УДК 531.31

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ БИРКГОФА

А. С. Сумбатов

(Москва)

Для консервативных динамических систем с двумя степенями свободы доказывается критерий существования линейного относительно обобщенных скоростей интеграла на множестве траекторий с одинаковым значением полной энергии.

1. Биркгоф [1,2] поставил задачу определения условий, при которых уравнения Лагранжа, составленные для функции

$$L = T_2 + T_1 + T_0 + U, \quad T_2 = {}^1/_2 a_{ij} q^{\cdot i} q^{\cdot j}, \quad T_1 = a_i q^{\cdot i} \quad (q^{\cdot} = dq/dt) \tag{1.1}$$

(a_{ij}, a_i, T_0, U — функции от обобщенных координат q^1, q^2 динамической системы; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в пределах от единицы до двух) вместе с дополнительным уравнением

$$T_2 - T_0 - U = h$$

имеют интеграл вида

$$\xi_i (q^1, q^2) q^{\cdot i} + \xi (q^1, q^2) = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Этот интеграл назван [2] условным, он существует, вообще говоря, только при некоторых фиксированных значениях постоянной h.

В римановом двумерном пространстве с линейным элементом

$$ds^2 = 2T_2 dt^2 = a_{ij} dq^i dq^j$$

всегда можно ввести изотермические координаты R^1 и R^2 [3], в которых

$$ds^2 = \rho (R^1, R^2) [(dR^1)^2 + (dR^2)^2]$$

Поэтому Биркгоф предполагал, что лагранжиан (1.1) сразу задан в изотермических координатах. На этом основании показано [1,2], что при наличии интеграла (1.2) существуют точечное преобразование координат и неголономная замена дифференциала независимой переменной, такие, что в новых переменных Q^1, Q^2, τ лагранжиан $L + q^{\cdot i} \partial_i b$ ($\partial_i = \partial / \partial q^i$, b (q^1, q^2) — некоторая функция) принимает вид

$$L_B = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dQ^1}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dQ^2}{d\tau} \right)^2 \right] + \alpha \frac{dQ^1}{d\tau} + \beta \frac{dQ^2}{d\tau} + \gamma \tag{1.3}$$

с циклической координатой. Обратное утверждение, очевидно, также справедливо. Точечное преобразование координат и замена dt в [1,2] выражаются через коэффициенты искомого линейного интеграла, следовательно, имеем лишь эквивалентную формулировку поставленной выше задачи.

Изотермические координаты, как известно [3], определяются неоднозначно: переменные $\mathrm{Re}\, [f (R^1 + iR^2)]$ и $\mathrm{Im}\, [f (R^1 + iR^2)]$, где f — произвольная аналитическая функция ($i = \sqrt{-1}$), тоже являются изотермическими координатами. Чтобы получить формулы перехода от заданных обобщенных координат q^1, q^2 системы к каким-либо изотермическим координатам, можно, например, проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$a_{11} dq^1 + \left(a_{12} + \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11} a_{12}}\right) dq^2 = 0$$

и в качестве новых координат взять действительную и мнимую части его общего интеграла. Другие известные способы перехода к изотермическим координатам также связаны с интегрированием дифференциальных уравнений. По этой причине представляет интерес получить критерий существования переменных

$$Q^1 = Q^1(q^1, q^2), \quad Q^2 = Q^2(q^1, q^2) \tag{1.4}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\lambda(q^1, q^2)} \tag{1.5}$$

в которых лагранжиан принимает вид (1.3) с циклической координатой, когда q^1, q^2 — произвольно выбранные обобщенные координаты системы. В такой постановке задача Биркгофа решается ниже.

