqslant c - \gamma$, то $V^\circ(p) = Q$, если $c - \gamma < \varepsilon(p) \leqslant c$, то $V^\circ(p)$ — множество векторов $v^\circ \in Q$, удовлетворяющих условию

$$\max_{v \in Q} \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} f_2(t, x, v) \right\} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} f_2(t, x, v^\circ)$$

Справедлива

Теорема 2.2. Пусть существует функционал $\varepsilon(p)$, удовлетворяющий условиям 1°, 2°, 3°а и в области $t < \vartheta$, $c - \gamma < \varepsilon(p) \leqslant c$, где $\gamma > 0$,— условиям 4°, 5°, 6°а. Тогда, если $\varepsilon(p_0) > c$, то экстремальная стратегия V° разрешает задачу 1.2 уклонения.

Комбинируя теоремы 2.1 и 2.2, получаем решение дифференциальной игры сближения — уклонения в момент ϑ с целевым множеством M^c.

Теорема 2.3. Пусть существует функционал $\varepsilon(p)$, удовлетворяющий условиям 1°, 2°, краевому условию

$$\varepsilon(\vartheta, x) = \min_{m \in M} \{\| x - m \|\} \tag{2.4}$$

и в некоторой области $0 \leqslant \sigma_0 < \varepsilon(p) < \sigma^\circ$, $t < \vartheta$ — условиям 4° — 6°, причем (2.2) в условии 6° выполняется со знаком равенства. Тогда для любой начальной позиции p_0 и для любого числа c, такого, что $\sigma_0 < c < \sigma^\circ$, либо существует стратегия U°, такая, что для любого движения $x[t] = x[t, p_0, U^\circ]$ выполняется $x[\vartheta] \in M^c$, либо существует стратегия V°, такая, что для любого движения $x[t] = x[t, p_0, V^\circ]$ выполняется $x[\vartheta] \notin M^c$.

3. Обсудим возможность построения функционала ε с требуемыми свойствами, опираясь на результаты работы [2]. Рассмотрим вероятностные меры $\nu_t(dv)$, зависящие от $t \in [t_0, \vartheta)$ и определенные на множестве Q, удовлетворяющие условию слабой измеримости: для всякой непрерывной функции $\alpha(v)$ функция

$$\beta(t) = \int_Q \alpha(v) \nu_t(dv)$$

должна быть измеримой по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$. Рассмотрим также вероятностные меры $\mu_t(du)$, зависящие от $t \in [t_0 - \tau, \vartheta)$ и определенные на множестве P, удовлетворяющие аналогичному условию слабой измеримости. Для всякой вероятностной меры $\mu_t(du)$, слабо измеримой на $[t_0 - \tau, \vartheta)$, можно определить слабо измеримую на $[t_0, \vartheta)$ меру $\mu_{t,t-\tau}(du, du^\tau) = \mu_{t-\tau}(du^\tau)\mu_t(du)$, определенную при каждом значении $t \in [t_0, \vartheta)$ на множестве $P \times P$.

Имея слабоизмеримую на $[t_0 - \tau, \vartheta)$ функцию $\mu = \mu_t$ и слабоизмеримую на $[t_0, \vartheta)$ функцию $\nu = \nu_t$, можно построить меры на $[t_0, \vartheta) \times P \times P$ и $[t_0, \vartheta) \times Q$ соответственно: $\mu^*(dt, du, du^\tau) = \mu_{t-\tau}(du^\tau)\mu_t(du)\,dt$

и $\nu^*(dt, dv) = \nu_t(dv)\,dt$. Под слабой сходимостью функций μ_t, $t \in [t_0, \vartheta)$ будем понимать слабую сходимость в пространстве линейных функционалов

$$\beta_{\mu^*}(\alpha) = \int_{t_0}^{\vartheta}\int_P\int_P \alpha(t, u, u^\tau)\,\mu_{t-\tau}(du^\tau)\,\mu_t(du)\,dt$$

