

## НЕЛИНЕЙНОЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ СРЕДЫ И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

А. Е. Осокин, Ю. В. Суворова

(Москва)

Дается обоснование модели наследственной среды [1], основанной на уравнении Ю. Н. Работнова. Предлагается новая методика определения параметров уравнения, которая дает возможность обрабатывать экспериментальные данные, полученные при разных законах нагружения. Общий вид рассматриваемых определяющих уравнений таков:

$$(0.1) \quad \varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t F(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau$$

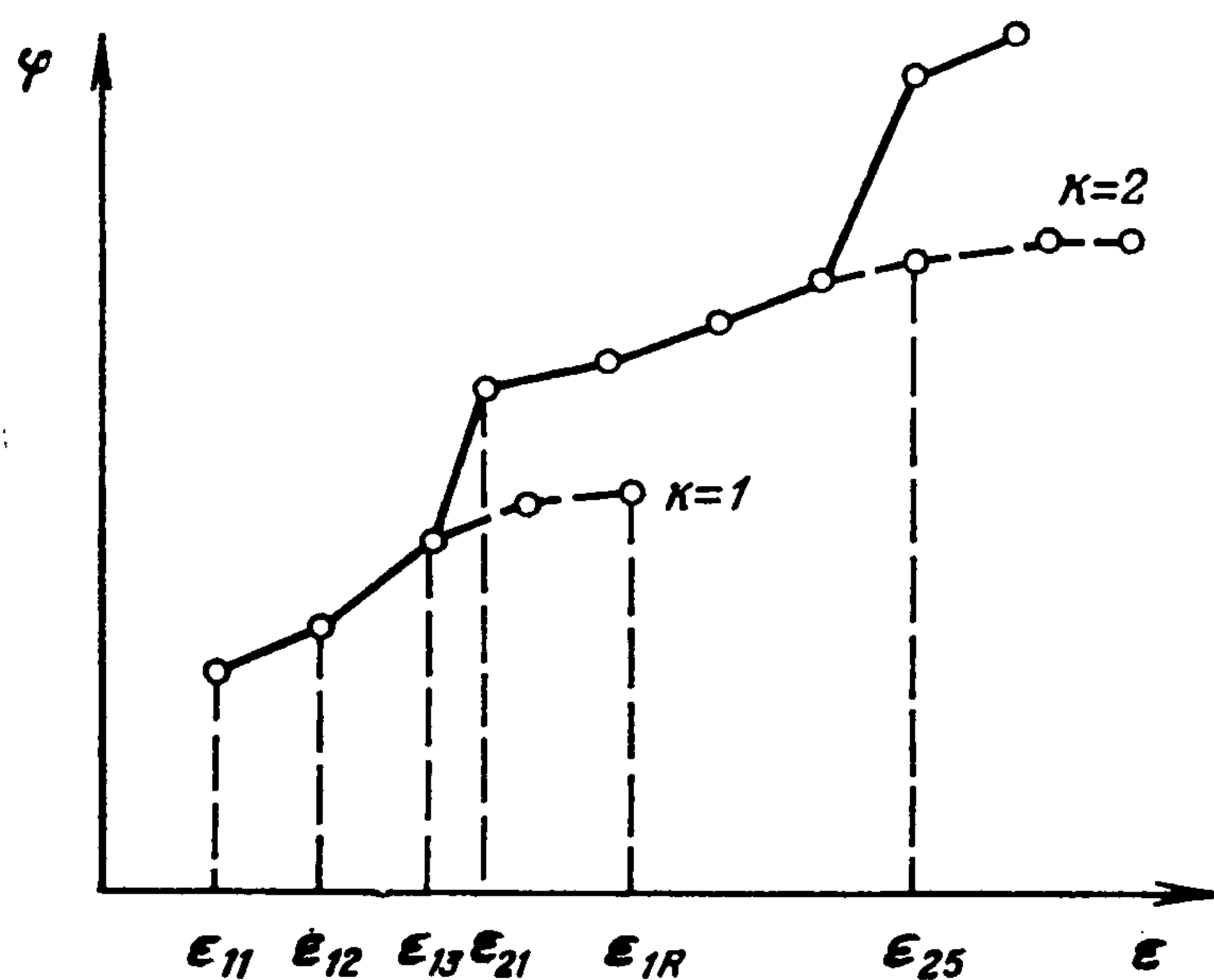
Здесь  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация,  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$  — уравнение кривой мгновенного деформирования,  $F(t-\tau)$  — ядро интегрального уравнения, определяющее наследственные свойства материала.