Отметим, что преобразование (1.4) сохраняет лагранжеву форму уравнений, а замена (1.5), вообще говоря, нет. Действительно, можно проверить, что уравнения Лагранжа, составленные для функции (1.1), после замены (1.5) принимают вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T^*}{\partial q^{j'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^j} - \frac{\partial}{\partial q^j}(\lambda U) - \left(\frac{T_2^*}{\lambda} - T_0 - U\right)\frac{\partial \lambda}{\partial q^j} = 0 \qquad (j = 1, 2) \tag{1.6}$$

$$q^{j'} = \frac{dq^j}{d\tau}, \quad T^* = T_2^* + T_1^* + \lambda T_0, \quad T_2^* = \frac{1}{2\lambda} a_{ij} q^{i'} q^{j'}, \quad T_1^* = a_i q^{i'}$$

Однако, если ограничиться рассмотрением только изоэнергетических траекторий системы [1,2,4], то уравнения (1.6) запишутся в виде уравнений Лагранжа относительно функции

$$L^* = T_2^* + T_1^* + \lambda(T_0 + U + h) \tag{1.7}$$

Сравнение квадратичных по скоростям членов в выражениях (1.3) и (1.7) лагранжиана системы показывает, что координаты (1.4) изотермические.

2. Рассмотрим случай, когда динамическая система обратима [1,2], т. е. $T = T_2$. Введем метрику

$$dl^2 = (U + h)\, a_{ij} dq^i dq^j = b_{ij} dq^i dq^j \tag{2.1}$$

риманового пространства, соответствующую принципу наименьшего действия в форме Якоби. Гауссова кривизна [5] этого пространства

$$K = \frac{1}{\delta^4}\begin{vmatrix} b_{11}, & \partial_1 b_{11}, & \partial_2 b_{11} \\ b_{12}, & \partial_1 b_{12}, & \partial_2 b_{12} \\ b_{22}, & \partial_1 b_{22}, & \partial_2 b_{22} \end{vmatrix} - \frac{1}{2\delta}\left[\partial_2\left(\frac{\partial_2 b_{11} - \partial_1 b_{12}}{\delta}\right) - \partial_1\left(\frac{\partial_2 b_{12} - \partial_1 b_{22}}{\delta}\right)\right] \tag{2.2}$$

$$(\delta^2 = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2)$$

Обозначим через

$$\Delta_1 K = b^{ij}\partial_i K \partial_j K, \quad \Delta_2 K = \frac{1}{\delta}\partial_i(\delta b^{ij}\partial_j K) \tag{2.3}$$

соответственно $|\operatorname{grad} K|^2$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad} K$. Справедлива следующая

Теорема 1. Для существования в динамической обратимой системе интеграла (1.2), условного по Биркгофу, необходимо и достаточно, чтобы при фиксированном h по q^1 и q^2 выполнялись тождества (2.4) или (2.5)

$$K \equiv \text{const} \tag{2.4}$$

$$J(\Delta_1 K, K) = 0, \quad J(\Delta_2 K, K) = 0 \tag{2.5}$$

($J(f, w)$ — якобиан функций f и w).

Доказательство. Необходимость. Если при некотором значении постоянной h имеется интеграл (1.2), то в координатах (1.4) функция Лагранжа динамической системы запишется так:

$$L = \varkappa(Q^1, Q^2)\,[(Q^{\cdot 1})^2 + (Q^{\cdot 2})^2] + U(Q^1, Q^2)$$

а после замены (1.5) с $\lambda = \varkappa$ получим лагранжиан в виде (1.7)

$$L^* = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dQ^1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dQ^2}{d\tau}\right)^2\right] + \varkappa(U + h) \tag{2.6}$$

в котором функция $\varkappa(U+h)$ не содержит хотя бы одну из координат Q^1, Q^2. Следовательно, метрика (2.1) — метрика вращения [3,6], поскольку в координатах Q^1, Q^2

$$dl^2 = \varkappa(U+h)\,[(dQ^1)^2 + (dQ^2)^2] \tag{2.7}$$

Соотношения (2.4) и (2.5) представляют собой известные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы произвольная метрика вида (2.1) была метрикой вращения.

