УДК 62—50

ТЕОРЕМА ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

С. А. Вахрамеев

(Москва)

Рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения — уклонения с нестационарными геометрическими ограничениями на управления игроков. Доказывается, что для этой игры справедлива альтернатива, которая заключается в том, что всегда разрешима либо позиционная игра сближения, либо позиционная игра уклонения. При доказательстве используются построения, аналогичные соответствующим построениям из монографии [1].

1. Пусть поведение управляемой системы Σ описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad u \in R^p, \quad v \in R^q \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно.

Пусть $\Omega(R^s)$ — пространство всех непустых компактов в R^s с метрикой Хаусдорфа

$$h: \Omega(R^s) \times \Omega(R^s) \to R^1$$
$$h(A, B) = \min\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset B + S_\varepsilon,\ B \subset A + S_\varepsilon\}$$
$$S_\varepsilon = \{x \in R^s \mid |x| \leqslant \varepsilon\}, \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^{s} x_i^2\right)^{1/2}$$

Пусть заданы измеримые многозначные отображения (см. [2,3])

$$P: R^1 \to \Omega(R^p), \ Q: R^1 \to \Omega(R^q)$$

Будем считать, что в каждый момент времени t игроки выбирают свои управления $u(t)$ и $v(t)$ из множеств $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно.

Предположим, что функция $f(\cdot, x, u, v): R^1 \to R^n$ измерима при всех $x \in R^n$, $u \in R^p$, $v \in R^q$, а функция $f(t, \cdot, \cdot, \cdot): R^n \times R^p \times R^q \to R^n$ непрерывна при любом $t \in R^1$.

Обозначим через L_1^{loc} множество всех локально суммируемых по Лебегу функций $g: R^1 \to R^1$.

Пусть при всех $x, y \in R^n$, $u \in P(t)$, $v \in Q(t)$ выполнено неравенство

$$| f(t, x, u, v) - f(t, y, u, v) | \leqslant \lambda(t) \, | x - y | \tag{1.2}$$

где функция $\lambda(\cdot) \in L_1^{\mathrm{loc}}$ и неотрицательна.

Предположим, что при всех $x \in R^n, u \in P(t)$, $v \in Q(t)$ справедливо неравенство

$$| f(t, x, u, v) | \leqslant k(t)(1 + | x |) \tag{1.3}$$

где функция $k(\cdot) \in L_1^{\mathrm{loc}}$ и неотрицательна.

Условие седловой точки в маленькой игре (см. [1]) будем считать выполненным в следующем виде: для любых x, $s \in R^n$ и при почти всех $t \in R^1$

$$\max_{v \in Q(t)} \min_{u \in P(t)} (s, f(t, x, u, v)) = \min_{u \in P(t)} \max_{v \in Q(t)} (s, f(t, x, u, v)) \tag{1.4}$$

Обозначим через $P(\cdot \mid t_1, t_2)$ множество всех измеримых ветвей отображения P: $:R^1 \to \Omega(R^p)$ на полуинтервале $[t_1, t_2)$. Это множество не пусто по теореме измеримого выбора (см. [2,3]).

Стратегией $U \div U(\cdot \mid t, x)$ первого игрока назовем отображение, которое произвольной позиции (t, x) ставит в соответствие непустое множество из $P(\cdot \mid t, \infty)$. Аналогично определяется символ $Q(\cdot \mid t_1, t_2)$ и стратегия $V \div V(\cdot \mid t, x)$ второго игрока.

Пусть первый игрок выбрал стратегию $U \div U(\cdot \mid t, x)$. Рассмотрим разбиение Δ полуоси $[t_0, \infty)$ на систему полуинтервалов вида $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $t_0 = \tau_0$, $\tau_i \to \infty$, $i \to \infty$.

Обозначим $|\Delta| = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Пусть $v(\cdot) \in Q(\cdot \mid t_0, \infty)$ — произвольная реализация действий второго игрока. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$
\begin{aligned}
&x^{\cdot} = f(t, x, u_i(t), v(t)), \qquad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \\
&u_i(\cdot) \in U(\cdot \mid \tau_i, x(\tau_i)), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \\
&x(t_0) = x_0
\end{aligned}
$$

Это уравнение имеет продолжимое на $[t_0, \infty)$ решение $x(t) = x(t; t_0, x_0, U, (v\cdot))$, которое называется ломаной Эйлера, порождённой стратегией $U \div U(\cdot \mid t, x)$ первого игрока.

