

8. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., Гостехиздат, 1937.
9. Сумбатов А. С. К проблеме поиска циклических координат в консервативных динамических системах. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
10. Synge J. L. On the geometry of dynamics. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1926, vol. 226, No. 637, p. 31—104.
11. Харламов М. П. Об условно-линейном интеграле уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
12. Харламов М. П. Об одном классе интегралов уравнений движения твердого тела. Докл. АН УССР, 1977, А, № 2.

УДК 531 : 534

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНЫМИ ГРУЗАМИ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ УДАРАХ

Л. А. Манашкин

(Днепропетровск)

Рассматриваются продольные колебания одномерной системы, которую можно представить в виде стержня, взаимодействующего с различного рода подвижными инерционными средами. Предполагается, что среды между собой не взаимодействуют, могут двигаться только вдоль стержня и при этом нет внутреннего взаимодействия элементов сред. С помощью такой модели могут быть исследованы колебания достаточно длинных цепочек твердых тел, к которым присоединены посредством деформируемых элементов другие подвижные тела, колебания одномерных систем твердых тел с полостями, частично заполненными жидкостью, и т. п. Переходный режим движения подобных систем рассмотрен в [1].

1. Рассмотрим стержень длины l_1 , сталкивающийся с начальной скоростью v_0 с таким же неподвижным стержнем длины l_2 . После столкновения образуется новый стержень длины $l = l_1 + l_2$. Движение такой системы описывается дифференциальными уравнениями с граничными и начальными условиями

$$(1.1) \quad \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n P_j = \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \rho_{2j} \partial^2 w_j / \partial t^2 + P_j &= \rho_{2j} \partial^2 u / \partial t^2, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \partial u(0, t) / \partial x &= \partial u(l, t) / \partial x = 0, \quad u(x, 0) = w_j(x, 0) = 0 \\ \partial w_j(x, 0) / \partial t &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \partial u(x, 0) / \partial t = v_0 [1 - \sigma_0(x - l_1)] \end{aligned}$$

Здесь ρ_1 — плотность стержня, ρ_{2j} — плотность среды с номером j ; $u(x, t)$ — продольные перемещения в момент времени t сечения стержня, удаленного на расстояние x от одного из свободных концов (второму свободному концу соответствует координата $x = l$); $w_j(x, t)$ — перемещение среды с номером j относительно стержня; S — продольная сила, действующая по сечению стержня; P_j — интенсивность сил взаимодействия стержня со средой с номером j , $\sigma_0(x - l_1)$ — единичная функция Хевисайда.

Уравнения (1.1) представим в виде

$$(1.3) \quad \rho J_r \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \rho = \rho_1 + \sum_{j=1}^n \rho_{2j}$$

$$J_r[z] = [z] - \sum_{j=1}^n r_{2j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t G_j(t - \tau)[z] d\tau, \quad r_{2j} = \frac{\rho_{2j}}{\rho}$$

Здесь $G_j(t - \tau)$ — функция Грина, определяющая силы взаимодействия со средами. Отыскивая решение (1.3) в виде $u(x, t) = X(x) T(t)$, получим

$$(1.4) \quad X'' + (\lambda / l)^2 X = 0, \quad \rho J_r [T''] + (\lambda / l)^2 S [T] = 0$$

Здесь S — оператор (см. ниже), λ — собственное значение, которое при условиях (1.2) равно $0, \pi, 2\pi, \dots, i\pi, \dots$. Этим собственным значениям соответствуют собственные функции $X_i(x) = \cos(\lambda x / l)$.

Будем далее отыскивать решение в виде

$$(1.5) \quad u(x, t) = X_0 q_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t)$$

$$w_j(x, t) = X_0 \Phi_{0j}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) \Phi_{ij}(t)$$

Здесь $q_0, \dots, q_i, \dots, \Phi_{0j}, \dots, \Phi_{ij}$ — обобщенные координаты [2], определяемые из дифференциальных уравнений

$$(1.6) \quad a_{00}^i q_i'' + \sum_{j=1}^n a_{0j}^i \Phi_{ij}'' + z_{1i} S [q_i] = 0$$

$$a_{j0}^i q_i'' + a_{jj}^i \Phi_{ij}'' + z_{2i} P_j [\Phi_{ij}] = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$a_{00}^i = \rho z_{2i}, \quad a_{j0}^i = a_{0j}^i = -r_{2j} a_{00}^i, \quad a_{jj}^i = r_{2j} a_{00}^i$$

$$z_{1i} = \int_0^l (X_i')^2 dx, \quad z_{2i} = \int_0^l X_i^2 dx$$

где S и P_j — операторы, структура которых определяет зависимость величин сил S и P_j от деформаций $\partial u / \partial x$ и перемещений $w_j(x, t)$.

