УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ УПРАВЛЯЕМОГО ПРОЦЕССА

Л. Г. Васильева, В. Н. Лагунов

(Калинин)

В развитие результатов работы [1] рассматривается случай, когда течение процесса описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением p-го порядка, корректирующий вектор входит в правую часть уравнения движения как слагаемое, а вектор-помеха — измеримая вектор-функция. Предлагается конструктивный способ коррекции указанного процесса. Корректирующее управление получено в явном виде.

1. Пусть течение некоторого процесса описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$
\begin{aligned}
&z^{(p)} = f(z, z^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, z^{(p-1)}, u^2) + u^1(t) \\
&z^{(i)}(t_0) = z_0^{(i)}, \quad i = 0, \ldots, p-1, \quad t \in [t_0, t']
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь $z \in E_n$, $z^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, p)$ — производные порядка i от вектора z по времени, $u^1(t)$ — кусочно-постоянная вектор-функция (коррекция), $u^2(t)$ — измеримая вектор-функция (помеха), $f(z, z^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, z^{(p-1)}, u^2)$ — вектор-функция, непрерывная по каждому из аргументов и равномерно по всем рассматриваемым аргументам, удовлетворяющая условию

$$
|f(z, z^{\boldsymbol{\cdot}}, \ldots, z^{(p-1)}, u^2)| \leqslant M, \quad M = \mathrm{const}
\tag{1.2}
$$

Введем вектор y с компонентами $y_i = z^{(i-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ и вектор-функцию $\varphi'(y, u^1, u^2)$, компоненты которой имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\varphi_i' = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1 \\
&\varphi_p' = f(y_1, y_2, \ldots, y_p, u^2) + u^1(t)
\end{aligned}
$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&y_1^{\boldsymbol{\cdot}} = y_2, \quad y_2^{\boldsymbol{\cdot}} = y_3, \quad \ldots, \quad \dot{y}_{p-1} = y_p \\
&y_p^{\boldsymbol{\cdot}} = f(y_1, \ldots, y_p, u^2) + u^1(t)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Из (1.2), непрерывности $f(y_1, y_2, \ldots, y_p, u^2)$ по y_i $(i = 1, \ldots, p)$, u^2 и измеримости $u^2(t)$ следует существование и единственность решения системы (1.3) в смысле Каратеодори [2] в виде абсолютно непрерывных вектор-функций времени $y_1(t)$, $y_2(t), \ldots, y_p(t)$, удовлетворяющих условиям

$$
y_i(t_0) = y_{i,0}, \quad i = 1, \ldots, p
$$

Пусть x — решение системы (1.3) при $u^1(t) \equiv u^2(t) \equiv 0$. В указанном случае получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&x_1^{\boldsymbol{\cdot}} = x_2, \quad x_2^{\boldsymbol{\cdot}} = x_3, \quad \ldots, \quad \dot{x}_{p-1} = x_p \\
&x_p^{\boldsymbol{\cdot}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_p, 0)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

и начальные условия

$$
x_i(t_0) = y_i(t_0), \quad i = 1, \ldots, p
$$

Как и в [1], будем трактовать задачу коррекции как дифференциальную игру, в которой описанные выше функции u^i — допустимые управления i-го игрока; допустимыми стратегиями первого игрока будут кусочно-программные стратегии, ставящие в соответствие величинам t_k, $x_i(t_k)$, $y_i(t_k)$, $i = 1, \ldots, p$ число $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$ и вектор-функцию $u_k^1(t)$, $t \in [t_k, t_k + \Delta t_k]$, являющуюся сужением некоторого допустимого управления первого игрока на $[t_k, t_k + \Delta t_k] \subset [t_0, t']$. Допустимая стратегия второго игрока может быть любой, удовлетворяющей единственному требованию: формируемое с ее помощью управление должно быть допустимым. Будем считать, что рассматривается игра с дискриминацией первого игрока.

Обозначим через v^i допустимую стратегию i-го игрока, а через V^i — класс его допустимых стратегий. Плату в рассматриваемой игре зададим следующим образом:

$$J(v^1, v^2) = \sup_{t\in[t_0,t']} |x_1(t) - y_1(t)|$$

Здесь $x_1(t)$ и $y_1(t)$ — абсолютно непрерывные вектор-функции времени, входящие в решение систем (1.3) и (1.4).

