то при управлении

$$u_k^1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_k, t_k + \tau_\beta) \\ u_k^1, & t \in [t_k + \tau_\beta, t_k + \tau_\beta + \tau_k] \end{cases}$$

выполняются соотношения

(4.12) $\quad r_1(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon / 2, \; r(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon / 2, \; \tau \in (0, \tau_\beta]$

(4.13) $\quad r_2(t_k + \tau_\beta + \tau_k) \leqslant \varepsilon(1 - \beta) / 2, \quad r_2(t_k + \tau_\beta + \tau) \leqslant \varepsilon(1 - \beta),$

$\tau \in (0, \tau_k)$

Доказательство. Пусть τ_β — корень уравнения (4.10). Тогда τ_β всегда существует и $\tau_\beta > 0$ (по той же причине, что и τ_α). В силу леммы 4.2 на $[t_k, t_k + \tau]$, $\tau \in (0, \tau_\beta]$ имеет место первое неравенство в (4.12), а из (4.4) вытекает справедливость второго неравенства.

Из анализа системы (4.11) видно, что ее решение существует и единственно. Второе уравнение системы зависит только от τ_k. Решая его, находим τ_k и, подставляя в первое уравнение, определяем u_k^1.

Из способа нахождения τ_k (см. второе уравнение в (4.11)) и соотношения (4.5) вытекает справедливость первого неравенства в (4.13). Доказательство второго неравенства аналогично доказательству теоремы 3.1.

Опишем алгоритм решения поставленной задачи.

Задаем числа α и β, удовлетворяющие условиям (4.6). Определяем стратегию v_0^1 следующим образом: находим числа τ_α, τ_β; в момент времени t_k полагаем $u_k^1(t) = 0$; находим $r(t_k)$; если $r(t_k) \leqslant \varepsilon\alpha / 2$, то полагаем $u_k^1(t) = 0$, $t \in [t_k, t_k + \tau_\alpha]$; если $r(t_k) \in (\varepsilon\alpha, \varepsilon(1 - \beta) / 2)$, решаем систему (4.11), откуда получаем управление u_k^1, число τ_k и доопределяем управление

$$u_k^1(t) = u_k^1, \qquad t \in [t_k + \tau_\beta, t_k + \tau_\beta + \tau_k]$$

$$t_k + \tau_\beta + \tau_k = t_{k+1}$$

Выполнение неравенства (1.5) обеспечивается применением описанной стратегии v_0^1 на каждом шаге.

Поступила 1 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лагунов В. Н.* О коррекции нелинейного управляемого процесса. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
3. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., «Мир», 1971.

УДК 62—50

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Ю. Б. Сейсов

(Ашхабад)

Указываются достаточные условия оптимальности управления в нелинейной системе. При этом требуется существование некоторой функции с определенными свойствами. Если задать эту функцию специальным образом, то из доказанной теоремы следует теорема В. Ф. Кротова [1]. Для задач быстродействия в автономных системах приводится некоторое ослабление достаточных условий работы [2].

1. Пусть управляемый объект характеризуется фазовыми координатами $x \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в n-мерном евклидовом пространстве E^n, закон изменения которых задается дифференциальным уравнением

$$dx/dt = f(x, u, t) \tag{1.1}$$
$$(u = (u^1, u^2, \ldots, u^r), \; f = (f^1, f^2, \ldots, f^n))$$

где u — r-мерный вектор управлений. Компоненты вектор-функции $f(x, u, t)$ предполагаются непрерывными по всем аргументам и непрерывно дифференцируемыми по переменным x^i, $i = 1,2, \ldots, n$. В качестве допустимых управлений принимается множество всех измеримых функций $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, значения которых удовлетворяют ограничению $u \in U$, где U — некоторый компакт в E^r.

Пусть Ω_0 и Ω_1 — некоторые непустые замкнутые множества в E^n, Ω — открытое множество. Моменты времени t_0 и t_1 не фиксированы. Положим $t_0 \in T_0 = [\tau_0, \tau_0']$, $t_1 \in T_1 = [\tau_1, \tau_1']$.