В соответствии с условиями (1.2) для уравнений (1.6) получим

$$(1.7) \quad q_i(0) = \Phi_{ij}(0) = 0, \quad \dot{q}_i(0) = v_0 \frac{z_{3i}}{z_{2i}}, \quad \Phi_{ij}(0) = 0, \quad z_{3i} = \int_0^{l_1} X_i^2 dx$$

Преобразуя уравнения (1.6) при условиях (1.7) по Лапласу, получим систему алгебраических уравнений

$$(1.8) \quad a_{00}^i p^2 q_i(p) + \sum_{j=1}^n a_{0j}^i p^2 \Phi_{ij}(p) + z_{1i} S [p] q_i(p) = \Phi_i$$

$$a_{j0}^i p^2 q_i(p) + a_{jj}^i p^2 \Phi_{ij}(p) + z_{2i} P_j [p] \Phi_{ij}(p) = -r_{2j} \Phi_i$$

$$i = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Здесь p — комплексная переменная, $q_i(p), \Phi_{ij}(p), S[p], P_j[p]$ — изображения переменных и операторов, $\Phi_i = \rho v_0 z_{3i}$.

Решениями уравнений (1.8) будут выражения

$$(1.9) \quad q_i(p) = D_i^q(p) / D_i(p), \quad \Phi_{ij}(p) = D_{ij}^\Phi(p) / D_i(p)$$

$$D_i = \left\{ T^i - \sum_{j=1}^n a_{0j}^i p^2 R_j^i \right\} \prod_{j=1}^n Q_j^i$$

$$D_i^q = \Phi_i \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n r_{2j} R_j^i \right\} \prod_{j=1}^n Q_j^i$$

$$D_{ij}^\Phi = -\Phi_i \left\{ r_{2j} \left[T^i - \sum_{k=1}^n a_{0k}^i p^2 (1 - \delta_{kj}) R_k^i \right] + \right.$$

$$+ a_{0j}^i p^2 \left[1 + \sum_{k=1}^n r_{2k} (1 - \delta_{kj}) R_k^i \right] \prod_{k=1}^n (Q_k^i)^{1-\delta_{kj}}$$

$$Q_j^i = a_{jj}^i p^2 + z_{2i} P_j [p], \quad R_j^i = a_{0j}^i p^2 (Q_j^i)^{-1}, \quad T^i = a_{00}^i p^2 + z_{1i} S [p]$$

Здесь δ_{kj} — символ Кронекера.

Изображения функций, описывающих изменение во времени сил S и ускорений a_j сред с номерами $j = 1, 2, \dots, n$, имеют вид

$$(1.10) \quad S(p) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i'(x) S[p] q_i(p)$$

$$a_j = (r_{2j} p)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} X_i(x) P_j[p] \varphi_{ij}(p)$$

Из (1.9), (1.10) для случая комплексных корней уравнений $D_i(p) = 0$ (h_{ij} и ω_{ij} — вещественная и мнимая части пары корней с номером j) получим

$$(1.11) \quad S(\xi, t) = -v_0 \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \sin i\pi\xi_0 \sin i\pi\xi \sum_{j=1}^{n+1} V_{ij}, \quad \xi = \frac{x}{l}$$

$$a_j(\xi, t) = -v_0 \sum_{i=1}^{\infty} i f(i) \sin i\pi\xi_0 \cos i\pi\xi \sum_{j=1}^{n+1} W_{ij}, \quad \xi_0 = \frac{l_1}{l}$$

$$V_{ij} = A_{ij} \exp(-h_{ij}t) \cos(\omega_{ij}t + \gamma_{ij}), \quad W_{ij} = B_{ij} \exp(-h_{ij}t) \cos(\omega_{ij}t + \varepsilon_{ij})$$

Для каждой пары действительных корней этого же уравнения функции V_{ij} и W_{ij} определяются в виде

$$(1.12) \quad V_{ij} = A_{ij} \exp(-h_{ij}t) + \gamma_{ij} \exp(-\omega_{ij}t)$$

$$W_{ij} = B_{ij} \exp(-h_{ij}t) + \varepsilon_{ij} \exp(-\omega_{ij}t)$$

В выражениях (1.11) и (1.12) величины A_{ij} , B_{ij} , γ_{ij} и ε_{ij} являются функциями исходных параметров системы, собственных значений λ_i и соответствующих значений h_{ij} и ω_{ij} ; $f(i)$ — множитель сходимости [3], предназначенный для сглаживания выбросов, обусловленных явлением Гиббса.

