Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 62—50

ОБ УСТОЙЧИВОМ ПОЗИЦИОННОМ УПРАВЛЕНИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

А. В. Кряжимский

(Свердловск)

Для более общего по сравнению с [1–3] класса конфликтно-управляемых систем, т. е. систем, подчиненных требованиям единственности программных движений и их равномерной ограниченности, предлагается процедура управления с поводырем [1 – 3], доставляющая устойчивое по отношению к малым информационным помехам решение игровых задач динамики. Терминология и обозначения следуют [2].

1. Пусть конфликтно-управляемая система

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

($t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, x — n-мерный фазовый вектор, u и v — соответственно управления первого и второго игроков, P, Q — компакты в конечномерных евклидовых пространствах, f — непрерывная функция) удовлетворяет условиям:

а) для любых начальной позиции $\{t_0, x_*\}$ и программного управления $\eta_{(\cdot)}$ существует и единственно программное движение $x(t, t_0, x_*, \eta_{(\cdot)})$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$;

б) для любого $K > 0$ множество всех программных движений из позиций $\{t_0, x_*\}$, $\|x_*\| < K$ равномерно ограничено ($\|\cdot\|$ — евклидова норма).

Пусть заданы замкнутые множества M, $N \subset R^{n+1}$ (M_t^ε, N_t^ε далее обозначают ε-окрестности множеств $\{x \mid \{t, x\} \in M\}$, $\{x \mid \{t, x\} \in N\}$ соответственно) и перед первым игроком стоит задача о сближении системы (1.1) с M внутри N до момента ϑ. Информационные возможности первого игрока таковы. В каждый текущий момент t первым игроком измеряется фазовое состояние $x(t)$ системы (1.1), но неточно: результат измерения (сигнал) $y(t)$ связан с $x(t)$ соотношением $\|x(t) - y(t)\| \leqslant \gamma$. Кроме того, параллельно с движением системы (1.1) первым игроком отрабатывается и точно замеряется движение управляемой системы-поводыря

$$w^{\cdot} = f(t, w, u^*, v^*) \tag{1.2}$$

$$z^{\cdot} = f(t, y, u^*, v^*) \tag{1.3}$$

$$u^* \in P, \quad v^* \in Q, \quad y \in R^n$$

Выбор начального состояния системы (1.2), (1.3) также находится в распоряжении первого игрока. Процедуры управления первого игрока системой (1.1) в рамках этих информационных возможностей будем называть процедурами управления с поводырем (первого игрока).

Рассмотрим случай, когда для первого игрока в качестве управляющих воздействий допустимы смешанные управления — вероятностные (борелевские, регулярные) меры μ на P. Отвечающую этому случаю процедуру управления S^* назовем процедурой управления с поводырем в смешанных управлениях и зададим набором

$$p^* = (W^*,\ \mu^\circ(du \mid t, y, z),\ \nu^*(dv \mid t, y, z),\ \mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*\nu)) \tag{1.4}$$

— в краткой записи $S^* \div p^*$. Здесь W^* — замкнутый $\tilde{u}$-стабильный (относительно M) мост, содержащийся в N и обрывающийся к моменту ϑ на M; $\mu^\circ(du \mid t, y, z)$ и $\nu^*(dv \mid t, y, z)$ — соответственно смешанные управления первого и второго игроков, такие, что

$$\max_{\nu \in \{\nu\}} \int_P \int_Q (y - z)' f(t, y, u, v)\, \mu^\circ(du \mid t, y, z)\, \nu(dv) =$$

$$= \min_{\mu \in \{\mu\}} \max_{\nu \in \{\nu\}} \int_P \int_Q (y - z)' f(t, y, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

$$\min_{\mu \in \{\mu\}} \int_P \int_Q (y - z)' f(t, y, u, v)\, \mu(du)\, \nu^*(dv \mid t, y, z) =$$

$$= \max_{\nu \in \{\nu\}} \min_{\mu \in \{\mu\}} \int_P \int_Q (y - z)' f(t, y, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

$\mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*, \nu)$ — измеримое по t смешанное управление первого игрока со следующим свойством: для любых $\{t_*, w_*\} \in W^*$, $t^* > t_*$ и смешанного управления ν^* второго игрока решение $w(t)$ дифференциального уравнения

$$w^{\cdot} = \int_P \int_Q f(t, w, u, v)\, \mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*, \nu^*)\, \nu^*(dv)$$

$$w(t_*) = w_*$$

удовлетворяет условию $\{t, w(t)\} \in W^*$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, если $T = \{\tau \in [t_*, t^*] \mid \{\tau, w(\tau)\} \in M\}$ пусто, и условию $\{t, w(t)\} \in W^*$, $t_* \leqslant t \leqslant \min T$ в противном случае; отметим, что из свойств W^* следует существование $\mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*, \nu)$.

