Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.376

О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИИ НАСЛЕДСТВЕННОГО ОПЕРАТОРА

Е. С. Синайский

(Днепропетровск)

Рассматривается задача численной реализации функции наследственного оператора, воздействующей на некоторую функцию времени. Посредством преобразования Лапласа для операторов с ядрами типа Ю. Н. Работнова и А. Р. Ржаницына получены формулы, которые сводят указанную задачу к вычислению квадратуры, а при больших значениях переменной преобразуются в асимптотические равенства с оцениваемой погрешностью приближения.

1. Эффективное решение широкого класса задач линейной теории наследственной упругости связано с применением принципа Вольтерра [1]. Осуществляемая в решении задачи для идеально упругого тела замена упругих постоянных материала соответствующими реологическими операторами приводит к необходимости вычислять свертки вида

$$
\varphi(x; q^*) f(t), \quad q^* f(t) \equiv \int_0^t q(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{1.1}
$$

$$
q_j{}^* q_k{}^* f = q_j{}^* (q_k{}^* f), \quad q^{*^n} f = q^* (q^{*^{n-1}} f)
$$

Здесь φ — функция пространственных координат x_k и интегральных операторов $q_j{}^*$ в принятом в [1] смысле, t — время, $q(t-\tau)$ — зависящее от разности аргументов ядро оператора q^*.

Если φ — рациональная функция резольвентных операторов одного класса, то выражение (1.1) приводится к квадратурам по известным правилам [1]. В общем случае численная реализация (1.1) достигается представлением функции φ в виде ряда по степеням операторов q^* с последующим применением формул (1.1). Подобная расшифровка функции операторов и следующие затем вычисления, за исключением достаточно малых значений t, обеспечивающих быструю сходимость ряда, как правило, весьма трудоемки. Поэтому представляет интерес построение эффективных вычислительных алгоритмов для выражения (1.1).

Применение преобразования Лапласа к исходным соотношениям теории наследственной упругости приводит к необходимости для вычисления (1.1) выполнить обращение выражения $\varphi(x; Q(p))F(p)$, где p — параметр преобразования, $Q(p) = L\{q(t)\}$ и $F(p) = L\{f(t)\}$ — лапласовы трансформанты ядра $q(t)$ оператора q^* и функции $f(t)$ соответственно.

Применительно к операторам q^* с ядрами наследственности, имеющими вид экспоненты дробного порядка Ю. Н. Работнова $Э_\alpha(\beta, t)$ [1] и функции А. Р. Ржаницына $P_\alpha(\lambda, t)$ [2]

$$Э_\alpha(\beta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k t^{kr+\alpha}}{\Gamma[r(k+1)]}, \quad \beta < 0, \quad 0 < r = 1 + \alpha < 1 \tag{1.2}$$

$$P_\alpha(\lambda, t) = \frac{1}{\Gamma(r)} t^\alpha e^{\lambda t}, \quad \lambda \leqslant 0, \quad 0 < r = 1 + \alpha < 1 \tag{1.3}$$

преобразования Лапласа которых являются аналитическими функциями, имеющими на плоскости комплексного переменного p характерную особенность в виде точки разветвления, получены формулы, позволяющие вычислять свертки вида (1.1) в широком диапазоне значений t.

2. Пусть φ является функцией одного оператора q^* и

$$Q(p) = Q_1(z), \; z = (p - \lambda)^r, \; \lambda \leqslant 0, \; 0 < r < 1 \tag{2.1}$$

Согласно формуле Меллина

$$\varphi(q^*) f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi(Q(p)) F(p) e^{pt} dp \tag{2.2}$$

$$\varphi(q^*) \equiv \varphi(x; \; q^*), \; \varphi(Q(p)) \equiv \varphi(x; \; Q(p))$$