Задача оптимального управления состоит в нахождении среди всех допустимых управлений, переводящих объект (1.1) из положения $x_0 \in \Omega_0$ в положение $x_1 \in \Omega_1$, такого управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и соответствующей ему траектории $x(t)$, $x(t) \in \Omega$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, которые в совокупности придают функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^\circ(x, u, t)\, dt$$

наименьшее возможное значение. Функция $f^\circ(x, u, t)$ предполагается удовлетворяющей тем же требованиям, что и компоненты вектор-функции $f(x, u, t)$.

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x^\circ, x, t)$ от $n + 2$ переменных $x^\circ, x^1, x^2, \ldots, x^n, t$. Введем в рассмотрение функцию и множества

$$R(x^\circ, x, u, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\circ} f^\circ + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$
$$Q = E^1 \times \Omega \times [\tau_0, \tau_1']$$
$$\Pi = \{(x^\circ, x, t)\colon \varphi(x^\circ, x, t) \geqslant 0, (x^\circ, x, t) \in Q\}$$

Теорема 1. Для того чтобы процесс $\{x_*(t), u_*(t)\}$, $x_*(t) \in \Omega$, $\{x_*(t_0^*), t_0^*\} \in \Omega_0 \times T_0$, $\{x_*(t_1^*), t_1^*\} \in \Omega_1 \times T_1$ был оптимален, достаточно существования непрерывно дифференцируемой на множестве Q функции $\varphi(x^\circ, x, t)$, такой, что выполнены следующие условия:

$$\text{А)} \quad \max_{(x,\, t)\in\Omega_0\times T_0} \varphi(0, x, t) = \varphi(0, x_*(t_0^*), t_0^*) = 0$$

$$\text{Б)} \quad \sup_{u\in U,\, (x^\circ,\, x,\, t)\in\Pi} R(x^\circ, x, u, t) \leqslant 0$$

$$R(I_*(t), x_*(t), u_*(t), t) = 0, \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$$

$$\text{В)} \quad \varphi(\xi, x, t) > 0, \quad x \in \Omega_1, \quad t \in T_1, \quad \xi < I_*(t_1^*)$$

Здесь

$$I_*(t) = \int_{t_0^*}^{t} f^\circ(x_*(t), u_*(t), t)\, dt$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве E^{n+2} систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\circ}{dt} = f^\circ(x, u, t), \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad \frac{dx^{n+1}}{dt} = 1 \tag{1.2}$$

Задание произвольного допустимого управления $u(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и начальных данных Коши

$$x^\circ(t_0) = 0, \; x(t_0) = x_0 \in \Omega_0, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0 \in T_0 \tag{1.3}$$

определяет некоторую траекторию

(1.4) $x^\circ(t),\ x(t),\ x^{n+1}(t) \equiv t,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

системы (1.2). Уравнение

(1.5) $\varphi(x^\circ, x, t) = 0$

разделяет множество Q на две части. Обозначим через Q^+ часть множества Q, на которой функция $\varphi(x^\circ, x, t)$ положительна, а через Q^- — оставшуюся часть. Из условия А) следует, что «начальное» множество (1.3) полностью расположено в Q^-, причем точка $(0, x_*(t_0{}^*), t_0{}^*)$ расположена на поверхности (1.4). Из условия Б) следует, что поверхность (1.5) «непроницаема», т. е. траектория системы (1.2), исходящая из множества (1.3), при любом допустимом управлении $u(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ t_0 \in T_0,\ t_1 \in T_1$ остается в Q^- в течение всего процесса. В то же время интегральная кривая

$$(x_*{}^0(t) = I_*(t)), \quad x_*(t), \quad x_*^{n+1}(t) = t, \quad t_0{}^* \leqslant t \leqslant t_1{}^*$$

расположена на поверхности (1.5), т. е.

(1.6) $\varphi(I_*(t), x_*(t), t) = 0, \quad t_0{}^* \leqslant t \leqslant t_1{}^*$

Предположим, что рассматриваемый процесс неоптимален, т. е. существует процесс $\{x(t), u(t)\},\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x(t) \subset \Omega, \{x(t_0), t_0\} \in \Omega_0 \times T_0, \{x(t_1), t_1\} \in \Omega_1 \times T_1$, такой, что

(1.7) $I < I_*(t_\perp{}^*)$

Рассмотрим интегральную кривую (1.4) системы (1.2). Поскольку $x^\circ(t_0) = 0$ $x(t_0) \in \Omega_0,\ t_0 \in T_0$, а $u(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — допустимое управление, то, как было указано выше, эта интегральная кривая расположена в области Q^-, т. е.