Движением, отвечающим процедуре управления с поводырем в смешанных управлениях $S^* \div p^*$ (1.4), разбиению

$$\Delta = \{t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_m = \vartheta\} \tag{1.5}$$

отрезка $[t_0, \vartheta]$ и информационной помехе величины $\gamma \geqslant 0$, назовем всякую абсолютно непрерывную функцию $(x(t), w(t), z(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, которая удовлетворяет равенствам

$$x(t_0) = x_0, \quad w(t_0) = z(t_0) = w_0$$

где w_0 — ближайшая к $y(\tau_0)$ точка из $W_{t_0}^* = \{w \mid \{t_0, w\} \in W^*\}$, $\| y(\tau_0) - x_0 \| \leqslant \gamma$, и на участках $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \ldots, m - 1$ определяется условием: $(x(t), w(t), z(t))$, $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ есть решение дифференциального уравнения

$$x^{\cdot} = \int\limits_P \int\limits_Q f(t, x, u, v)\, \mu_i^{\circ}(du)\, \nu_t(dv)$$

$$w^{\cdot} = \int\limits_P \int\limits_Q f(t, w, u, v)\, \mu_{it}^{*}(du)\, \nu_i^{*}(dv)$$

$$z^{\cdot} = \int\limits_P \int\limits_Q f(t, y(\tau_i), u, v)\, \mu_{it}^{*}(du)\, \nu_i^{*}(dv)$$

$$\mu_i^{\circ}(du) = \mu^{\circ}(du \mid \tau_i,\ y(\tau_i),\ z(\tau_i))$$

$$\nu_i^{*}(dv) = \nu^{*}(dv \mid \tau_i,\ y(\tau_i),\ z(\tau_i))$$

$$\| y(\tau_i) - x(\tau_i) \| \leqslant \gamma$$

$$\mu_{it}^{*}(du) = \mu_t^{*}(du \mid w(\tau_i),\ \tau_i,\ \tau_{i+1},\ \nu_i^{*})$$

ν_t — некоторое измеримое по t смешанное управление второго игрока. Параметры $y(\tau_i)$, $\mu_i^{\circ}(du)$, $(\mu_{it}^{*}(du), \nu_i^{*}(dv))$ соответственно имеют смысл: сигнала о состоянии $x(\tau_i)$ системы (1.1); смешанного управления, построенного первым игроком на основании информации $(\tau_i, y(\tau_i), z(\tau_i))$ и применяемого им на участке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ к системе (1.1); смешанного управления, выработанного первым игроком на основании информации $(\tau_i, \tau_{i+1}, y(\tau_i), w(\tau_i), z(\tau_i))$ и подаваемого на участке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ на систему (1.3) (1.4) (движение которой определяется еще и «управлением» $y(\tau_i)$ — значением наблюдаемого сигнала); ν_t — реализация смешанного управления второго игрока при движении системы (1.1).

Теорема 1.1. Пусть W^* — замкнутый $\tilde{u}$-стабильный мост, содержащийся в N и обрывающийся к моменту ϑ на M, и $\{t_0, x_0\} \in W^*$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что всякое движение $(x(t), w(t), z(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, отвечающее процедуре управления с поводырем в смешанных управлениях $S^* \div p^*$ (1.4), разбиению (1.5) диаметра

$$d(\triangle) = \max\{\tau_{i+1} - \tau_i \mid i = 0, \ldots, m-1\} < \delta$$

и информационной помехе величины $\gamma < \delta$, удовлетворяет условию

$$x(t) \in N_t^{\varepsilon}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta, \quad x(\tau) \in M_{\tau}^{\varepsilon}$$

Доказательство теоремы, как и в [1–3], вытекает из того, что при малых $d(\Delta)$ и γ мало̀ рассогласование между движением $x(t)$ и движением $w(t)$ (которое по построению управлений $\mu_{it}^{*}(du)$ течет по мосту W^* до момента попадания на M). Последний же факт, в свою очередь, следует из близости — при малых $d(\Delta)$ и γ — движений $x(t)$ и $z(t)$ (обеспечиваемой выбором управлений $\mu_i^{\circ}(du)$ и $\nu_i^{*}(dv)$) на основе следующей леммы.