Здесь интегрирование выполняется по прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, расположенной в плоскости p правее всех особых точек подынтегральной функции. Будем предполагать, что в конечной части плоскости при $|\arg p| \leqslant \pi$ эта функция имеет лишь одну точку разветвления $p = \lambda$ и, быть может, конечное число полюсов, ни один из которых не лежит на действительно отрицательной полуоси левее точки разветвления. Для выделения однозначной ветви функции выполним по этой полуоси разрез влево от точки $p = \lambda$. С учетом вычетов в полюсах путь интегрирования в (2.2) заменим контуром, составленным из верхнего Γ_+ и нижнего Γ_- берегов разреза, дуг Γ_1 и Γ_2 окружности бесконечно большого радиуса и окружности Γ_ε исчезающего радиуса ε с центрами в точке $p = \lambda$. Считая, что выполнены условия леммы Жордана и интегралы по дугам Γ_1 и Γ_2 обращаются в нуль, имеем

$$\varphi(q^*) f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_H \varphi(Q(p)) F(p) e^{pt} dp + \sum_s \operatorname*{Res}_{p_s} [\varphi(Q(p)) F(p) e^{pt}] \tag{2.3}$$

Здесь контур $H = \Gamma_- + \Gamma_\varepsilon + \Gamma_+$ обходится в направлении против часовой стрелки, вычеты определяются во всех полюсах p_s, $|\arg(p_s - \lambda)| \neq \pi$.

Подстановка (2.1) $z = (p - \lambda)^r$ отображает контур H на контур H_1 на плоскости z, составленный из лучей $\arg z = \pm \pi r$ и дуги окружности $|z| = \varepsilon^r = \varepsilon_1$. Пусть

$$\varphi(Q(p)) = \varphi_1(z) = z^{-\nu} \Phi(z)$$

Здесь $\nu \geqslant 0$, а $\Phi(z)$ — однозначная аналитическая на контуре H_1 и в области $|z| \leqslant \varepsilon_1$ функция. Тогда на H_1 имеет место аппроксимация [3]

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^{(k)}(0)\frac{z^k}{k!} + \rho_n(z), \quad \Phi^{(k)}(z) = \frac{d^k\Phi}{dz^k}, \quad n \geqslant 0 \tag{2.4}$$

$$|\rho_n(z)| \leqslant M'_{n+1}\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad M'_{n+1} = \max_{l}\left|\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\Phi(z)\right| \tag{2.5}$$

Здесь l — отрезок, соединяющий точку z контура H_1 с точкой $z = 0$.

Для функции $F(p)$, аналитической на контуре H, но не обязательно регулярной в точке $p = \lambda$, для всех $p \in H$ полагаем возможным представление

$$F(p) = \sum_{j=0}^{m} b_j(p-\lambda)^{j+\mu} + \gamma_m, \quad m \geqslant 0, \quad \mu \gtrless 0 \tag{2.6}$$

$$|\gamma_m| \leqslant A\,|p-\lambda|^{m+\mu+1}, \qquad A = \mathrm{const} \geqslant 0 \tag{2.7}$$

Условиям (2.6), (2.7) удовлетворяют, в частности, изображения функций t^δ $(\delta > -1)$, $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, e^{ht} $(h \geqslant \lambda)$.

Вследствие равенства [4]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{H}(p-\lambda)^{\omega}e^{pt}\,dp = T_{\mathrm{I}}(t;\omega)e^{\lambda t}, \quad T_{\mathrm{I}}(t;\omega) \equiv \frac{t^{-\omega-1}}{\Gamma(-\omega)}, \quad \omega \gtrless 0 \tag{2.8}$$

разложения (2.4) и (2.6) преобразуют соотношение (2.3) к виду

$$\varphi(q^*)f(t) = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_j\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}T_{\mathrm{I}}(t; rk+j+\mu-r\nu) + \sum_{s}\operatorname*{Res}_{p_s}[\varphi(Q(p))F(p)e^{pt}] + r_{mn}(t) \tag{2.9}$$

$$r_{mn}(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_-} + \int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_+}\right)\left\{e^{pt}\left[\gamma_m\varphi(Q(p)) + \rho_n\sum_{j=0}^{m} b_j(p-\lambda)^{j+\mu-r\nu}\right]dp\right\} \tag{2.10}$$