Поставим следующую задачу: конструктивно описать стратегию $v_0^1 \in V^1$, для которой имеет место неравенство

$$J(v_0^1, v^2) \leqslant \varepsilon, \quad \forall v^2 \in V^2 \tag{1.5}$$

2. Рассмотрим представление функции $x_1(t)$ в виде аналога формулы Тейлора [3] с остаточным членом в интегральной форме. В силу (1.4) на $[t_k, t_k + \Delta t_k]$ имеем

$$x_1(t_k + \Delta t_k) = x_1(t_k) + \sum_{i=2}^{p} x_i(t_k) \frac{\Delta t_k^{i-1}}{(i-1)!} +$$
$$+ \int_0^{\Delta t_k} \frac{(\Delta t_k - \xi)^{p-1}}{(p-1)!} f(x_1(t_k+\xi), \ldots, x_p(t_k+\xi), 0)\, d\xi$$

Разложение функции $y_1(t)$ на $[t_k, t_k + \Delta t_k]$ имеет аналогичный вид

$$y_1(t_k + \Delta t_k) = y_1(t_k) + \tag{2.1}$$
$$+ \int_0^{\Delta t_k} u^1(t_k+\xi) \frac{(\Delta t_k - \xi)^{p-1}}{(p-1)!} d\xi + A(\Delta t_k)$$
$$A(\Delta t_k) = \sum_{i=2}^{p} y_i(t_k) \frac{\Delta t_k^{i-1}}{(i-1)!} +$$
$$+ \int_0^{\Delta t_k} f(y_1(t_k+\xi), \ldots, y_p(t_k+\xi), u^2(t_k+\xi)) \frac{(\Delta t_k - \xi)^{p-1}}{(p-1)!} d\xi$$

Пусть

$$u^1(t_k + \xi) = u_k^1(t_k), \quad \xi \in (t_k, t_{k+1}) \tag{2.2}$$

Теперь выражение (2.1) с учетом (2.2) можно записать в следующем виде:

$$y_1(t_k + \Delta t_k) = y_1(t_k) + u_k^1(t_k)\, \Delta t_k^p / p! + A(\Delta t_k) \tag{2.3}$$

Введем обозначения

$$R_1(t_k, \Delta t_k) = \sum_{i=2}^{p} |y_i(t_k)| \frac{\Delta t_k^{i-1}}{(i-1)!} + M \frac{\Delta t_k^{\,p}}{p!} \tag{2.4}$$

$$R(t_k, \Delta t_k) = \sum_{i=2}^{p} |x_i(t_k)| \frac{\Delta t_k^{i-1}}{(i-1)!} + M \frac{\Delta t_k^{\,p}}{p!} \tag{2.5}$$

Из (1.2) вытекает

$$|A(\Delta t_k)| \leqslant R_1(t_k, \Delta t_k)$$

Сформулируем лемму об экстраполяции [1] применительно к данной задаче.

Лемма 2.1. Точка $y_1(t_k)$ при управлении (2.2) и любом управлении $u^2(t)$ за время

Δt_k переместится в точку $y_1(t_k + \Delta t_k)$, находящуюся в шаре с центром в точке

$$y_1(t_k) + u_k^1(t_k)\,\Delta t_k^p / p!$$

(см. (2.3)) и радиусом $R_1(t_k, \Delta t_k)$ (2.4).

Если через $S(c_0, R)$ обозначить замкнутый шар в E_n с центром в точке c_0 и радиусом R, то заключение сформулированной леммы можно записать так:

$$y_1(t_k + \Delta t) \in S(y_1(t_k) + u_k^1(t_k)\,\Delta t_k^p / p!,\ R_1(t_k, \Delta t_k))$$

Рассматривая частотный случай леммы 2.1, когда управления $u^1(t)$ и $u^2(t)$ равны нулю, получаем, что к моменту времени $t_k + \Delta t_k$ точка $x_1(t_k)$ переместится в точку $x_1(t_k + \Delta t_k)$ и

$$x_1(t_k + \Delta t_k) \in S(x_1(t_k),\ R(t_k, \Delta t_k))$$

Справедливость леммы и последнего утверждения непосредственно вытекает из соотношений (2.3) — (2.5).

3. Введем обозначение

$$r(t_k + \tau) = |\, x_1(t_k + \tau) - y_1(t_k + \tau)\,| \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует неравенство

$$\begin{aligned} r(t_k + \Delta t_k) \leqslant r_1(t_k + \Delta t_k) \equiv |\,[y_1(t_k) - x_1(t_k)] + {} \\ + u_k^1(t_k)\,\Delta t_k^p / p!\,| + R(t_k, \Delta t_k) + R_1(t_k, \Delta t_k) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными u_k^1 и Δt, вытекающую из соотношений (3.2) и (1.5)

$$\begin{aligned} y_1(t_k) - x_1(t_k) + u_k^1(t_k)\,\Delta t^p / p! = 0 \\ R(t_k, \Delta t) + R_1(t_k, \Delta t) = \varepsilon / 2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Второе уравнение системы (3.3) имеет единственный положительный корень Δt_k. Тогда управление u_k^1 однозначно определяется из первого уравнения этой системы в виде

$$u_k^1 = (x_1(t_k) - y_1(t_k))p! / \Delta t_k^p \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. Если в некоторый момент времени t_k

$$r(t_k) \leqslant \varepsilon / 2 \tag{3.5}$$

а u_k^1 и Δt_k удовлетворяют системе уравнений (3.3), то на промежутке времени $[t_k, t_k + \tau]$, $0 < \tau \leqslant \Delta t_k$ будут иметь место неравенства

$$r(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon,\ r(t_k + \Delta t_k) \leqslant \varepsilon / 2,\ \tau \in (0, \Delta t_k] \tag{3.6}$$