Лемма 1.1. По любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что, каковы бы ни были программные управления $\eta_{(\cdot)}'$, $\eta_{(\cdot)}''$ и измеримая n-мерная вектор-функция $y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, решение $(x(t), w(t), z(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ дифференциального уравнения

$$x^{\cdot} = \int\limits_{P \times Q} f(t, x, u, v)\, \eta_t'(du, dv)$$

$$w^{\cdot} = \int\limits_{P \times Q} f(t, w, u, v)\, \eta_t''(du, dv)$$

$$z^{\cdot} = \int\limits_{P\times Q} f(t, y(t), u, v)\, \eta_t''(du, dv)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad w(t_0) = z(t_0) = w_0$$

удовлетворяет условию

$$\| x(t) - w(t) \| < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

если только

$$\| x_0 - w_0 \| < \delta$$

$$\| y(t) - x(t) \| < \delta, \quad \| x(t) - z(t) \| < \delta, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

(Лемма вытекает из свойств а), б) системы (1.1) и слабой замкнутости и компактности множества всех программных управлений.)

Замечание 1.1. Для построенных на базе процедур управления $S^* \div p^*$ (1.4) стохастических процедур управления с поводырем (см. [3, 4]) имеют место результаты, подобные [3, 4].

2. Пусть теперь допустимыми значениями управляющих воздействий первого игрока являются лишь чистые управления — элементы P. В этом случае, в зависимости от того, выполнено или нет условие

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q} s' f(t, x, u, v) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P} s' f(t, x, u, v), t \in [t_0, \vartheta], x, s \in R^n \tag{2.1}$$

«седловой точки в маленькой игре», будем пользоваться соответственно процедурой управления в чистых управлениях и минимаксной процедурой управления с поводырем.

Будем говорить, что программное управление η_t согласовано с борелевской функцией $v(u)$ со значениями в Q, если найдется измеримое по t смешанное управление $\mu_t(du)$ первого игрока, такое, что для любой непрерывной скалярной функции $g(u, v)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется равенство

$$\int\limits_{P\times Q} g(u, v)\, \eta_t(du, dv) = \int\limits_{P} g(u, v(u))\, \mu_t(du)$$

Процедуру управления с поводырем в чистых управлениях S (минимаксную процедуру управления с поводырем S_*) зададим набором

$$p = (W, u^{\circ}(t, y, z), v^*(t, y, z), \mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*, v)) \tag{2.2}$$

$$(p_* = (W_*, u^{\circ}(t, y, z), v^*(t, y, z, u), \eta_t^*(du, dv \mid w_*, t_*, t^*, v(\cdot)))) \tag{2.3}$$

— в краткой записи $S \div p$ $(S_* \div p_*)$. Здесь W (W_*) — замкнутый u-$(u_*$-)стабильный мост, содержащийся в N и обрывающийся к моменту ϑ на M; $u^{\circ}(t, y, z) \in P$, $v^*(t, y, z) \in Q$ $(v^*(t, y, z, u) \in Q)$ таковы, что

$$\max_{v\in Q}(y - z)' f(t, y, u^{\circ}(t, y, z), v) = \min_{u\in P}\max_{u\in Q}(y - z)' f(t, y, u, v)$$

$$\min_{u\in P}(y - z)' f(t, y, u, v^*(t, y, z)) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}(y - z)' f(t, y, u, v)$$

$$((y - z)' f(t, y, u, v^*(t, y, z, u)) = \max_{v\in Q}(y - z)' f(t, y, u, v)$$

причем функция $v^*(t, y, z, u)$ — борелевская по u); $\mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*,$

v) — измеримое управление ($\eta_t^*(du, dv \mid w_*, t_*, t^*, v(\cdot))$ — управление из слабого замыкания множества всех согласованных с борелевской функ цией $v(\cdot) = v(u)$ программных управлений) со следующим свойством: для любых $\{t_*, w_*\} \in W$ ($\{t_*, w_*\} \in W_*$), $t^* > t_*$ и $v^* \in Q$ (борелевской функции $v^*(u)$ со значениями в Q) решение $w(t)$ дифференциального уравнения

$$w^{\cdot} = \int\limits_P f(t, w, u, v^*)\, \mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*, v^*)$$

$$\left(w^{\cdot} = \int\limits_{P\times Q} f(t, w, u, v)\, \eta_t^*(du, dv \mid w_*, t_*, t^*, v^*(\cdot))\right)$$

$$w(t_*) = w_*$$

удовлетворяет условию $\{t, w(t)\} \in W$ ($\{t, w(t)\} \in W_*$), $t_* \leqslant t \leqslant t^*$, если множество $T = \{\tau \in [t_*, t^*] \mid \{\tau, w(\tau)\} \in M\}$ пусто, и условию $\{t, w(t)\} \in W$ ($\{t, w(t)\} \in W_*$), $t_* \leqslant t \leqslant \min T$ в противном случае; отметим, что из свойств W (W_*) следует существование $\mu_t^*(du \mid w_*, t_*, t^*, v)$ ($\eta_t^*(du, dv \mid w_*, t_*, t^*, v(\cdot))$).