Достаточность. Допустим, что при некотором h выполнено условие (2.4) или (2.5). Тогда метрика (2.1) — метрика вращения и существуют обобщенные координаты (1.4), в которых она записывается в виде (2.7) с циклической координатой, например Q^2. В переменных Q^1, Q^2, τ ($dt = \varkappa d\tau$) лагранжиан системы примет вид (2.6). Следовательно, соотношение $Q^{2\prime} = \mathrm{const}$ — интеграл системы на множестве изоэнергетических траекторий, отвечающих рассматриваемому значению h. Теорема доказана.

Замечания. 1°. При проверке условий (2.5) можно с целью упрощения вычислений заменить кривизну K на некоторую функцию $\Phi(K)$. Результат не изменится, так как

$$\Delta_1\Phi(K) = [\Phi'(K)]^2\Delta_1 K, \quad \Delta_2\Phi(K) = \Phi''(K)\,\Delta_1 K + \Phi'(K)\,\Delta_2 K \tag{2.8}$$

для произвольной функции $\Phi(K)$.

2°. Предположим, что $K \not\equiv \mathrm{const}$ и условия (2.5) теоремы выполняются. Опираясь на соответствующие геометрические результаты [3,6], нетрудно убедиться, что наиболее общее точечное преобразование, при котором линейный элемент (2.1) преобразуется к виду с циклической координатой Q^2, дается формулами

$$\begin{gathered} Q^1 = \eta(\Phi), \quad Q^2 = \int \mu\,[(b_{21}\partial_1\Phi - b_{11}\partial_2\Phi)\,dq^1 + (b_{22}\partial_1\Phi - b_{12}\partial_2\Phi)\,dq^2] + \\ + \psi(\Phi), \quad \mu = \frac{1}{\delta}\exp\left(-\int\frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}\,d\Phi\right) \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\Phi(K)$, η, ψ — произвольные независимые функции. Очевидно, что координаты Q^1 и Q^2 изотермические тогда и только тогда, когда

$$\psi \equiv 0, \quad \eta(\Phi) = \pm\int \exp\left(-\int\frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}\,d\Phi\right)d\Phi \tag{2.10}$$

Если $K \equiv \mathrm{const}$, то вместо функции $\Phi(K)$, порождающей преобразование (2.9), можно взять любое нетривиальное решение $y(q^1, q^2)$ системы уравнений

$$\begin{gathered} dy_i = (\Gamma_{ri}{}^s y_s - K y b_{ir})\,dq^r, \quad dy = y_i dq^i \\ \Gamma_{ri}{}^s = {}^1/{}_2\, b^{sj}(\partial_i b_{rj} + \partial_r b_{ij} - \partial_j b_{ir}) \end{gathered} \tag{2.11}$$

которая при $K \equiv \mathrm{const}$ представляет собой систему в полных дифференциалах с тремя неизвестными функциями y, y_1, y_2 [6].

3°. Согласно теореме Леви [7], обобщенной Уиттекером [8], условия (2.4), (2.5) дают критерий существования линейного интеграла уравнений геодезических в пространстве с метрикой (2.1). При $K \not\equiv \mathrm{const}$ этот условный по Биркгофу интеграл определяется одной квадратурой и в переменных q^1, q^2, t имеет вид

$$\frac{b^{ij}v_j\partial_i K}{\Delta_1 K}\exp\left(\int\frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K}\,dK\right) = \mathrm{const} \quad (v_1 = -\,q^{\cdot 2}\delta,\; v_2 = q^{\cdot 1}\delta)$$

Данный интеграл не является общим, так как его полная производная по времени в силу уравнений Лагранжа обращается в нуль, вообще говоря, не тождественно, а только лишь на изоэнергетических траекториях системы, отвечающих некоторым исключительным значениям постоянной h. Вместе с тем его постоянная интегрирования может быть выбрана произвольно.