Движением $x(t) = x(t; t_0, x_0, U)$, порождённым стратегией $U \div U(\cdot \mid t, x)$ первого игрока, называется всякая функция $x(\cdot)$, для которой на любом конечном отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ найдётся последовательность $\{x_k(\cdot)\}$ ломаных Эйлера $x_k(t) = x_k(t; t_0, x_0^k, U, v_k(\cdot))$, такая, что она равномерно сходится к $x(\cdot)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ при $|\Delta^{(k)}| \to 0$, $x_0^k \to x_0$, $k \to \infty$. Аналогично определяется движение, порождённое стратегией $V \div V(\cdot \mid t, x)$ второго игрока.

Пусть заданы непустые замкнутые множества M_c и N_c в пространстве позиций R^{n+1}. Игра сближения — уклонения складывается из следующих двух задач.

Задача 1. Найти стратегию $U^c \div U^c(\cdot \mid t, x)$, которая обеспечит встречу

$$
\begin{aligned}
&(t, x(t)) \in N_c, \quad t_0 \leqslant t < \tau, \quad (\tau, x(\tau)) \in M_c \\
&(t, x(t)) \notin M_c, \quad t_0 \leqslant t < \tau
\end{aligned}
$$

для всех движений $x(t) = x(t; t_0, x_0, U^c)$.

Задача 2. Указать такие открытые окрестности $H(N_c)$ и $G(M_c)$ множеств N_c и M_c, а также стратегию $V^c \div V^c(\cdot \mid t, x)$, что для всех движений $x(t) = x(t; t_0, x_0, V^c)$ исключается встреча $(t, x(t)) \in H(N_c)$, $t_0 \leqslant t < \tau$, $(\tau, x(\tau)) \in G(M_c)$.

В случае, когда множество M_c целиком лежит в полупространстве $\{t \in R^1 \mid t \leqslant T\}$, говорят о задаче 1 как о задаче сближения с множеством M_c внутри множества N_c к моменту времени T и о задаче 2 как о задаче уклонения от M_c внутри N_c вплоть до момента времени T.

2. Пусть выполнены условия (1.2) и (1.3). Рассмотрим дифференциальное включение

$$
x^{\cdot} \in \operatorname{conv}\{f(t, x, u, v);\ u \in P(t),\ v \in Q(t)\} \tag{2.1}
$$

Очевидно, что оно имеет продолжимое на $[t_0, \infty)$ решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Можно доказать, что для любого решения $x(\cdot)$ включения (2.1) справедливо неравенство

$$
|f(t, x(t), u, v)| \leqslant m^0(t) \tag{2.2}
$$

для всех $u \in P(t)$ и $v \in Q(t)$. При этом оценка (2.2) равномерна для всех позиций (t_0, x_0) из некоторой ограниченной области G пространства R^{n+1}. Здесь функция $m^0(\cdot) \in L_1^{\mathrm{loc}}$ неотрицательна и зависит только от области G.

Нестационарность ограничений на управления игроков приводит к следующей модификации определений стабильности (см. [1]).

Говорят, что множество $W \subset R^{n+1}$ u-стабильно, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$, любого момента $t^* > t_*$ и любого управления $v^*(\cdot) \in Q(\cdot \mid t_*, t^*)$ второго игрока существует решение $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ включения

$$
x^{\cdot} \in \operatorname{conv}\{f(t, x, u, v^*(t));\ u \in P(t)\}
$$

с начальным условием $x(t_*) = x_*$, такое, что $(t^*, x(t^*)) \in W$ или $(\tau^*, x(\tau^*)) \in M$ при некотором $\tau^* \in [t_*, t^*]$.