Ранее [2] была разработана методика определения параметров линейного уравнения наследственного типа с дробно-экспоненциальным ядром Ю. Н. Работнова по кривым ползучести, т. е. рассмотрен частный случай уравнения (0.1) при  $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$ . Эта методика может быть использована только для линейных уравнений и экспериментов при постоянном напряжении, когда величина  $\sigma(\tau)$ , стоящая под знаком интеграла, не меняется во времени. В этом случае в расчетах могут эффективно использоваться таблицы дробно-экспоненциальных функций Ю. Н. Работнова [3, 4]. При определении параметров нелинейной модели нельзя пользоваться методами интегральных преобразований, поэтому в [5] были использованы значения параметров ядра, полученные по линейным участкам изохронных кривых ползучести. Мгновенная кривая строилась уже по известным параметрам.

Предлагаемая ниже методика определения параметров не требует применения интегральных преобразований и пригодна поэтому для любых уравнений наследственного типа при произвольном законе нагружения.

**1. Методика расчета на ЭВМ параметров определяющего уравнения.** Предположим, что проведено  $K$  экспериментов с квазистатическим нагружением стержня из исследуемого материала в заданном режиме нагружения  $\sigma = \sigma(t)$ . Будем идентифицировать эти эксперименты индексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, K$ ); режим деформирования в каждом эксперименте определяется своей зависимостью  $\sigma_k(t)$ , причем все эксперименты проведены так, что  $d\sigma_k(t)/dt \geq 0$ , т. е. разгрузка не происходит.

Обозначим значения деформаций в  $k$ -м эксперименте в момент времени  $t_r$  через  $\varepsilon_{kr}$ , а моменты времени, в которые измерены деформации, будем считать одними и теми же во всех экспериментах. Метод, который будет построен ниже, может быть без каких-либо существенных изменений



Фиг. 1

применен и в случае, когда в каждом из экспериментов деформации получены в свои, произвольным образом выбранные моменты времени.

Пусть экспериментальные данные сведены в  $K$  таблиц, определяющих значения деформаций в моменты времени  $t_r$  ( $1 \leq r \leq R$ ). Предположим, что ядро  $F(t)$  — непрерывная функция времени, определяемая набором двух  $(f, \alpha)$  или трех  $(f, \alpha, \beta)$  параметров (использование более трех параметров нецелесообразно), который будем обозначать одной буквой  $p$ ; при этом  $p = p_*$  означает, что  $f = f_*$ ,  $\alpha = \alpha_*$  или  $f = f_*$ ,  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \beta_*$ .

Очевидно, при заданном  $p$  можно найти значения  $\varphi(\varepsilon)$  в точках  $\varepsilon_{kr}$

$$(1.1) \quad \varphi_{kr} = \varphi[\varepsilon_{kr}(t_r)] = \sigma_k(t_r) + \int_0^{t_r} F(\tau, p) \sigma_k(t_r - \tau) d\tau$$

Здесь использовано тождество

$$\int_0^t F(t - \tau) \sigma_k(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) \sigma_k(t - \tau) d\tau$$

которое выражает коммутативность свертки функций  $F(t)$  и  $\sigma(t)$ . Значения  $\varphi(\varepsilon)$  в точках  $\varepsilon_{kr}$  обозначены в (1.1)  $\varphi_{kr}$  аналогично деформациям. Введем непрерывные функции  $\varphi_k(\varepsilon)$ , которые получаются линейной интерполяцией по значениям  $\varphi_{kr}$

$$\varphi_k(\varepsilon) = [\varphi_{kr}(\varepsilon_{k(r+1)} - \varepsilon) + \varphi_{k(r+1)}(\varepsilon - \varepsilon_{kr})] / [\varepsilon_{k(r+1)} - \varepsilon_{kr}]$$

Тогда функция  $\varphi(\varepsilon)$ , полученная непрерывной «стыковкой» функций  $\varphi_k(\varepsilon)$  имеет вид

$$\varphi(\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_k(\varepsilon), & \varepsilon_{k1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{kR}, \quad 1 \leq k \leq K \\ \frac{\varphi_{kR}(\varepsilon_{(k+1)r_m} - \varepsilon) + \varphi_{(k+1)r_m}(\varepsilon - \varepsilon_{kR})}{\varepsilon_{(k+1)r_m} - \varepsilon_{kR}}, & \varepsilon_{kR} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{(k+1)r_m} \end{cases}$$

где  $r_m$  — наибольший из индексов  $r$ , таких, что  $\varepsilon_{kR} \leq \varepsilon_{(k+1)r}$ . Если эксперименты проведены так, что отрезки  $\varepsilon_{k1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{kR}$  не пересекаются, то для всех  $k$  получим  $r_m = 1$ . Построение  $\varphi(\varepsilon)$  по  $\varphi_k(\varepsilon)$  показано на фиг. 1.