Доказательство. Следствием соотношений (3.2), (3.3) и (3.5) будет второе неравенство в (3.6). Так как функция $R(t_k, \tau) + R_1(t_k, \tau)$ — возрастающая функция аргумента τ, для $\tau \in (0, \Delta t_k]$ имеем

$$R(t_k, \tau) + R_1(t_k, \tau) \leqslant R(t_k, \Delta t_k) + R_1(t_k, \Delta t_k) = \varepsilon / 2$$

Из способа нахождения управления u_k^1 (см. (3.4)) на $[t_k, t_k + \tau]$, $\tau \in (0, \Delta t_k]$ вытекает неравенство

$$|\,[y_1(t_k) - x_1(t_k)] + u_k^1(t_k)\,\tau^p / p!\,| \leqslant |\, y_1(t_k) - x_1(t_k)\,| \leqslant \varepsilon / 2$$

Из двух последних соотношений и (3.2) при замене Δt_k на τ следует справедливость первого неравенства в (3.6).

Для абсолютного значения управления u_k^1 на $[t_k, t_k + \Delta t_k]$ имеет место оценка

$$|\, u_k^1(t_k)\,| \leqslant (|\, x_1(t_k) - y_1(t_k)\,|)\, p! / \Delta t_k^p \leqslant \varepsilon p! / (2\Delta t_k^p)$$

4. Обобщим полученные соотношения на случай, когда корректирующее управление имеет вид

$$u^1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_k, t_k + \Delta\tau],\ \Delta\tau > 0 \\ u_*^1 = \text{const}, & t \in [t_k + \Delta\tau,\ t_k + \Delta\tau + \tau],\ \tau > 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Из леммы об экстраполяции и вида управления (4.1) следует

$$y_1(t_k+\theta) \in S(y_1(t_k),\ R'(t_k,\theta)),\qquad \theta\in[0,\Delta\tau] \tag{4.2}$$

$$R'(t_k,\theta)=\sum_{i=2}^{p}\frac{\theta^{i-1}}{(i-1)!}|y_i(t_k)|+M\frac{\theta^p}{p!}$$

Из (4.1), (4.2) вытекает включение

$$y_1(t_k+\Delta\tau+\varphi)\in S\left(y_1(t_k)+u_*^1\frac{\varphi^p}{p!},\ R'(t_k,\Delta\tau)+R_1(t_k+\Delta\tau,\varphi)\right) \tag{4.3}$$

$$\varphi\in[0,\tau]$$

Для управления (4.1) имеет место следующее соотношение:

$$r(t_k+\theta)\leqslant r_1(t_k+\theta)\equiv|y_1(t_k)-x_1(t_k)|+R(t_k,\theta)+R'(t_k,\theta),\quad \theta\in[0,\ \Delta\tau] \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (2.5) вытекает справедливость неравенства

$$r(t_k+\Delta\tau+\varphi)\leqslant r_2(t_k+\Delta\tau+\varphi)\equiv|y_1(t_k)-x_1(t_k)+u_*^1\varphi^p/p!|+R(t_k,\Delta\tau+\varphi)+R'(t_k,\Delta\tau)+R_1(t_k+\Delta\tau,\varphi) \tag{4.5}$$

Пусть числа α и β удовлетворяют следующим условиям

$$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \alpha+2\beta<1 \tag{4.6}$$

Лемма 4.1. Если

$$r(t_k)\leqslant\varepsilon\alpha/2,\quad u^1(t)=0,\quad t\geqslant t_k \tag{4.7}$$

то

$$r(t_k+\tau)\leqslant\varepsilon(1-\beta)/2,\quad \tau\in[0,\tau_\alpha]$$

где τ_α — корень уравнения

$$R(t_k,\tau)+R'(t_k,\tau)=\varepsilon(1-\beta-\alpha)/2 \tag{4.8}$$

Доказательство. Из (4.1) и (4.7) вытекает справедливость неравенства

$$r(t_k+\tau)\leqslant\varepsilon\alpha/2+R(t_k,\tau)+R'(t_k,\tau) \tag{4.9}$$

Решение τ_α уравнения (4.8) существует и единственно (функция в левой части (4.9 равна нулю при $\tau=0$ и неограниченно возрастает при $\tau\to\infty$). При подстановке τ_α вместо τ в (4.9) получаем заключение леммы.