$$\varphi(x^\circ(t), x(t), t) \leqslant 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

Однако из условия В) с учетом неравенства (1.7) следует, что

$$\varphi(x^\circ(t_1), x(t_1), t_1) > 0$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Если процесс $\{x_*(t), u_*(t)\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то имеет место неравенство

(1.8) $\varphi(I_*(t_1{}^*), x, t) \geqslant 0,\ x \in \Omega_1,\ t \in T_1$

В самом деле, пусть в некоторой точке $x = a \in \Omega_1$ и $t = \mu \in T_1$ выполняется противоположное неравенство

$$\varphi(I_*(t_1{}^*), a, \mu) = b < 0$$

Для любого $\varepsilon > 0$ из условия В) следует

$$\varphi(I_*(t_1{}^*) - \varepsilon, a, \mu) = b - \frac{\partial\varphi(I_*(t_1{}^*), a, \mu)}{\partial x^\circ}\varepsilon + o(\varepsilon) > 0$$

что невозможно, так как по предположению $b < 0$.

Наконец, отметим, что в точке $x_*(t_1{}^*) \in \Omega_1,\ t_1{}^* \in T_1$ неравенство (1.8) переходит в равенство. Это непосредственно следует из формулы (1.6) при $t = t_1{}^*$.

Эти замечания позволяют утверждать, что

$$\min_{(x, t) \in \Omega_1 \times T_1} \varphi(I_*(t_1{}^*), x, t) = 0$$

По виду это выражение совпадает с условием А) теоремы 1, однако оно не эквивалентно условию В), а существенно слабее.

Если задать функцию $\varphi(x^\circ, x, t)$ в следующем виде:

(1.9) $\varphi(x^\circ, x, t) = K(x, t) - x^\circ$

то из теоремы 1 следует теорема В. Ф. Кротова [1].

Приведенная выше теорема 1 о достаточных условиях оптимальности является непосредственным обобщением результатов работы [3].

2. Пусть поведение объекта описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(x, u)$$

Рассмотрим задачу быстродействия при $\Omega_0 = \{\mathbf{x}_0\}$, $\Omega_1 = \{\mathbf{x}_1\}$. Пусть $\{x(t), u(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ — некоторый процесс, удовлетворяющий принципу максимума Л. С. Понтрягина [4], а $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ — вектор-функция, соответствующая этому процессу. Положим

$$c(\psi, x) = \max_{u \in U} (\psi, f(x(u)))$$

Тогда в качестве следствия из теоремы 1 можно получить следующий результат, если управление $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ — кусочно-непрерывная функция.

Теорема 2. Пусть функция $c(\psi, x)$ такова, что

$$c(\psi(t), x) - c(\psi(t), x(t)) - \left(\frac{\partial c(\psi(t), x(t))}{\partial x}, x - x(t)\right) \leqslant 0 \tag{2.1}$$

при $(\psi(t), x - x(t)) \geqslant 0$ и выполнено условие

$$(\psi(t), x_1 - x(t)) > 0, \ 0 \leqslant t < t_1 \tag{2.2}$$

Тогда процесс $\{x(t), u(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ оптимален по быстродействию.

Доказательство. Для применения теоремы 1 к задаче быстродействия следует положить $f^\circ \equiv 1$, а в качестве координаты x° принять время t. Следовательно, вместо функции $\varphi(x^\circ, x, t)$ теперь будет фигурировать функция $\varphi_1(t, x)$, вместо $R(x^\circ, x, u, t)$ — функция

$$R_1(t, x, u) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(x, u)$$

и соответственно множества

$$Q_1 = [0, t_1] \times E^n, \ \Pi_1 = \{(t, x) \colon \varphi_1(t, x) \geqslant 0, \ (t, x) \in Q_1\}$$

Для оптимальности процесса $\{x(t), u(t)\}$ достаточно существования непрерывно дифференцируемой на множестве Q_1 функции $\varphi_1(t, x)$, такой, что выполнены условия