Таким образом, решение (1.11) представляет сумму пакетов частных решений с одинаковыми распределениями амплитуд по длине системы. Число составляющих пакета равно $n + 1$, n — число подвижных сред, с которыми взаимодействует стержень.

2. Исследуем продольные силы S и ускорения a_j для простейшего случая $n = 1$. Этот случай соответствует, например, продольным колебаниям цепочки экипажей с подвижными амортизированными грузами или цепочки цистерн, если движение жидкости в них представить с помощью дискретного механического аналога и не принимать во внимание слабо влияющие на движение системы высшие тоны колебаний жидкости в цистернах [4].

Примем $S = k(1 + \mu \partial / \partial t)$, а $P_1 = k_1(1 + \mu_1 \partial / \partial t)$. Будем считать, что коэффициенты μ и μ_1 — постоянные упруговязких систем, а для упругих систем — с гистерезисом [2] $\mu = \mu_i = \mu' / \nu_{i1}$, $\mu_1 = \mu_{1i} = \mu_1' / \nu_{i2}$ (ν_{i1} и ν_{i2} — частоты собственных колебаний консервативной системы, μ' и μ_1' — безразмерные коэффициенты, характеризующие рассеивание энергии при изменении фазового угла на один радиан).

В случае $n = 1$ при $\mu = \mu_1 = 0$ уравнения $D_i(p) = 0$ соответствуют собственным колебаниям консервативных систем с двумя степенями свободы. Следовательно, каждому собственному значению λ_i системы соответствует пакет, состоящий из двух собственных колебаний с одинаковыми распределениями амплитуд. При увеличении значений λ_i частоты этих колебаний асимптотически стремятся к значениям $\nu_{i1}^* = \lambda_i [k /$

$/ \rho (1 - r_{21})]^{1/2} / l$ частот колебаний стержня длиной l и к значению $\nu_2^* = [k_1 / \rho r_{21}]^{1/2}$ парциальной частоты колебаний среды относительно неподвижного стержня.

В качестве примера определим силы и ускорения, возникающие при соударении со скоростью 1 м / сек двух одинаковых железнодорожных сцепов, состоящих из десяти вагонов, каждый длиной 13.9 м , в случае, когда зазоры в междувагонных соединениях не проявляются. Примем $\rho = 6.1 \text{ тм}^{-1}$, $k = 320 \text{ мн}$, $r_{21} = 0.5$. Значение k_1 варьируется в пределах, определяемых соотношением $0.005 \leq \alpha \leq 1$, где $\alpha = 13.9^2 k_1 / k$.

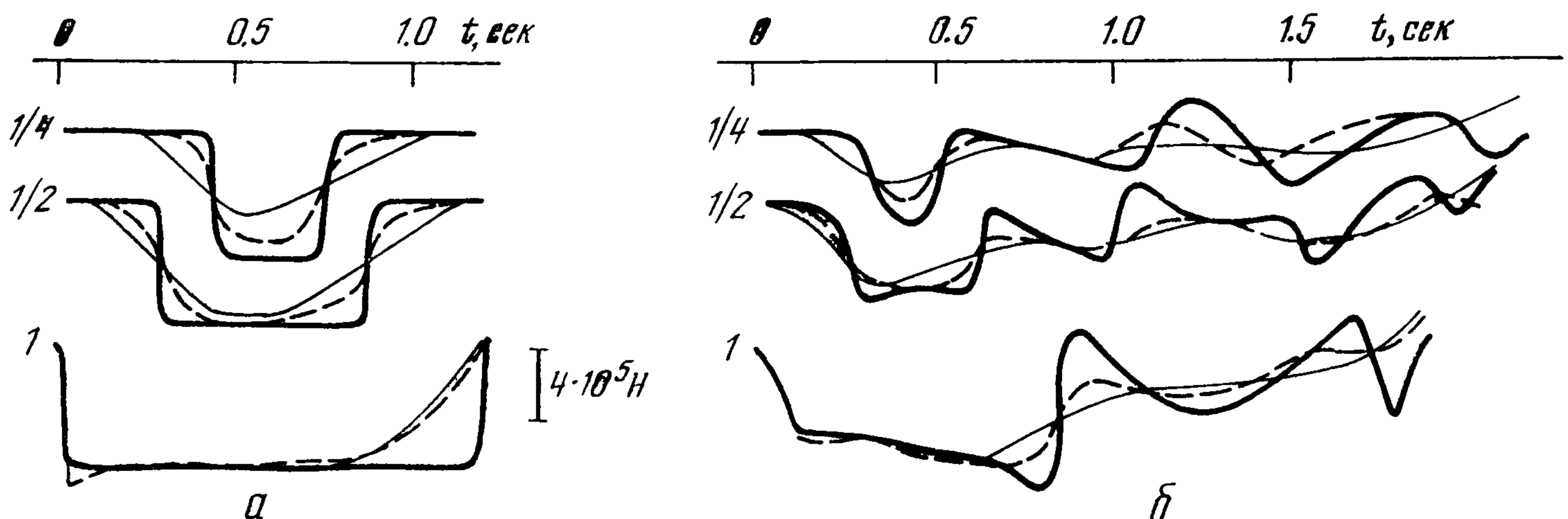
Фиг. 1 иллюстрирует изменение коэффициентов A_{i1} (кривые 1, 2, 3) и A_{i2} (кривые 1', 2', 3') в зависимости от номера i в выражениях (1.11) при $\mu = \mu_1 = 0$. Кривые 1 и 1' соответствуют $\alpha = 1$, 2 и 2' — $\alpha = 0.1$, 3 и 3' — $\alpha = 0.01$. Кривой 0 показано изменение коэффициентов A_i в случае сплошного стержня ($r_{21} = 0$). Из фиг. 1 видно, что во всех случаях