Если в разложениях (2.4) и (2.6) числа n и m удовлетворяют неравенствам

$$r(n+1) + \mu > r\nu - 1, \quad m + \mu + 1 > r\nu - 1 \tag{2.11}$$

то ввиду (2.5), (2.7) и ограниченности функции $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = 0$ интеграл по Γ_ε в (2.10) при $\varepsilon \to 0$ исчезает. Оставшиеся интегралы по берегам разреза Γ_+ и Γ_-, на которых $p - \lambda = xe^{\pm i\pi}$, $x = |p-\lambda|$, приводят к формуле

$$r_{mn}(t) = -\frac{1}{\pi}e^{\lambda t}\int_0^\infty e^{-xt}V(x)\,dx \tag{2.12}$$

Здесь $V(x)$ — мнимая часть выражения в квадратных скобках в равенстве (2.10) на верхнем берегу разреза, т. е.

$$V(x) = \operatorname{Im}\left[\gamma_m\varphi(Q(p)) + \rho_n\sum_{j=0}^{m} b_j(p-\lambda)^{j+\mu-r\nu}\right]_{p=\lambda+xe^{i\pi}} \tag{2.13}$$

Отметим, что если $\rho_n = 0$ или $\gamma_m = 0$, то соответственно первое или второе из условий (2.11) становится лишним.

С учетом соотношений (2.5) и (2.7) из формул (2.12), (2.13) следует оценка (максимум берется по $\arg z = \pm\pi r$)

$$|r_{mn}(t)| \leqslant \frac{1}{\pi}e^{\lambda t}\Big\{AM_0T_2(t; m+\mu-r\nu+2) + \tag{2.14}$$

$$+\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{m}|b_j|T_2(t; rn+r+j+\mu-r\nu+1)\Big\}$$

$$T_2(t;\omega) \equiv \Gamma(\omega)t^{-\omega}, \quad M_0 = \max|\Phi(z)|, \quad M_{n+1} = \max\left|\frac{d^{n+1}\Phi(z)}{dz^{n+1}}\right|$$

При достаточно больших значениях t ввиду (2.14) величину $r_{mn}(t)$ можно опустить и использовать представление (2.9) в качестве асимптотического равенства. Вместе с тем, формулы (2.9), (2.12) позволяют вычислять свертку $\varphi(q^*)f(t)$ и при других значениях t, если величины ρ_n и γ_m в равенстве (2.13) выразить посредством соотношений (2.4) и (2.6) а затем приближенно найти квадратуру (2.12). Числа n и m при этом с учетом (2.11) следует по возможности выбирать малыми. Интеграл в (2.12) есть преобразование Лапласа с параметром t функции действительного переменного $V(x)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть 1) аналитическая в некотором круге $|u| \leqslant u_0$ ($u_0 = \mathrm{const} > 0$) функция $\varphi(u)$ определяет функцию наследственного оператора $\varphi(q^*)$ (1.1), причем преобразование Лапласа $Q(p)$ ядра оператора q^* на плоскости параметра преобразования имеет точку разветвления $p = \lambda$ ($\lambda \leqslant 0$) и $\varphi(Q(p)) = (p-\lambda)^{-r\nu}\Phi[(p-\lambda)^r]$, $0 < r < 1$, $\nu \geqslant 0$, где $\Phi(z)$ — однозначная аналитическая функция на лучах $\arg z = \pm\pi r$, в точке $z = 0$ и ее окрестности; 2) операторная функция $\varphi(q^*)$ воздействует на функцию $f(t)$, изображение по Лапласу которой $F(p)$ на отрицательной полуоси при $p < \lambda$ и в окрестности точки $p = \lambda$ допускает представление (2.6), (2.7); 3) при $p \to \infty$, $\operatorname{Re}p < \sigma = \mathrm{const}$ произведение $\varphi(Q(p))F(p)$ равномерно относительно $\arg p$ стремится к нулю; 4) среди особых точек выражения $\varphi(Q(p))F(p)$ в конечной части плоскости p при $|\arg p| \leqslant \pi$ существует только одна точка разветвления $p = \lambda$ и возможно конечное число полюсов, ни один из которых не лежит на действительной отрицательной полуоси левее точки $p = \lambda$. Тогда свертка $\varphi(q^*)f(t)$ для любого конечного $t > 0$ определяется формулами (2.9), (2.12), (2.13), а при достаточно больших значениях t соотношение (2.9) приобретает смысл асимптотического равенства с оценкой остаточного члена (2.14).