А$_1$) $\varphi_1(0, x(0)) = 0$

Б$_1$) $\sup\limits_{u \in U, (t, x) \in \Pi_1} R_1(t, x, u) \leqslant 0$

B_1) $\varphi_1(t, x_1) > 0, \quad t < t_1$

Положим

$$\varphi_1(t, x) = (\psi(t), x - x(t)) \tag{2.3}$$

Эта функция непрерывно дифференцируема всюду на множестве Q_1, за исключением точек конечного числа плоскостей $t = \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где τ_i — точки отрезка $[0, t_1]$, в которых претерпевает разрывы первого рода функция $u(t)$. Отметим, что теорема 1 остается в силе, если функция теряет свойство непрерывной дифференцируемости в точках конечного числа плоскостей

$$t = \tau_i \ (i = 1, 2, \ldots, N), \quad \tau_i = \text{const}$$

При задании функции $\varphi_1(t, x)$ формулой (2.3) условие A_1) выполняется автоматически, условие Б$_1$) принимает вид

$$\sup_{u \in U} R_1(t, x, u) \leqslant 0; \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad (\psi(t), x - x(t)) \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Преобразуем левую часть неравенства (2.4) с учетом конкретного вида (2.3) функции $\varphi_1(t, x)$. Имеем

$$\frac{\partial\varphi_1(t, x)}{\partial x} = \psi(t), \quad \frac{\partial\varphi_1(t, x)}{\partial t} = (\psi^{\boldsymbol{\cdot}}(t), x - x(t)) - \tag{2.5}$$

$$-(\psi(t), x^{\boldsymbol{\cdot}}(t)) = -\left(\frac{\partial c(\psi(t), x(t))}{\partial x}, x - x(t)\right) - c(\psi(t), x(t))$$

Здесь были использованы принцип максимума Л. С. Понтрягина

$$(\psi(t), f(x(t), u(t)) = \max_{u \in U}(\psi(t), f(x(t), u)) = c(\psi(t), x(t))$$

и равенство [2] $\psi^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = -\partial c(\psi(t), x(t))/\partial x$, справедливое в предположении дифференцируемости функции $c(\psi, x)$.

Используя соотношения (2.5), заключаем, что $R_1(t, x, u) \leqslant Q(t, x)$, где $Q(t, x)$ — левая часть неравенства (2.1). Поэтому условие (2.1) гарантирует выполнение условия Б$_1$). Наконец, условие В$_1$) записывается в виде (2.2). Теорема доказана.

В теореме работы [2] требовалось выполнение неравенства (2.1) во всем пространстве E^n.

3. Как видно из формулы (1.9), достаточные условия оптимальности В. Ф. Кротова [1] вытекают из теоремы 1, если уравнение $\varphi(x^0, x, t) = 0$ разрешимо относительно переменной x^0, т. е. необходимо, должно выполняться неравенство

$$\partial\varphi(x^0, x, t)/\partial x^0 \neq 0 \tag{3.1}$$

во всей области изменения переменных $(x, t) \in \Omega \times [\tau_0, \tau_1']$.

Предположим, что $f^0(x, u, t) > 0$ при всех $u \in U$, $x \in \Omega$, $t \in [\tau_0, \tau_1']$. Пусть $\{x_*(t), u_*(t), \psi^*(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — экстремаль Л. С. Понтрягина в задаче п. 1. Уравнение

$$x^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)\, d\tau$$

однозначно определяет функцию $t = \xi(x^0)$ в силу сделанного предположения относительно функции $f^0(x, u, t)$. Как и в п. 2, положив

$$\varphi(x^0, x, t) = (\psi^*(\xi(x^0)), x - x_*(\xi(x^0))) + \psi^*_{n+1}(\xi(x^0))(t - \xi(x^0))$$

для рассматриваемой экстремали $\{x_*(t), u_*(t), \psi^*(t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ можно получить достаточные условия ее оптимальности типа сформулированных в теореме 2. Уравнение

$$(\psi^*(\xi(x^0)), x - x_*(\xi(x^0))) + \psi^*_{n+1}(\xi(x^0))(t - \xi(x^0)) = 0$$

не разрешено относительно переменной x^0 и, более того, за исключением тривиальных случаев, не выполняется условие (3.1).

Поступила 1 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М., «Наука», 1973.
2. *Благодатских В. И.* Достаточные условия оптимальности для дифференциальных включений. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, т. 38, № 3.
3. *Сейсов Ю. Б.* Достаточные условия оптимальности в задаче быстродействия. Изв. АН ТуркмССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1976, № 2.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1976.