определенных на пространстве функции $\alpha(t, u, u^\tau)$, определенных и непрерывных на $[t_0, \vartheta) \times P \times P$. Соответственно слабая сходимость функций ν_t, $t \in [t_0, \vartheta)$ — это слабая сходимость в пространстве линейных функционалов

$$\beta_{\nu^*}(\alpha) = \int_{t_0}^{\vartheta}\int_Q \alpha(t, v)\,\nu_t(dv)\,dt$$

Множества мер вида $\mu_{t-\tau}(du^\tau)\,\mu_t(du)\,dt$ и $\nu_t(dv)\,dt$, построенные выше, являются множествами слабозамкнутыми и слабокомпактными в себе. Слабоизмеримые функции $\mu = \mu_t$ ($\nu = \nu_t$), $t \in [t_*, \vartheta)$, значения которых — вероятностные меры $\mu_t(du)$ на P ($\nu_t(dv)$ на Q), будем называть программными управлениями на полуинтервале $[t_*, \vartheta)$. Слабоизмеримые функции $\mu = \mu_{t_*+s}$, $s \in [-\tau, 0)$, значения которых — вероятностные меры $\mu_{t_*+s}(du)$ на P, будем называть «предысториями» программного управления к моменту t_*.

Программным движением $x(t, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t, \nu_t)$, порожденным программными управлениями μ_t, ν_t, предысторией программного управления μ_{t_*+s}, $s \in [-\tau, 0)$ к моменту t_* и начальными данными t_*, x_*, будем называть решение дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{x} = \int_P\int_P f_1(t, x, u, u^\tau)\,\mu_{t-\tau}(du^\tau)\,\mu_t(du) + \int_Q f_2(t, x, v)\,\nu_t(dv),$$

$$x(t_*) = x_*$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи.

Задача 3.1. Задана тройка $\{t_*;\ x_*;\ \mu_{t_*+s},\ -\tau \leqslant s < 0\}$, ограниченное замкнутое множество $M \subset E_n$, а также программное управление ν_t, $t \in [t_*, \vartheta)$. Среди программных управлений μ_t требуется найти оптимальное минимизирующее управление μ_t°, $t \in [t_*, \vartheta)$, удовлетворяющее условию

$$\rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t^\circ, \nu_t), M) = \min_{\mu_t}\{\rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t, \nu_t), M)\}$$

$$\rho(x, M) = \min_{m \in M}\{\|x - m\|\}$$

Задача 3.1 имеет решение при всяких t_*, x_*, μ_{t_*+s}, ν_t. Действительно, $\rho(x, M)$ зависит непрерывно от x, а $x = x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t, \nu_t)$, в свою очередь, как можно проверить [2], непрерывно зависит от программного управления μ_t, $t \in [t_*, \vartheta)$, если близость программных управлений μ_t одно к другому оценивать в слабой топологии. Тогда функционал $\rho(x(\vartheta,$

t_*, x_*, μ_{t_*+s}, μ_t, ν_t), M) на слабокомпактном множестве $\{\mu_t,\ t \in [t_*, \vartheta)\}$ своих аргументов достигнет минимума на каком-то управлении μ_t°.

Оптимальное программное управление μ_t°, решающее задачу 3.1, удовлетворяет некоторому условию, которое представляет собой аналог принципа максимума Л. С. Понтрягина, трансформированного для систем с нетривиальным запаздыванием в управляющей переменной (см. [6]).