Формула (2.9) позволяет, в частности, установить поведение свертки $\varphi(q^*)f(t)$ при $t \to \infty$. Конечное предельное значение существует, если для всех полюсов p_s, в которых определяются вычеты, $\operatorname{Re} p_s < 0$ и либо $\lambda < 0$, либо $\lambda = 0$, но положительные степени t в разложении (2.9) отсутствуют. В случае $\lambda = 0$ и $f(t) = \mathrm{const}$ показатель $\mu = -1$, и при условиях $\operatorname{Re} p_s < 0$, $\Phi(0) \neq 0$ ограниченность свертки достигается, если $\nu = 0$.

В силу известной теоремы операционного исчисления при условии, что рассматриваемые пределы существуют

$$
\begin{aligned}
(2.15)\qquad & \lim_{t\to\infty} q^*\cdot 1 = \lim_{p\to 0} p\left[Q(p)\,\frac{1}{p}\right] = Q(0)\\
& \lim_{t\to\infty} \varphi(q^*) f(t) = \lim_{p\to 0} p\varphi(Q(p)) F(p) = \varphi(Q(0)) \lim_{p\to 0} pF(p) =\\
& = \varphi(\lim_{t\to\infty} q^*\cdot 1) f(\infty)
\end{aligned}
$$

Утверждение (2.15) представляет предельную теорему для наследственных операторов, установленную в работе [1].

3. Рассмотрим теперь оператор q^* с ядром (1.2) $\varkappa Э_\alpha(\beta, t)$, $\varkappa > 0$. Вследствие равенства $L\{Э_\alpha(\beta, t)\} = (p^r - \beta)^{-1}$ следует положить $\lambda = 0$, $z = p$ и, если $\varphi(Q(p))$ в точке $p = 0$ не имеет сингулярности, принять $\nu = 0$. При этом

$$
\begin{aligned}
3.1)\qquad & \Phi(z) = \varphi(\varkappa/(z-\beta)),\quad \Phi^{(k)}(0) = (-1)^k \partial^k \varphi(-\varkappa/\beta)/\partial\beta^k\\
& \varphi(\varkappa Э_\alpha^*(\beta)) f(t) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_j \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\partial^k\varphi(-\varkappa/\beta)}{\partial\beta^k}\, T_1(t; rk + j + \mu) +\\
& + \sum_s \operatorname*{Res}_{p_s}\left[\varphi\left(\frac{\varkappa}{p^r - \beta}\right) F(p)\, e^{pt}\right] + r_{mn}(t)
\end{aligned}
$$

Пусть функция $\varphi(u)$ аналитична в круге $|u| \leqslant u_0$ и

$$
\max_{\arg z = \pm\pi r}\left|\frac{\varkappa}{z-\beta}\right| = \frac{\varkappa}{g} < u_0
$$

Здесь при $r \leqslant 1/2$ $g = |\beta|$, при $r > 1/2$ $g = |\beta| \sin \pi r$. Тогда величины M_0 и M_{n+1} из формулы (2.14) представляются в форме ряда. В частности, для M_{n+1} имеем

$$
\begin{aligned}
& M_{n+1} = \max_{\arg z = \pm\pi r}\left|\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{n+1} S_{jn} (z-\beta)^{-j-n-1}\right|\\
& S_{jn} \equiv (j+n)!\, \varkappa^j \varphi^{(j)}(0)/[(j-1)!\, j!]
\end{aligned}
$$

Если все $\varphi^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, одного знака, то

$$
(3.2)\qquad M_{n+1} \leqslant \left|\sum_{j=0}^{\infty} S_{jn} g^{-j-n-1}\right| = \left|\frac{\partial^{n+1}\varphi(\varkappa/g)}{\partial g^{n+1}}\right|,\quad M_0 \leqslant \left|\varphi\left(\frac{\varkappa}{g}\right)\right|
$$

В случае знакочередования $\operatorname{sign} \varphi^{(j)}(0) = -\operatorname{sign}\varphi^{(j+1)}(0)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$
(3.3)\qquad M_{n+1} \leqslant \left|\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S_{jn} g^{-j-n-1}\right| = \left|\frac{\partial^{n+1}\varphi(-\varkappa/g)}{\partial g^{n+1}}\right|,\quad M_0 \leqslant \left|\varphi\left(-\frac{\varkappa}{g}\right)\right|
$$

Указанные неравенства упрощают оценку величины $r_{mn}(t)$ по формуле (2.14).