Для определения  $\varphi(\varepsilon)$  и  $p$ , наилучшим образом описывающих исследуемый материал, будем искать набор параметров, определяющих ядро, при котором участки мгновенной диаграммы деформация—напряжение, соответствующие разным режимам деформирования, образуют единую гладкую кривую. Применение для такого поиска численных методов, допускающих реализацию на ЭВМ, требует прежде всего количественной формулировки условия оптимального выбора  $p$ . Чтобы получить это условие и свести задачу определения параметров ядра к формальной задаче поиска минимума функции нескольких переменных (роль этих переменных будут играть параметры, определяющие вид ядра), введем понятие определяющего функционала обратной задачи (задачу определения параметров ядра будем называть обратной задачей).

Предположим, что имеется набор зависимостей  $\varepsilon_k(t)$ ,  $\sigma_k(t)$  материала, точно описываемого определяющим уравнением

$$(1.2) \quad \varphi_*(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t F(p_*, \tau) \sigma(t - \tau) d\tau$$

и рассмотрим множество  $\Phi$  кривых  $\varphi(\varepsilon)$ , полученных рассмотренным выше способом, когда  $p$  принимает значения из некоторого множества  $P$ . Между  $\Phi$  и  $P$  может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, поэтому любой функционал, определенный на  $\Phi$ , является вместе с тем функцией аргумента  $p$ , определенной на  $P$ . Так что, определяя на  $\Phi$  какой-либо функционал, можно поставить в соответствие этому функционалу функцию аргумента  $p$ , область определения которой — множество  $P$ . Эту функцию будем называть функцией, соответствующей функционалу. Очевидно, что она имеет два или три аргумента, которыми служат параметры, образующие набор  $p$ .

Будем называть функционал непрерывным, если ему соответствует непрерывная функция. Назовем непрерывный функционал  $\Delta(\varphi)$ , область определения которого — множество  $\Phi$ , определяющим, если  $\Delta(\varphi) \geq 0$  и  $\Delta[\varphi(p)] = 0$  тогда и только тогда, когда  $p = p_*$ .

Будем говорить, что однопараметрическое семейство функционалов,  $\Delta_N(\varphi)$ , определенных на  $\Phi$ , аппроксимирует определяющий функционал  $\Delta(\varphi)$  при  $N \rightarrow \infty$ , если

$$\lim [\Delta_N(\varphi) - \Delta(\varphi)] = 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \varphi \in \Phi$$

Из приведенных определений ясен смысл введения определяющих функционалов. Действительно, если хотя бы один такой функционал построен, достаточно найти такое  $p$ , что  $\Delta[\varphi(p)] = 0$ , и обратная задача решена. Процесс поиска корня этого уравнения эквивалентен поиску минимума функции, соответствующей данному функционалу, т. е. функции двух или трех переменных. Эта задача хорошо изучена, и для ее решения разработаны разные методы (случайного поиска, формального поиска, метод градиентов и т. д.), реализованные в стандартных программах.

Прежде чем приступить к построению определяющих функционалов, уточним какой экспериментальной информацией необходимо располагать для решения обратной задачи. Будем говорить, что экспериментальные данные достаточны для определения мгновенной диаграммы деформация—напряжение и параметров ядра в рамках некоторого класса функций и множества наборов параметров, если эти множества содержат только одну мгновенную диаграмму и только один набор параметров, такие, что уравнение (1.2) выполняется тождественно для всех значений деформаций и напряжений, полученных при эксперименте. Для каждого конкретного набора экспериментальных данных и заданных мгновенных диаграмм и ядер наследственности это условие необходимо проверять.