Теорема 3.1. Пусть в условиях задачи 3.1 выполняется неравенство

$$\min_{\mu_t} \{\rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t, \nu_t), M)\} > 0$$

Тогда оптимальное программное управление μ_t° и порожденное им программное движение $x^\circ(t) = x(t, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t^\circ, \nu_t)$ при почти всех t из $[t_*, \vartheta]$ удовлетворяют условиям

$$\int_P \int_P s(t) f_1(t, x^\circ(t), u, u^\tau) \overset{\circ}{\mu}_{t-\tau}(du^\tau) \mu_t^\circ(du) +$$
$$+ \lambda \int_P \int_P s(t+\tau) f_1(t+\tau, x^\circ(t+\tau), u_\tau, u) \mu_t^\circ(du) \overset{\circ}{\mu}_{t+\tau}(du_\tau) =$$
$$= \int_P \min_{u \in P} \{s(t) f_1(t, x^\circ(t), u, u^\tau) \overset{\circ}{\mu}_{t-\tau}(du^\tau) +$$
$$+ \lambda s(t+\tau) f_1(t+\tau, x^\circ(t+\tau), u_\tau, u) \overset{\circ}{\mu}_{t+\tau}(du_\tau)\}$$
$$\lambda = \begin{cases} 1, & t \in [t_*, \vartheta - \tau) \\ 0, & t \in [\vartheta - \tau, \vartheta] \end{cases}$$

Здесь $u_\tau = u(t+\tau)$, $s(t)$ — решение уравнения с краевым условием

$$s^\cdot(t) = -L(t) s(t), \quad s(\vartheta) = \frac{x^\circ(\vartheta) - m^\circ}{\|x^\circ(\vartheta) - m^\circ\|} \tag{3.1}$$
$$L(t) = \int_P \int_P \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\right]_{x^\circ(t)} \overset{\circ}{\mu}_{t-\tau}(du^\tau) \mu_t^\circ(du) + \int_Q \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_{x^\circ(t)} \nu_t(dv)$$

где m° — точка из M, ближайшая к $x^\circ(\vartheta)$ (возможно неединственная).

Задача 3.2. Задана тройка $\{t_*, x_*; \mu_{t_*+s}, -\tau \leqslant s < 0\}$, ограниченное замкнутое множество M и момент времени ϑ. Среди программных управлений μ_t и ν_t, $t \in [t_*, \vartheta)$ требуется найти оптимальную максиминную пару $\{\mu_t^\circ, \nu_t^\circ\}$ управлений, удовлетворяющую условию

$$\rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t^\circ, \nu_t^\circ), M) = \tag{3.2}$$
$$= \min_{\mu_t} \{\rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t, \nu_t^\circ), M\} =$$
$$= \max_{\nu_t} \min_{\mu_t} \{\rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \mu_{t_*+s}, \mu_t, \nu_t), M) = \varepsilon(t_*, x_*, \mu_{t_*+s})$$

Рассуждениями, подобными доказательству существования решения задачи 3.1, проверяется, что задача 3.2 имеет решение при всяких t_*, x_*, μ_{t_*+s}.

Будем говорить, что в области $0 \leqslant \sigma_0 < \varepsilon < \sigma^\circ$ выполняются условия регулярности, если для всякой тройки $\{t_*; x_*; \mu_{t_*+s}, -\tau \leqslant s < 0\}$, такой, что $0 \leqslant \sigma_0 < \varepsilon(t_*, x_*, \mu_{t_*+s}) < \sigma^\circ$, задача 3.2 имеет единственное решение $\{\mu_t^\circ, \nu_t^\circ\}$ (с точностью до совпадения на множестве меры нуль) и значение $m^{\circ\circ} \in M$, минимизирующее $\rho\,(x\,(\vartheta,\ t_*,\ x_*,\ \mu_{t_*+s},\ \mu_t^\circ,\ \nu_t^\circ),\ M)$, также единственно.