При $f(t) = \mathrm{const}$ и $\lambda = 0$ в представлении (2.6) $b_0 \neq 0$, $b_j = 0$ $(j \geqslant 1)$, $\mu = -1$, $\gamma_m = 0$, и формула (3.1) при отсутствии вычетов совпадает с асимптотическим разложением, полученным в [5]. Если $f(t) = t^\delta$ $(\delta > -1)$, $\varphi(q^*) = q^{*\omega}$, $\omega = 1, 2, \ldots$, $q(t) = \varkappa \mathcal{Э}_\alpha(\beta, t)$, то $b_0 = \Gamma(1+\delta)$, $b_j = 0$ $(j \geqslant 1)$, $\mu = -\delta - 1$, $\gamma_m = 0$. Формула (3.1) с оценками (2.14) и (3.2) приводит в этом случае к соотношениям, полученным в работе [6].

Пример 1. Пусть $\varphi(\varkappa \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta)) = (1 + \varkappa \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta))^{1/2}$, $\varkappa > 0$, $\beta < 0$, $f(t) = 1$. Тогда $F(p) = p^{-1}$ и в (2.6) $\lambda = 0$, $b_0 = 1$, $m = 0$, $\mu = -1$, $\gamma_m = 0$. Согласно (3.1), при $n = 1$ имеем

$$(1 + \varkappa \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta))^{1/2} \cdot 1 = \left(1 - \frac{\varkappa}{\beta}\right)^{1/2} - \frac{\varkappa}{2\beta^2(1 - \varkappa\beta^{-1})^{1/2}} \frac{t^{-r}}{\Gamma(1-r)} + r_1(t)$$

Из соотношений (2.14) находим

$$|r_1(t)| \leqslant M_2 \Gamma(2r) t^{-2r} / (2\pi), \qquad M_2 \leqslant \varkappa g^{-5/2} g_1^{-1/2} (\varkappa / (4g_1) + 1)$$

Здесь при $r \leqslant 1/2$ $g = |\beta|$, $g_1 = |\beta_1|$, при $r > 1/2$ $g = |\beta| \sin \pi r$, $g_1 = |\beta_1| \sin \pi r$, $\beta_1 = \beta - \varkappa$.

Так, если $\alpha = -0.7$ $(r = 0.3)$, $\beta = -1$, $\varkappa = 0.5$, то $(1 + \varkappa \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta))^{1/2} \cdot 1 = 1.225 - 0.157 t^{-0.3} + r_1(t)$ и $|r_1(t)| \leqslant 0.105 t^{-0.6}$.

Полученные результаты можно распространить на случай двух и более операторных аргументов функции φ. В частности, для $\varphi = \varphi(\varkappa_1 \mathcal{Э}_{\alpha_1}^*(\beta_1), \varkappa_2 \mathcal{Э}_{\alpha_2}^*(\beta_2))$ при условии, что операционный аналог этой функции ограничен в окрестности точки $p = 0$ и $1 + \alpha_1 = c_1 r$, $1 + \alpha_2 = c_2 r$, где c_1 и c_2 — целые положительные числа, $0 < r < 1$, для функции $\Phi(z)$ имеем

$$\Phi(z) = \varphi(\varkappa_1 / (z^{c_1} - \beta_1), \quad \varkappa_2 / (z^{c_2} - \beta_2)), \qquad z = p^r$$

С помощью аналогичных рассуждений находим

$$\varphi(\varkappa_1 \mathcal{Э}_{\alpha_1}^*(\beta_1), \varkappa_2 \mathcal{Э}_{\alpha_2}^*(\beta_2)) f(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} T_1(t; rk + j + \mu) + \tag{3.4}$$

$$+ \sum_s \operatorname*{Res}_{p_s} \left[\varphi\left(\frac{\varkappa_1}{p^{c_1 r} - \beta_1}, \frac{\varkappa_2}{p^{c_2 r} - \beta_2}\right) F(p) e^{pt}\right] + r_{mn}(t)$$

В случае $c_1 = c_2 = 1$ справедливо соотношение

$$\Phi^{(k)}(0) = (-1)^k (\partial / \partial\beta_1 + \partial / \partial\beta_2)^k \varphi(-\varkappa_1 / \beta_1, -\varkappa_2 / \beta_2)$$

Оценка величины $r_{mn}(t)$ сохраняет форму (2.14) при $\nu = 0$, $\lambda = 0$.