Лемма 4.2. Если

$$r_1(t_k)\leqslant\varepsilon(1-\beta)/2,\ u^1(t)=0,\ t\geqslant t_k$$

то

$$r_1(t_k+\tau)\leqslant\varepsilon/2,\ \tau\in(0,\tau_\beta]$$

где τ_β — корень уравнения

$$R(t_k,\tau)+R'(t_k,\tau)=\varepsilon\beta/2 \tag{4.10}$$

Из условия леммы и (4.4) следует неравенство, аналогичное (4.9)

$$r_1(t_k+\tau)\leqslant\varepsilon(1-\beta)/2+R(t_k,\tau)+R'(t_k,\tau)$$

Из последнего соотношения и (4.10) вытекает справедливость леммы.

Для чисел τ_α и τ_β, а также R и R', имеют место соотношения

$$\tau_\alpha>\tau_\beta,\quad R(t_k,\tau_\beta)+R'(t_k,\tau_\beta)\leqslant\varepsilon\beta/2,$$

Лемма 4.3. Если

$$r(t_k)\in(\varepsilon\alpha/2,\ \varepsilon(1-\beta)/2)$$

и u_k^1, τ_k удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}&y_1(t_k)-x_1(t_k)+u_k^1\tau_k^p/p!=0\\&R(t_k,\tau_\beta+\tau_k)+R_1(t_k+\tau_\beta,\tau_k)+R'(t_k,\tau_\beta)=\varepsilon(1-\beta)/2\end{aligned} \tag{4.11}$$

то при управлении

$$u_k^1(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_k, t_k + \tau_\beta) \\ u_k^1, & t \in [t_k + \tau_\beta, t_k + \tau_\beta + \tau_k] \end{cases}$$

выполняются соотношения

(4.12) $r_1(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon / 2,\ r(t_k + \tau) \leqslant \varepsilon / 2,\ \tau \in (0, \tau_\beta]$

(4.13) $r_2(t_k + \tau_\beta + \tau_k) \leqslant \varepsilon(1 - \beta) / 2,\ r_2(t_k + \tau_\beta + \tau) \leqslant \varepsilon(1 - \beta),$
$\tau \in (0, \tau_k)$

Доказательство. Пусть τ_β — корень уравнения (4.10). Тогда τ_β всегда существует и $\tau_\beta > 0$ (по той же причине, что и τ_α). В силу леммы 4.2 на $[t_k, t_k + \tau]$, $\tau \in (0, \tau_\beta]$ имеет место первое неравенство в (4.12), а из (4.4) вытекает справедливость второго неравенства.

Из анализа системы (4.11) видно, что ее решение существует и единственно. Второе уравнение системы зависит только от τ_k. Решая его, находим τ_k и, подставляя в первое уравнение, определяем u_k^1.

Из способа нахождения τ_k (см. второе уравнение в (4.11)) и соотношения (4.5) вытекает справедливость первого неравенства в (4.13). Доказательство второго неравенства аналогично доказательству теоремы 3.1.

Опишем алгоритм решения поставленной задачи.

Задаем числа α и β, удовлетворяющие условиям (4.6). Определяем стратегию v_0^1 следующим образом: находим числа τ_α, τ_β; в момент времени t_k полагаем $u_k^1(t) = 0$; находим $r(t_k)$; если $r(t_k) \leqslant \varepsilon\alpha / 2$, то полагаем $u_k^1(t) = 0$, $t \in [t_k, t_k + \tau_\alpha]$; если $r(t_k) \in (\varepsilon\alpha, \varepsilon(1 - \beta) / 2)$, решаем систему (4.11), откуда получаем управление u_k^1, число τ_k и доопределяем управление

$$u_k^1(t) = u_k^1, \qquad t \in [t_k + \tau_\beta, t_k + \tau_\beta + \tau_k]$$
$$t_k + \tau_\beta + \tau_k = t_{k+1}$$

Выполнение неравенства (1.5) обеспечивается применением описанной стратегии v_0^1 на каждом шаге.

Поступила 1 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лагунов В. Н.* О коррекции нелинейного управляемого процесса. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
3. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., «Мир», 1971.

УДК 62—50

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Ю. Б. Сейсов

(Ашхабад)

Указываются достаточные условия оптимальности управления в нелинейной системе. При этом требуется существование некоторой функции с определенными свойствами. Если задать эту функцию специальным образом, то из доказанной теоремы следует теорема В. Ф. Кротова [1]. Для задач быстродействия в автономных системах приводится некоторое ослабление достаточных условий работы [2].