Пример. Пусть

$$T = \frac{1}{2\varphi}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}), \quad U = \varphi$$

где функция $\varphi(x, y)$ положительна и не удовлетворяет никакому уравнению вида

$$(\partial\varphi / \partial x)^2 + (\partial\varphi / \partial y)^2 = F(\varphi)$$

Система не имеет общих линейных интегралов, потому что необходимое условие [9] $J(\Delta_1 U, U) = 0$ не выполняется. Однако при $h = 0$ существуют три условных линейных интеграла

$$x^{\cdot} / \varphi = \text{const}, \quad y^{\cdot} / \varphi = \text{const}, \quad 1 / \varphi\,(x^{\cdot}y - y^{\cdot}x) = \text{const}$$

3. Рассмотрим общий случай (1.1). Вместо (2.1) введем метрику

$$dl^2 = (T_0 + U + h)\, a_{ij}dq^i dq^j = b_{ij}dq^i dq^j \tag{3.1}$$

и обозначим через K гауссову кривизну двумерного пространства с этой метрикой, через $\mathbf{a}$ — вектор с ковариантными компонентами a_1, a_2.

Теорема 2. Пусть $K \not\equiv \text{const}$. Интеграл (1.2), условный по Биркгофу, существует тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.5) и

$$J(\operatorname{rot}\mathbf{a}, K) = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{\delta}(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \tag{3.2}$$

Доказательство. Условия (2.5) необходимы (доказательство аналогично доказательству теоремы 1, но для случая метрики (3.1)). Если лагранжиан $L + q^{\cdot i}\partial_i b$ в переменных Q^1, Q^2, τ имеет вид (1.3), в котором, например, Q^2 — циклическая координата, то, как отмечалось, координаты Q^1, Q^2 должны быть связаны с исходными координатами q^1, q^2 формулами (2.9), (2.10). С учетом выражения для $T_1{}^*$, следовательно, необходимо, чтобы

$$(a_1 + \partial_1 b)\, dq^1 + (a_2 + \partial_2 b)\, dq^2 = \chi\mu\, [(b_{21}\partial_1\Phi - b_{11}\partial_2\Phi)\, dq^1 + \\ + (b_{22}\partial_1\Phi - b_{12}\partial_2\Phi)\, dq^2]$$

где χ — некоторая функция от Φ. Отсюда находим, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \Delta_1\Phi \frac{d}{d\Phi}\left[\chi \exp\left(-\int \frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}\, d\Phi\right)\right] + \Delta_2\Phi\chi \exp\left(-\int \frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}\, d\Phi\right)$$

т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ — функция от K.

Обратным ходом рассуждений доказывается достаточность условий (2.5), (3.2). Теорема доказана.

Замечания. 1°. Если $K \equiv \text{const}$, то для существования интеграла (1.2), условного по Биркгофу, необходимо и достаточно, чтобы существовало не тривиальное решение $y(q^1, q^2)$ уравнений (2.11), для которого

$$J(\operatorname{rot}\mathbf{a}, y) = 0 \tag{3.3}$$

Проверку этого условия можно проводить без предварительного интегрирования уравнений (2.11).

2°. Биркгоф [1] отметил, что когда система имеет условный линейный интеграл и $\operatorname{rot}\mathbf{a} \not\equiv \text{const}$, то семейство линий $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \text{const}$ принадлежит некоторой изотермической сети на характеристической поверхности. Причем можно выбрать в качестве координатных линий $Q^1 = \text{const}$, $Q^2 = \text{const}$ линии этой сети так, что в соответствующей функции Лагранжа (1.3) появится циклическая координата.

Как указывалось, данная изотермическая сеть и искомая ее параметризация определяются уравнениями (2.9), (2,10), пригодными и в случае $\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv \text{const}$.