Пример 2. Операторное выражение $(1 + \varkappa_1 \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta_1) + \varkappa_2 \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta_2))^{1/2} \cdot 1$, $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$, $\beta_1, \beta_2 < 0$, согласно (3.4), получает представление

$$(1 + \varkappa_1 \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta_1) + \varkappa_2 \mathcal{Э}_\alpha^*(\beta_2))^{1/2} \cdot 1 = \left(1 - \frac{\varkappa_1}{\beta_1} - \frac{\varkappa_2}{\beta_2}\right)^{1/2} -$$

$$- \frac{\varkappa_1 \beta_1^{-2} + \varkappa_2 \beta_2^{-2}}{2(1 - \varkappa_1 \beta_1^{-1} - \varkappa_2 \beta_2^{-1})^{1/2}} \frac{t^{-r}}{\Gamma(1-r)} + r_1(t)$$

На основании (2.14) имеем

$$|r_1(t)| \leqslant \frac{M_2\Gamma(2r)}{2\pi} t^{-2r}, \quad M_2 \leqslant \left(1 + \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{g}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\frac{\varkappa^2}{g^4} + \frac{\varkappa^2}{2g^5} |\beta_1 - \beta_2| + \frac{2\varkappa}{g^3}\right)$$

$r = 1 + \alpha$, $\varkappa = \max\{\varkappa_1, \varkappa_2\}$, $g = \min\{g_j\}$, $j = 1, 2, 3, 4$; $r \leqslant 1/2$ $g_j = |\beta_j|$
$r > 1/2$ $g_j = |\beta_j| \sin \pi r$; $\beta_{3,4} = -1/2 [e_1 + e_2 \pm ((e_1 - e_2)^2 + 4\varkappa_1\varkappa_2)^{1/2}]$
$(e_1 = \varkappa_1 - \beta_1,\ e_2 = \varkappa_2 - \beta_2)$

Асимптотическое разложение функции оператора q^* с ядром (1.3) осуществляется аналогично.

Пример 3. Пусть $\varphi(q^*)f(t) = q^{*\omega}\cdot 1$, $\omega = 1, 2, \ldots, q(t) = \varkappa P_\alpha(\lambda, t)$, $\varkappa > 0$, $\lambda < 0$. Тогда

$$\varphi(Q(p)) = \varkappa^\omega z^{-\omega}, \quad z = (p - \lambda)^r, \quad \Phi(z) = \Phi(0) = \varkappa^\omega, \quad \nu = \omega$$

$$F(p) = \frac{1}{p} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \lambda^{-j-1} (p - \lambda)^j + (-1)^{m+1} p^{-1} \lambda^{-m-1} (p - \lambda)^{m+1}$$

Таким образом, в соответствии с представлениями (2.4), (2.6), (2.7), (2.14) имеем $n = 0$, $\rho_n = 0$, $\mu = 0$, $A = |\lambda|^{-m-2}$, $M_0 = \varkappa^\omega$, $M_{n+1} = 0$ и из формул (2.9), (2.14) следует

$$\varkappa^\omega P_\alpha^{*\omega}(\lambda)\cdot 1 = \varkappa^\omega e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \lambda^{-j-1} T_1(t; j - r\omega) + \tag{3.5}$$
$$+ \frac{\varkappa^\omega}{(-\lambda)^{r\omega}} + r_{mn}(t)$$
$$|r_{mn}(t)| \leqslant \varkappa^\omega |\lambda|^{-m-2} e^{\lambda t} T_2(t;\ m - r\omega + 2) / \pi, \quad m - r\omega + 2 > 0$$

Если $r\omega$ — целое число, то вместо точки разветвления функция

$$\varkappa^\omega / [p(p - \lambda)^{r\omega}] = L\{\varkappa^\omega P_\alpha^{*\omega}(\lambda)\cdot 1\}$$

при $p = \lambda$ имеет полюс, что упрощает равенство (3.5), так как в этом случае $r_{mn}(t) = 0$ и при $j \geqslant r\omega$ имеем $T_1(t;\ j - r\omega) = 0$.