Теорема 3.2. Пусть в области $0 \leqslant \sigma_0 < \varepsilon < \sigma^\circ$ выполняются условия регулярности. Тогда если $\sigma_0 < \varepsilon\,(t_*,\ x_*,\ \mu_{t_*+s}) < \sigma^\circ$, то оптимальное максимизирующее управление ν_t° задачи 3.2 удовлетворяет следующему условию:

$$\int\limits_Q s\,(t)\,f_2\,(t,x^{\circ\circ}(t),v)\,\nu_t^\circ\,(dv) = \max_{v \in Q}\,\{s\,(t)\,f_2\,(t,x^{\circ\circ}(t),v)\}$$

при почти всех $t \in [t_*,\ \vartheta]$. Для оптимального минимизирующего управления μ_t° задачи 3.2 выполняется заключение теоремы 3.1, где следует заменить $x^\circ\,(t)$ на $x^{\circ\circ}\,(t) = x\,(t,\ t_*,\ x\,(t,\ t_*,\ x_*,\ \mu_{t_*+s},\ \mu_t^\circ,\ \nu_t^\circ)$. Величина $s\,(t)$ определяется из (3.1), где следует заменить m° на $m^{\circ\circ}$, $x^\circ\,(t)$ на $x^{\circ\circ}\,(t)$, ν_t на ν_t°.

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 проводятся по плану доказательств лемм 36.1 и 37.1 в [2].

Величина $\varepsilon\,(t_*,\ x_*,\ \mu_{t_*+s})$ определена и тогда, когда вместо функций μ_{t_*+s}, значениями которых служат вероятностные меры $\mu_{t_*+s}\,(du^\tau)$, заданы функции $u_{t_*}\,(s)$, отображающие полуинтервал $[-\tau,\ 0)$ в P, измеримые по Лебегу. Следовательно, величина $\varepsilon\,(p)$ определена для каждой позиции $p = \{t;\ x;\ u_t\,(s),\ \ -\tau \leqslant s < 0\}$.

Назовем множествами программного поглощения $W_t{}^c$ цели M^c множества всех $\{x,\ u_t\,(s)\}$, таких, что $\varepsilon\,(t,\ x,\ u_t\,(s)) \leqslant c$. Таким образом, $\{x_*,\ u_{t_*}\,(s)\} \in W_{t*}{}^c$ тогда и только тогда, когда при всяком выборе программного управления $\nu_t\ (t \in [t_*,\ \vartheta))$ среди программных управлений $\mu_t\ (t \in [t_*,\vartheta))$ найдется по крайней мере одно такое, что для программного движения $x\,(t) = x\,(t,\ t_*,\ x_*,\ u_{t_*}\,(s),\ \mu_t,\ \nu_t)$ будет выполняться включение $x\,(\vartheta) \in M^c$.

Теорема 3.3. Функционал $\varepsilon\,(p_*) = \varepsilon\,(t_*,\ x_*,\ u_{t_*}\,(s))$, определенный равенством (3.2), удовлетворяет условиям 1°, 2° и краевому условию (2.4). Если в области $0 \leqslant \sigma_0 < \varepsilon < \sigma^\circ$ выполняются условия регулярности, то в этой области выполняются условия 4° — 6°, причем

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]_{\{t_*,\ x_*,\ u_{t_*}(s)\}} = s\,(t_*) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &D\,(t_*, x_*, u_{t_*}\,(s), u\,(t_*), u\,(t_* - \tau)) = \\ &= \lambda \int\limits_P s\,(t_* + \tau)\,f_1\,(t_* + \tau, x^{\circ\circ}\,(t_* + \tau), u_\tau, u\,(t_*))\,\mathring{\mu}_{t_*+\tau}\,(du_\tau) - \\ &- \min_{u \in P}\,\{s\,(t_*)\,f_1\,(t_*, x_*, u, u\,(t_* - \tau)) + \\ &+ \lambda \int\limits_P s\,(t_* + \tau)\,f_1\,(t_* + \tau, x^{\circ\circ}\,(t_* + \tau), u_\tau, u)\,\mathring{\mu}_{t_*+\tau}\,(du_\tau)\} - \\ &- \max_{v \in Q}\,\{s\,(t_*)\,f_2\,(t_*, x_*, v)\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & t_* \in [t_0, \vartheta - \tau) \\ 0, & t_* \in [\vartheta - \tau, \vartheta] \end{cases}$$

и в условии 6° оценки (2.2) (2.3) выполняются со знаком равенства. Величины μ_t°, ν_t°, $x^{\circ\circ}\,(t)$, $s\,(t)$ здесь те же, что и в теореме 3.2.