4. Пусть $K \not\equiv \text{const}$. Согласно (3.1) и (2.2), кривизна K — рациональное выражение от h, числитель которого многочлен второй степени от h, а знаменатель представляет собой произведение $(U + h)^3$ на некоторую функцию координат, не содержащую h. Следовательно, выражения (2.5) и (3.2) дают алгебраические уравнения соответственно десятой, восьмой и четвертой степеней относительно h с коэффициентами, являющимися функциями координат. Тем самым доказана

Теорема 3. При $K \not\equiv \text{const}$ число различных значений постоянной интеграла энергии, при которых существуют условные линейные интегралы, может быть не более десяти.

Понятно, что эта оценка самая грубая.

Если условия (2.5) и (3.2) или (2.4) и (3.3) выполняются тождественно относительно h, то лагранжиан системы можно привести к виду с циклической координатой при помощи только точечного преобразователя. Для обратимых систем с двумя степенями свободы соответствующие необходимые и достаточные условия на силовую функцию получены в [10], а в терминах операторов Δ_1 и Δ_2 (2.3) содержатся в [9].

5. Выбрав какие-нибудь изотермические координаты (1.4), можно с помощью (1.5) преобразовать лагранжиан системы к виду (1.3), в котором $\gamma = \lambda (T_0 + U + h)$. При этом функция (1.3) будет зависеть, вообще говоря, от обеих координат Q^1, Q^2. Следовательно, не нарушая общности, задачу определения условий существования в динамической системе условного линейного интеграла можно ставить для лагранжиана (1.3). Такой подход принят в [1, 2, 11, 12]. В [11, 12] были получены два необходимых условия рассматриваемой задачи в форме, допускающей проверку. Они имеют одинаковый вид для $s = \ln \gamma$ и $s = \ln \omega$

$$
\left(s_\xi + 2\frac{\sigma_{\eta\eta}\sigma_\xi - \sigma_{\xi\eta}\sigma_\eta}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}\right)\sigma_\eta = \left(s_\eta + 2\frac{\sigma_{\xi\xi}\sigma_\eta - \sigma_{\xi\eta}\sigma_\xi}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}\right)\sigma_\xi \tag{5.1}
$$

$$
\xi = Q^1, \quad \eta = Q^2, \quad \sigma = (\Delta_{\xi\xi} + s_{\eta\eta}) \exp(-\Delta), \quad \omega = \alpha_\eta - \beta_\xi
$$

(индексы указывают переменные, по которым производится частное дифференцирование).

Можно, однако, показать, что эти условия не являются достаточными. Действительно, так как в координатах ξ, η линейный элемент (3.1) $dl^2 = \gamma (d\xi^2 + d\eta^2)$, то для $\Delta = \ln \gamma$ имеем $\sigma = -2K$, $(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2) \exp(-s) = 4\Delta_1 K$ и условие (5.1) в виде

$$
J(\Delta_1 K, K) = 0 \tag{5.2}
$$

Аналогично для $s = \ln \omega$ имеем $\sigma = [-2K + \Delta_2 (\ln \operatorname{rot} \mathbf{a})] / \operatorname{rot} \mathbf{a}$, $\omega = \gamma \operatorname{rot} \mathbf{a}$ и условие (5.1) в виде

$$
J\left(\frac{\Delta_1\sigma}{\operatorname{rot} \mathbf{a}}, \sigma\right) = 0 \tag{5.3}
$$

В соответствии с (2.5), (3.2), (2.8) условия (5.2) и (5.3) действительно должны выполняться, но они не содержат второго необходимого условия из (2.5), не зависимого от остальных условий (2.5), (3.2), и поэтому, согласно теореме 2, не являются достаточными.

Автор благодарит В. В. Румянцева за полезные замечания и обсуждение полученных результатов.