Говорят, что множество $W \subset R^{n+1}$ v-стабильно, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in \in W$, любого момента $t^* > t_*$ и любого управления $u^*(\cdot) \in P(\cdot \mid t_*, t^*)$ первого игрока существует решение $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ включения

$$x^{\cdot} \in \operatorname{conv} \{f(t, x, u^*(t), v; \ v \in Q(t)\}$$

с начальным условием $x(t_*) = x_*$, такое, что $(t^*, x(t^*)) \in W$ или $(\tau^*, x(\tau^*)) \notin \notin H(N_c)$ при некотором $\tau^* \in [t_*, t^*]$.

Свойство u-стабильности (v-стабильности) множества W определяется по заданному замкнутому множеству M_c (по заданной открытой окрестности $H(N_c)$ заданного множества N_c).

Такое определение свойств стабильности, отличающееся от аналогичного определения в [1], не изменяет следующего важного свойства.

Лемма 1. Если множество W u-стабильно (v-стабильно), то u-стабильно (v-стабильно) его замыкание $\overline{W}$.

Определим теперь экстремальную стратегию $U^e \div U^e(\cdot \mid t, x)$ первого игрока. Пусть (t_*, x_*) — произвольная позиция и множество $W \subset R^{n+1}$ замкнуто. Рассмотрим гиперплоскость $\Gamma_{t_*} = \{(t, x) \in R^{n+1} \mid t = t_*\}$.

Если $\Gamma_{t_*} \cap W = \phi$, то полагаем $U^e(\cdot \mid t_*, x_*) = P(\cdot \mid t_*, \infty)$; если $\Gamma_{t_*} \cap W \neq \phi$, то обозначим через ω_* вектор сечения $W(t_*)$ множества W гиперплоскостью Γ_{t_*}, который лежит ближе всего к (t_*, x_*). Тогда

$$U^e(\cdot \mid t_*, x_*) = \{u^*(\cdot) \in P(\cdot \mid t_*, \infty \mid \max_{v \in Q(t)} (x_* - \omega_*, f(t, x_* u^*(t), v)) =$$
$$= \min_{u \in P(t)} \max_{v \in Q(t)} (x_* - \omega_*, f(t, x_*, u, v))\}$$

Экстремальная стратегия второго игрока определяется аналогичным образом. Именно, если $\Gamma_{t_*} \cap W = \phi$, то полагаем $V^e(\cdot \mid t_*, x_*) = Q(\cdot \mid t_*, \infty)$. Если $\Gamma_{t_*} \cap W \neq \neq \phi$, то

$$V^e(\cdot \mid t_*, x_*) = \{v^*(\cdot) \in Q(\cdot \mid t_*, \infty \mid \min_{u \in P(t)} (\omega_* - \omega_*, f(t, x_*, u, v^*(t))) =$$
$$= \max_{v \in Q(t)} \min_{u \in P(t)} (\omega_* - x_*, f(t, x_*, u, v))\}$$

Символы ω_* и Γ_{t_*} здесь имеют тот же смысл, что и выше.

Корректность этих определений легко доказать, используя теорему А. Ф. Филиппова (см. [3]).

3. Пусть функция $x(t)$, $t \geqslant t_*$ удовлетворяет уравнению

$$x^{\cdot} = f(t, x, u^*(t), v(t)), \quad x(t_*) = x_*$$

а функция $y(t)$, $t \geqslant t_*$ — дифференциальному включению

$$y^{\cdot} \in \operatorname{conv} \{f(t, y, u, v^*(t)); \ u \in P(t)\}, \quad y(t_*) = y_*$$

Здесь функция $v(\cdot) \in Q(\cdot \mid t_*, \infty)$ произвольна, а $u^*(\cdot) \in P(\cdot \mid t_*, \infty)$ и $v^*(\cdot) \in \in Q(\cdot \mid t_*, \infty)$ выбраны из условий

$$s_* = x_* - y_*$$
$$\max_{v \in Q(t)} (s_*, f(t, x_*, u^*(t), v)) = \min_{u \in P(t)} \max_{v \in Q(t)} (s_*, f(t, x_*, u, v))$$
$$\min_{u \in P(t)} (s_*, f(t, x_*, u, v^*(t))) = \max_{v \in Q(t)} \min_{u \in P(t)} (s_*, f(t, x_*, u, v))$$

Обозначим $\rho(t) = |x(t) - y(t)|$.