При доказательстве теоремы 3.3 может быть использована схема рассуждений из доказательства аналогичных утверждений в [2].

4. В качестве примера рассмотрим линейную управляемую систему с последействием

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + B_1(t)\,u(t) + B_2(t)\,u(t-\tau) - C(t)\,v(t) + w(t) \tag{4.1}$$

Матрицы $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C(t)$, $w(t)$ — непрерывные на $[t_0, \vartheta]$ функции. Предположим, что множества P, Q, M выпуклы. Рассмотрим для определенности задачу 1.1 сближения с множеством M.

Программные управления здесь — любые интегрируемые по Лебегу на отрезке $[t_0, \vartheta]$ функции $u(t)$ ($v(t)$) со значениями в P (Q).

Используя формулу Коши и условия отделимости целевого множества M и множества достижимости, можно установить вид множеств программного поглощения W_t.

Теорема 4.1. $\{x;\ u_t(s), -\tau \leqslant s < 0\} \in W_t$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t, x, u_t(s)) \leqslant 0$, где

$$\gamma(t, x, u_t(s)) = \max_{\|l\|=1}\Bigg\{\int_t^{\vartheta}\max_{v\in Q}\{lF(\vartheta,\xi)\,C(\xi)\,v(\xi)\}\,d\xi - \lambda I - \tag{4.2}$$

$$-\int_{\eta_1(\lambda)}^{\vartheta}\max_{u\in P}\{lF(\vartheta,\xi)\,B_1(\xi)\,u(\xi)\}\,d\xi - \int_t^{\vartheta} lF(\vartheta,\xi)\,w(\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_{-\tau}^{\eta_2(\lambda)} lF(\vartheta, t+\tau+s)\,B_2(t+\tau+s)\,u_t(s)\,ds - lF(\vartheta, t)\,x + \min_{q\in M} lq\Bigg\},$$

$$l\in E_n,\quad \lambda = \begin{cases}1, & t\in[t_0, \theta-\tau)\\ 0, & t\in[\theta-\tau, \theta]\end{cases}$$

$$I = \int_t^{\vartheta-\tau}\max_{u\in P}\{l\,[F(\vartheta,\xi)\,B_1(\xi) + F(\vartheta,\xi+\tau)\,B_2(\xi+\tau)]\,u(\xi)\}\,d\xi$$

$$\eta_1(\lambda) = \begin{cases}\vartheta-\tau, & \lambda=1\\ t, & \lambda=0,\end{cases}\qquad \eta_2(\lambda) = \begin{cases}0, & \lambda=1\\ \vartheta-\tau-t, & \lambda=0\end{cases}$$

Здесь $F(\vartheta, \xi)$ — фундаментальная для уравнения (4.1) матрица, т. е. $n\times n$ — матрица со свойствами $F(t, t) = E$, $\partial F(t, \xi)/\partial t = A(t)\,F(t, \xi)$, E — единичная матрица.

Предположим, что в области $0 < \varepsilon < \infty$ выполняются условия регулярности. Используя результаты п. 2, 3, построим экстремальную стратегию U°. Уравнение и краевое условие для величины $s(t)$ в линейном случае примут вид

$$s^{\cdot}(t) = -A(t)\,s(t),\quad s(\vartheta) = -l^\circ$$

Тогда

$$s(t) = -F(\vartheta, t)\,l^\circ \tag{4.3}$$

где l° — вектор, доставляющий максимум в выражении для $\gamma(t, x, u_t(s))$ в (4.2).