$$(2.1) \quad A_{i1} + A_{i2} \leq A_i$$

С увеличением i коэффициенты A_{i1} стремятся к соответствующим значениям A_i . Из равномерной сходимости со сглаживающим множителем [3] ряда (1.11) в случае $r_{21} = 0$ и условия (2.1) следует [5], что и в случаях $r_{21} \neq 0$ ряды (1.11) сходятся к равномерным почти-периодическим функциям.

На фиг. 2 приведено изменение во времени сил в различных сечениях одной из соударяемых систем. Кривые 1 соответствуют $\xi = 0.5$ (на контакте соударяемых систем), а числами $1/2$ и $1/4$ отмечены линии, построенные соответственно для $\xi = 1/4$ и $1/8$. Сплошные жирные линии соответствуют $\mu = \mu_1 = 0$. Сплошные тонкие линии соответствуют случаю упруговязкой системы, а пунктирные — упругой системы с гистерезисом (в последнем случае $\mu' = \mu_1' = 0.1$).

Для сопоставления результатов, полученных для упруговязких систем, с результатами для упругих систем с гистерезисом коэффициенты μ и μ_1 определялись из соотношений $\mu = \mu' / \nu_{11}^*$, $\mu_1 = \mu_1' / \nu_{12}^*$. Здесь ν_{11}^* — частота первого тона [парциальных колебаний стержня без груза, ν_{12}^* — частота колебаний груза относительно неподвижного