Движением, отвечающим процедуре управления с поводырем в чистых управлениях $S \div p$ (2.2) (минимаксной процедуре управления $S_* \div p_*$ (2.3)), разбиению (1.5) отрезка $[t_0, \vartheta]$ и информационной помехе величины $\gamma \geqslant 0$, назовем всякую абсолютно непрерывную функцию $(x(t), w(t), z(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, которая удовлетворяет равенствам

$$x(t_0) = x_0, \quad w(t_0) = z(t_0) = w_0$$

где w_0 — ближайшая к $y(\tau_0)$ точка из $W_{t_0} = \{w \mid \{t_0, w\} \in W\}$ (из $W_{*t_0} = \{w \mid \{t_0, w\} \in W_*\}$), $\| y(\tau_0) - x_0 \| \leqslant \gamma$, и на участках $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \ldots, m-1$ определяется условием: $(x(t), w(t), z(t))$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ есть решение дифференциального уравнения

$$x^{\cdot} = f(t, x, u_i^{\circ}, v(t))$$

$$w^{\cdot} = \int\limits_P f(t, w, u, v_i^*)\, \mu_{it}^*(du)$$

$$z^{\cdot} = \int\limits_P f(t, y(\tau_i), u, v_i^*)\, \mu_{it}^*(du)$$

$$u_i^{\circ} = u^{\circ}(\tau_i, y(\tau_i), z(\tau_i)), \quad v_i^* = v^*(\tau_i, y(\tau_i), z(\tau_i)),$$

$$\| y(\tau_i) - x(\tau_i) \| \leqslant \gamma$$

$$\mu_{it}^*(du) = \mu_t^*(du \mid w(\tau_i), \tau_i, \tau_{i+1}, v_i^*)$$

$v(t)$ — некоторое измеримое по t управление второго игрока

$$x^{\cdot} = f(t, x, u_i^{\circ}, v(t))$$

$$w^{\cdot} = \int\limits_{P\times Q} f(t, w, u, v)\, \eta_{it}^*(du, dv)$$

$$z^{\cdot} = \int\limits_{P\times Q} f(t, y(\tau_i), u, v)\, \eta_{it}^*(du, dv)$$

$$u_i^{\circ} = u^{\circ}(\tau_i, y(\tau_i), z(\tau_i)), \quad \|y(\tau_i) - x(\tau_i)\| \leqslant \gamma$$

$$\eta_{it}^* (du, dv) = \eta_t^* (du, dv \mid w (\tau_i), \tau_i, \tau_{i+1}, v_i^* (\cdot))$$
$$v_i^* (u) = v^* (\tau_i, y (\tau_i), z (\tau_i), u)$$

$v (t)$ — некоторое измеримое по t управление второго игрока).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (2.1), W — замкнутый u-стабильный мост, содержащийся в N и обрывающийся к моменту ϑ на M, и $\{t_0, x_0\} \in W$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что всякое движение $(x (t), w (t), z (t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, отвечающее процедуре управления с поводырем в чистых управлениях $S \div p$ (2.2), разбиению (1.5) диаметра $d (\triangle) < \delta$ и информационной помехе величины $\gamma < \delta$, удовлетворяет условию

$$x (t) \in N_t^\varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta, \quad x (\tau) \in M_\tau^\varepsilon \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. Пусть W_*— замкнутый, u_*-стабильный мост, содержащийся в N и обрывающийся к моменту ϑ на M, и $\{t_0, x_0\} \in W_*$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что всякое движение $(x (t), w (t), z (t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, отвечающее минимаксной процедуре управления с поводырем $S_* \div p_*$ (2.3), разбиению (1.5) диаметра $d (\Delta) < \delta$ и информационной помехе величины $\gamma < \delta$, удовлетворяет условию (2.4).

Замечание 2.1. Результаты, аналогичные приведенным, справедливы в отношении задачи об уклонении для второго игрока (противоположной рассмотренной задаче о сближении).

Автор благодарит Н. Н. Красовского, Ю. С. Осипова и А. И. Субботина за обсуждение работы и ценные советы.

Поступила 24 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения—уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2, 3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И., Россохин В. Ф.* Стохастические стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 5.