4. При помощи (2.12) построим аналитическое выражение, приближающее величину $r_{mn}(t)$. Аппроксимируем функцию $V(x)$, используя комбинации экспонент и степенных функций. Ввиду быстрого затухания множителя e^{-xt} достаточно добиться хорошего приближения $V(x)$ на начальном участке интервала интегрирования, обеспечивая при больших значениях x соответствие лишь по характеру поведения.

Пусть

$$V(x) \approx \sum_j a_j x^{\delta_j} e^{\lambda_j x}, \quad \delta_j > -1, \quad \lambda_j \leqslant 0$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-xt} V(x)\, dx = \sum_j a_j \frac{\Gamma(\delta_j + 1)}{(t - \lambda)^{\delta_j + 1}} + \int_0^\infty e^{-xt} \left[V(x) - \sum_j a_j x^{\delta_j} e^{\lambda_j x}\right] dx$$

Последний интеграл может служить для оценки погрешности приближения.

В качестве иллюстрации рассмотрим свертку $Э_\alpha^*(\beta)\cdot 1$, преобразование Лапласа которой $(p^r-\beta)^{-1}p^{-1}$ при $0<r<1$, $\beta<0$, $|\arg p|\leqslant\pi$ имеет единственную особенность — точку разветвления $p=0$. Так как $\lambda=0$ и $F(p)=p^{-1}$, то в разложении (2.6) $b_0=1$, $m=0$, $\mu=-1$, $\gamma_m=0$. Здесь $\Phi(z)=(z-\beta)^{-1}$, $\nu=0$, и для выполнения условий (2.11) достаточно положить $n=0$, что приводит к величине $\rho_n=\beta^{-1}p^r(p^r-\beta)^{-1}$. Согласно (2.9), (2.12) и (2.13), получаем [7]

$$Э_\alpha^*(\beta)\cdot 1=-\frac{1}{\beta}+\frac{\sin\pi r}{\pi\beta}\int_0^\infty e^{-x|\beta|^{1/r}t}\frac{x^{r-1}dx}{x^{2r}+2x^r\cos\pi r+1}\tag{4.1}$$

Пусть $r=0.3$ $(\alpha=-0.7)$. На интервале $[0, 4]$ затухающую функцию $x^{r-1}(x^{2r}+2x^r\cos\pi r+1)^{-1}$ будем интерполировать выражением

$$x^{r-1}e^{-0.3x}(1-1.18x^r+0.587x^{2r}+0.02x^{3r})$$

Из (4.1) следует

$$Э_{-0.7}^*(\beta)\cdot 1\approx-\beta^{-1}+(\pi\beta)^{-1}\sin\pi r\sum_{j=1}^{4}A_j\Gamma(jr)\,y^j\tag{4.2}$$

$$A_1=1,\quad A_2=-1.18,\quad A_3=0.587,\quad A_4=0.02,\quad y=(\tau+0.3)^{-r},\quad \tau=|\beta|^{1/r}t$$

Сравнение значений, вычисленных по формуле (4.2), с табличными [8] показывает, что при $\tau=0.1$ погрешность составляет около 5%, при $\tau=0.2$ она не превосходит 1.5%, а при $\tau\geqslant 0.3$ приближенные и табличные значения практически совпадают. Отметим, что асимптотическое разложение $Э_\alpha^*(\beta)\cdot 1$ [8] эффективно лишь при $\tau\gg 1$.

Поступила 28 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
2. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
3. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
5. *Долинина Н. Н.* О функциях специальных операторов теории упругонаследственных сред. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 1.
6. *Синайский Е. С.* Об асимптотическом представлении оператора для описания поведения упругонаследственных сред, воздействующего на степенную функцию. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
7. *Листовничий В. Ф., Шермергор Т. Д.* Ползучесть упруговязких сред с ядром типа вырожденной гипергеометрической функции. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
8. *Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н.* Таблицы дробноэкспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М., «Наука», 1969.