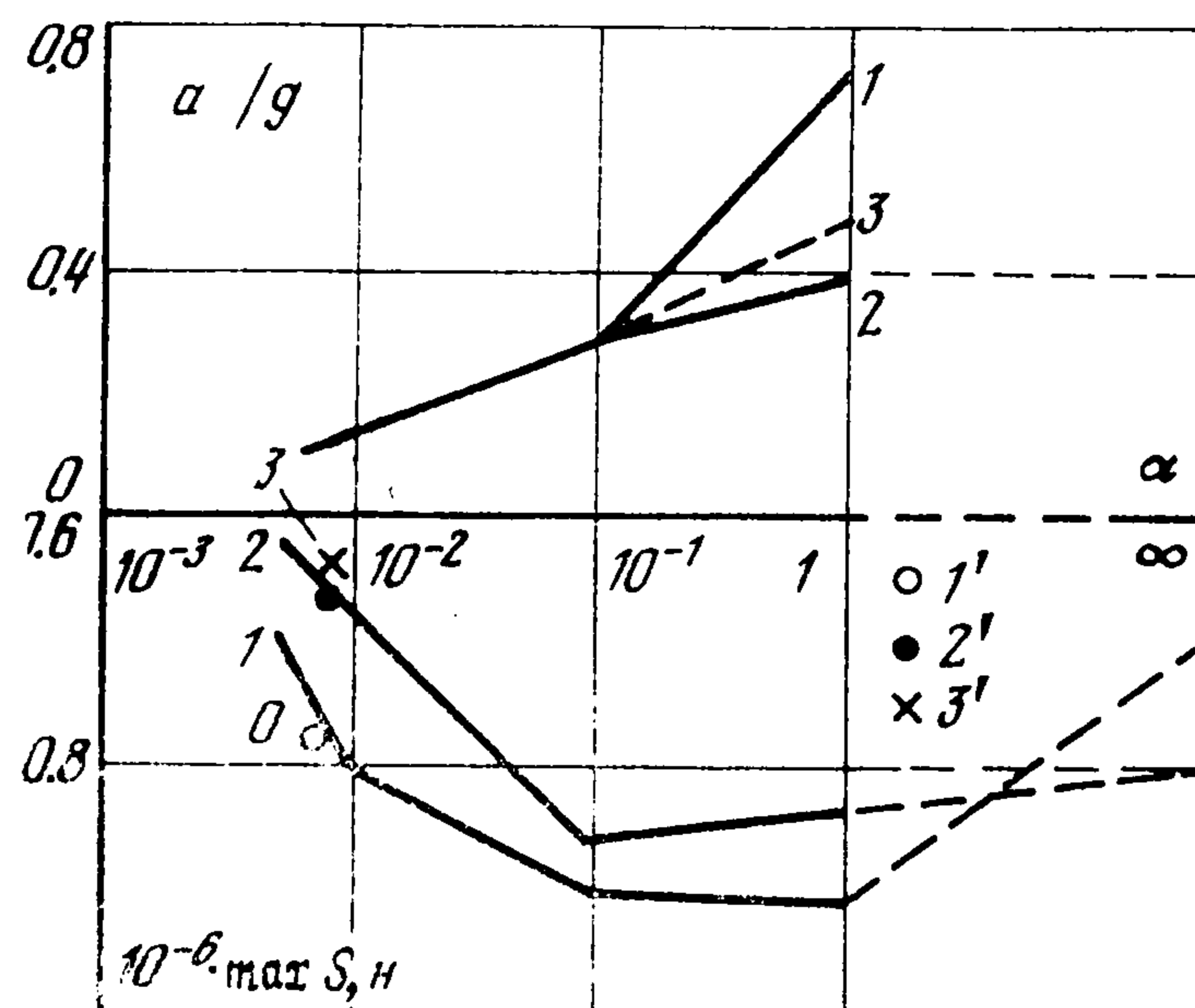


Фиг. 2

стержня. Фиг. 2, а соответствует случаю $r_{21} = 0$ (колебания сплошного стержня при ударе), а фиг. 2, б соответствует случаю $r_{21} = 0.5$, $\alpha = 0.01$. Анализ приведенных зависимостей показывает, что если часть массы одномерной системы может перемещаться относительно стержня, сохраняя упругую или упруговязкую связь с ним, время, в течение которого преимущественно наблюдается сжатие, увеличивается, хотя длительность интенсивного действия сжимающих сил уменьшается, и определяется временем распространения волн по стержню с плотностью ρ_1 и жесткостью k .

На фиг. 3 приведены зависимости наибольших значений сил и ускорений (в единицах g) от величины α . Кривая 1 соответствует консервативной системе ($\mu' = \mu_1' = 0$), 2 — упруговязкой, 3 — упругой системе с гистерезисом. Из фиг. 3 видно, что

в определенном интервале значений α имеют место наибольшие значения сил, которые могут превышать силы, возникающие при соударениях сплошных стержней, приблизительно в 1.3 раз. Ускорение грузов при уменьшении величины α от 1 до 10^{-2} уменьшается. На фиг. 3 точки 1', 2' и 3' — наибольшие значения сил, возникающих при соударениях систем с полостями, частично заполненными жидкостью [4]. В этих случаях $r_{21} = 0.41$, точка 1' соответствует консервативной системе, 2' — упруговязкой, 3' — упругой системе с гистерезисом. Анализ результатов, приведенных на фиг. 2 и 3, показывает, что вязкое рассеивание энергии приводит к увеличению сил при соударениях сплошных стержней и к уменьшению сил при соударениях систем с подвижными грузами. Различия в значениях сил и ускорений для упруговязких систем и упругих систем с гистерезисом [2] несущественны.



Фиг. 3

Поступила 23 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Манашкин Л. А. Исследование продольных колебаний одномерных систем с подвижными грузами при переходных режимах движения. В сб.: «Динамика и прочность высокоскоростного наземного транспорта. Киев, «Наукова думка», 1976.
2. Лазарян В. А. О переходных режимах движения поездов. Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1973, вып. 152.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1. М., «Мир», 1965.
4. Рыжов А. В., Богомаз Г. И. Определение гидродинамических коэффициентов уравнений движения железнодорожных цистерн, частично заполненных жидкостью. Тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1973, вып. 152.
5. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.