Лемма 2. Справедлива следующая оценка

$$\rho^2(t) \leqslant \rho^2(t_*) \left(1 + 2 \int_{t_*}^{t} \lambda(\xi)\, d\xi\right) + \int_{t_*}^{t} \varphi(t_*, \xi)\, m(\xi)\, d\xi \tag{3.1}$$

равномерная для всех (t_*, x_*) и (t_*, y_*) из некоторой ограниченной области $G \subset R^{n+1}$. Здесь

$$m(t) = 4g\lambda(t) + 8m^{\circ}(t), \ g = \operatorname{diam} G, \ \varphi(t_*, t) \int_{t_*}^{t} = m^{\circ}(\xi)\, d\xi$$

где функция $m^\circ(\cdot)$ из (2.2), а функция $\lambda(\cdot)$ — из (1.2).

Доказательство этого утверждения лишь в некоторых деталях отличается от доказательства аналогичного утверждения в [1].

4. Следующие барьерные свойства экстремальных стратегий позволяют доказать теорему об альтернативе.

Лемма 3. Пусть $W \subset R^{n+1}$ — замкнутое u-стабильное множество, $U^e \div U^e \cdot (\cdot \mid t, x)$ — экстремальная стратегия и $(t_0, x_0) \in W$. Тогда для любого движения $x(t) = x(t;\, t_0, x_0, U^e)$ вплоть до встречи $(\tau, x(\tau)) \in M_c$ будет выполнено включение $(t, x(t)) \in W$.

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и доказательство аналогичного утверждения в [1]. Надо только вместо вспомогательной оценки (15.1) в [1] использовать неравенство

$$\varepsilon_k^2(t) \leqslant \left(\varepsilon_k^2(t_*) + \varphi_k \int_{t_*}^{t} m(s)\,ds\right) \exp\left(2\int_{t_*}^{t} \lambda(s)\,ds\right)$$

$$t_* \leqslant t \leqslant t_* + \tau_*, \qquad \varphi_k = \sup_i \sup_{\tau_i^{(k)} \leqslant t < \tau_{i+1}^{(k)}} \varphi(\tau_i^{(k)}, t), \; k = 1, 2, \ldots$$

где $\tau_i^{(k)}$ — точки разбиения $\Delta^{(k)}$, соответствующего ломаной $x_k(t) = x_k(t;\, t_0, x_0^k, U^e, v_k(\cdot))$. Это неравенство является непосредственным следствием u-стабильности множества W и леммы 2.

Совершенно аналогично получается

Лемма 4. Если замкнутое множество $W \in R^{n+1}$ v-стабильно, $V^e \div V^e(\cdot \mid t, x)$ — экстремальная стратегия и $(t_0, x_0) \in W$, то для любого движения $x(t) = x(t;\, t_0, x_0, V^e)$ вплоть до момента τ, когда $(\tau, x(\tau)) \notin H(N_c)$ будет выполнено включение $(t, x(t)) \in W$.

Использование лемм 3, 4 и дословное повторение рассуждений § 16, 17 монографии [1] приводит к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть дана начальная позиция (t_0, x_0) и выбран момент $T \geqslant t_0$. Тогда либо существует стратегия $U^c \div U^c(\cdot \mid t, x)$, которая решает задачу 1 о сближении с M_c внутри N_c к моменту T, либо существуют такие открытые окрестности $H(N_c)$ и $G(M_c)$ множеств N_c и M_c, а также стратегия $V^c \div V^c(\cdot \mid t, x)$, решающие задачу 2 об уклонении от M_c внутри N_c вплоть до момента T.

Замечание. Приведенные построения не изменятся, если вместо «многозначных» стратегий использовать «однозначные», т. е. определять стратегию первого (второго) игрока как отображение, которое произвольной позиции (t, x) ставит в соответствие некоторую функцию из $P(\cdot \mid t, \infty)$ $(Q(\cdot \mid t, \infty))$.

В заключение автор приносит благодарность Н. Н. Красовскому, А. И. Субботину и М. С. Никольскому за внимание к работе.

Поступила 5 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974.
3. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., «Наука», 1977.