Поступила 15 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems with two degrees of freedom. Trans. Amer. Math. Soc., 1917, vol. 18, No. 2, p. 199—300.
2. *Биркгоф Г.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
3. *Букреев Б. Я.* Курс приложений дифференциального и интегрального исчисления к геометрии. Элементы теории поверхностей. Киев, 1900.
4. *Уитнер А.* Аналитические основы небесной механики. М., «Наука», 1967.
5. *Погорелов А. В.* Лекции по дифференциальной геометрии. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.
6. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., Физматгиз, 1963.
7. *Lévy M.* Sur les conditions pour qu'une forme quadratique de n differéntielles puisse être transformée de façon que ses coéfficients perdent une partie ou la totalité des variables qu'ils renferment. Paris, Compt. Rend., 1878, t. 86, p. 463—466.

8. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.— Л., Гостехиздат, 1937.
9. *Сумбатов А. С.* К проблеме поиска циклических координат в консервативных динамических системах. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
10. *Synge J. L.* On the geometry of dynamics. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1926, vol. 226, No. 637, p. 31—104.
11. *Харламов М. П.* Об условно-линейном интеграле уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
12. *Харламов М. П.* Об одном классе интегралов уравнений движения твердого тела. Докл. АН УССР, 1977, А, № 2.

УДК 531 : 534

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНЫМИ ГРУЗАМИ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ УДАРАХ

Л. А. Манашкин

(Днепропетровск)

Рассматриваются продольные колебания одномерной системы, которую можно представить в виде стержня, взаимодействующего с различного рода подвижными инерционными средами. Предполагается, что среды между собой не взаимодействуют, могут двигаться только вдоль стержня и при этом нет внутреннего взаимодействия элементов сред. С помощью такой модели могут быть исследованы колебания достаточно длинных цепочек твердых тел, к которым присоединены посредством деформируемых элементов другие подвижные тела, колебания одномерных систем твердых тел с полостями, частично заполненными жидкостью, и т. п. Переходный режим движения подобных систем рассмотрен в [1].

1. Рассмотрим стержень длины l_1, сталкивающийся с начальной скоростью v_0 с таким же неподвижным стержнем длины l_2. После столкновения образуется новый стержень длины $l = l_1 + l_2$. Движение такой системы описывается дифференциальными уравнениями с граничными и начальными условиями

$$(1.1)\qquad \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{n} P_j = \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$\rho_{2j}\partial^2 w_j / \partial t^2 + P_j = \rho_{2j}\partial^2 u / \partial t^2,\ j = 1,2,\ \ldots,\ n$$

$$(1.2)\qquad \partial u\,(0,\ t) / \partial x = \partial u\,(l,\ t) / \partial x = 0,\ u\,(x,\ 0) = w_j\,(x,\ 0) = 0$$

$$\partial w_j\,(x,\ 0) / \partial t = 0,\ j = 1,2,\ \ldots,\ n,\ \partial u\,(x,\ 0) / \partial t = v_0\,[1 - \sigma_0\,(x - l_1)]$$

Здесь ρ_1 — плотность стержня, ρ_{2j} — плотность среды с номером j; $u\,(x,\ t)$ — продольные перемещения в момент времени t сечения стержня, удаленного на расстояние x от одного из свободных концов (второму свободному концу соответствует координата $x = l$); $w_j\,(x,\ t)$ — перемещение среды с номером j относительно стержня; S — продольная сила, действующая по сечению стержня; P_j — интенсивность сил взаимодействия стержня со средой с номером j, $\sigma_0\,(x - l_1)$ — единичная функция Хевисайда.

Уравнения (1.1) представим в виде

$$(1.3)\qquad \rho \mathrm{J}_r \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial S}{\partial x},\quad \rho = \rho_1 + \sum_{j=1}^{n} \rho_{2j}$$

$$\mathrm{J}_r\,[z] = [z] - \sum_{j=1}^{n} r_{2j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t G_j\,(t-\tau)[z]\,d\tau,\quad r_{2j} = \frac{\rho_{2j}}{\rho}$$