Из (3.4), делая соответствующие преобразования, получаем

$$D(t, x, u_t(s), u(t), u(t-\tau)) = \lambda s(t+\tau)\,B_2(t+\tau)\,u(t) - \min_{u\in P}\{s(t)\,B_1(t) + \tag{4.4}$$

$$+\lambda s(t+\tau)\,B_2(t+\tau)\,u\} + \max_{v\in Q}\{s(t)\,C(t)\,v\} - s(t)\{A(t)x + B_2(t)u(t-\tau) + w(t)\}$$

$$\lambda = \begin{cases}1, & t\in[t_0, \vartheta-\tau)\\ 0, & t\in[\vartheta-\tau, \vartheta]\end{cases}$$

Используя (4.3), (4.4), получаем в соответствии с теоремами 3.3 и 2.1, что экстремальная стратегия U°, разрешающая в регулярном случае задачу сближения с целевым множеством M (если начальная позиция p_0 такова, что $\gamma(p_0) \leqslant 0$), задается следующим образом.

Если $\gamma(p) \leqslant 0$, то $U^\circ(p) = P$. Если $\gamma(p) > 0$, то

$$l^\circ [F(\vartheta, t) B_1(t) + \lambda F(\vartheta, t+\tau) B_2(t+\tau)] u^\circ = \max_{u \in P} \{l^\circ [F(\vartheta, t) B_1(t) + \lambda F(\vartheta, t+\tau) B_2(t+\tau)] u\} \tag{4.5}$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \vartheta - \tau) \\ 0, & t \in [\vartheta - \tau, \vartheta] \end{cases}$$

Условия регулярности в данном случае означают в соответствии с определением п. 3 и теоремами 3.1 и 3.2, что при $\gamma(p) > 0$, во-первых, вектор l°, доставляющий максимум в выражении для $\gamma(p)$, единствен, во-вторых, существует единственная (с точностью до совпадения на множестве меры нуль) пара управлений $\{u^\circ(t), v^\circ(t)\}$, задаваемая условиями (4.5) и условием

$$l^\circ F(\vartheta, t) C(t) v^\circ = \max_{v \in Q} \{l^\circ F(\vartheta, t) C(t) v\} \tag{4.6}$$

Примечание 4.1. В рассматриваемом примере можно ослабить условие регулярности, требуя лишь единственности вектора l°, доставляющего максимум в выражении для $\gamma(p) > 0$ (см. [1,2]). Это требование сводится к требованию вогнутости по l функции $\chi_t(l)$, задаваемой условием

$$\chi_t(l) = \int_t^{\vartheta} \max_{v \in Q} \{lF(\vartheta, \xi) C(\xi) v(\xi)\} d\xi - \lambda \int_t^{\vartheta-\tau} \max_{u \in P} \{l [F(\vartheta, \xi) B_1(\xi) + F(\vartheta, \xi+\tau) B_2(\xi+\tau)] u(\xi)\} d\xi - \int_{\eta_1}^{\vartheta} \max_{u \in P} \{lF(\vartheta, \xi) B_1(\xi) u(\xi)\} d\xi + \min_{q \in M} lq$$

$$\lambda = 1, \quad \eta_1 = \vartheta - \tau, \quad t \in [t_0, \vartheta - \tau)$$
$$\lambda = 0, \quad \eta_1 = t, \quad t \in [\vartheta - \tau, \vartheta]$$

Примечание 4.2. Функция $\chi_t(l)$ при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ будет заведомо вогнутой по l, если существует такое выпуклое множество $R(t)$, что

$$[F(\vartheta, t) B_1(t) + \lambda F(\vartheta, t+\tau) B_2(t+\tau)] P = F(\vartheta, t) C(t) Q + R(t)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \vartheta - \tau) \\ 0, & t \in [\vartheta - \tau, \vartheta] \end{cases}$$

Поступила 20 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Линейные дифференциально-разностные игры. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
4. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. *Banks H. T., Jacobs M. Q., Latina M. R.* The synthesis of optimal controls for linear problems with retarded controls. J. Optimizat. Theory and Appl., 1971, vol. 8, No. 5.
6. *Вежбицкий А.* Принцип максимума для процессов с нетривиальным запаздыванием управления. Автоматика и телемеханика, 1970, № 10.