Построим определяющий функционал в случае, когда искомая мгновенная кривая  $\varphi_*(\varepsilon)$  — многочлен степени  $N$ , а число  $R$  точек, полученных на каждом нагружении, удовлетворяет неравенству  $R \geq N + 1$ . Для этого построим интерполяционный многочлен Лагранжа степени  $N$ , который обозначим  $L_{kN}(\varepsilon, p)$ , причем  $\varepsilon_{11} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{kR}$ , и рассмотрим следующие функционалы:

$$(1.3) \quad \Delta_{qN}(p) = \sum_{Q=1}^q \sum_{k=1}^{K-1} \max_{(\varepsilon)} \left| \frac{d^Q}{d\varepsilon^Q} [L_{kN}(\varepsilon, p) - L_{(k+1)N}(\varepsilon, p)] \right|$$

Из (1.3) следует, что  $\Delta_{qN}(p_*) = 0$ , и первое условие, налагаемое на определяющий функционал, выполнено. Покажем, что из  $\Delta_{qN}(p) = 0$  следует  $p = p_*$ , если экспериментальные данные достаточны для определения ядра и мгновенной диаграммы деформация—напряжение. Действительно, из  $\Delta_{qN}(p) = 0$  следует, что  $L_{kN}(\varepsilon, p)$  — многочлен степени  $N$  и  $p$  — набор параметров, определяющих ядро, такие, что уравнение (1.2) при всех полученных при экспериментах деформациях и напряжениях выполняется тождественно. Следовательно,  $p = p_*$ . Итак, доказана следующая теорема: если материал удовлетворяет определяющему уравнению (1.2), а  $\varphi_*(\varepsilon)$  — многочлен степени  $N$ , то каждый из функционалов, заданных соотношением (1.3), является определяющим функционалом обратной задачи.

Известно, что класс функций, допускающих приближение на конечном интервале многочленами, достаточно широк. Мгновенная диаграмма деформация—напряжение по крайней мере непрерывна и, следовательно, по теореме Вейерштрасса, может быть сколь угодно точно приближена многочленом степени  $N$ .

Обозначим через  $\Delta_N(p)$  какой-либо из функционалов, определенных соотношением (1.3). Тогда в общем случае непрерывной мгновенной диаграммы функционалы вида  $\Delta_N(p)$  позволяют построить семейство функционалов, аппроксимирующих при  $N \rightarrow \infty$  определяющий функционал. Если такое однопараметрическое семейство функционалов обозначить  $\Delta_{*N}(p)$ , то определяющий функционал в общем случае непрерывной мгновенной диаграммы можно представить в виде  $\Delta(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_{*N}(p)$ .

Для первоначальной проверки методики на ЭВМ вычислялись параметры известного определяющего уравнения, результаты счета сравнивали с точными значениями параметров и оценивали погрешность метода при различных определяющих функционалах. Результаты решения этих тестовых задач оказались наилучшими при функционале  $\Delta_{1N}$ , который и использовали при вычислениях, результаты которых приведены ниже. Для поиска минимума этого функционала использовали метод формального поиска.

2. Проверка методики в применении к уравнению Ю. Н. Работнова. Чтобы выяснить возможности применения методики на конкретных примерах, она сначала была использована для обработки тех же данных о ползучести стеклопластиков, которые положены в основу построения нелинейно-наследственной модели [5], и было выбрано то же определяющее уравнение

$$(2.1) \quad \varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + f \int_0^t \mathcal{D}_{-\alpha}(\beta, t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{D}_{-\alpha}(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]}$$

Здесь  $\mathcal{D}_{-\alpha}(\beta, t - \tau)$  — функция Ю. Н. Работнова, являющаяся ядром интегрального уравнения и определяющая наследственные свойства материала. Уравнение (2.1) содержит три параметра:  $f$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , а также функцию  $\varphi(\varepsilon)$ .

При вычислении  $\varphi_{kr}$  по формуле (1.1) в случае ядра, имеющего вид дробно-экспоненциальной функции, необходимо вычислять интегралы

$$(2.2) \quad I(t) = \int_0^t \mathcal{D}_{-\alpha}(\beta, \tau) d\tau = \frac{t^{-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)](n+1)}$$

При  $x = \beta t^{(1-\alpha)} > 4$  удобно вычислять  $I(t)$ , исходя из асимптотического представления

$$I(t) = -\frac{1}{\beta} - t^{(1-\alpha)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta^{-n} t^{-n(1-\alpha)}}{\Gamma[1 + (1-\alpha)(1-n)]}$$

При  $x < 1$  ряд (2.2) быстро сходится, и вычисление  $I(t)$  также не вызывает затруднений. Наибольшие трудности возникают при  $1 < x < 4$ , так как скорость сходимости ряда (2.2) резко снижается. Рассмотрим один вычислительный прием, позволяющий несколько сократить необходимый объем вычислений. Введем функцию  $J(\eta)$ , связанную с рядом (2.2) соотношением

$$(2.3) \quad J(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n, \quad a_n = \frac{t^{-\alpha} x^n}{(1-\alpha)(n+1)\Gamma[(1+n)(1-\alpha)]}$$

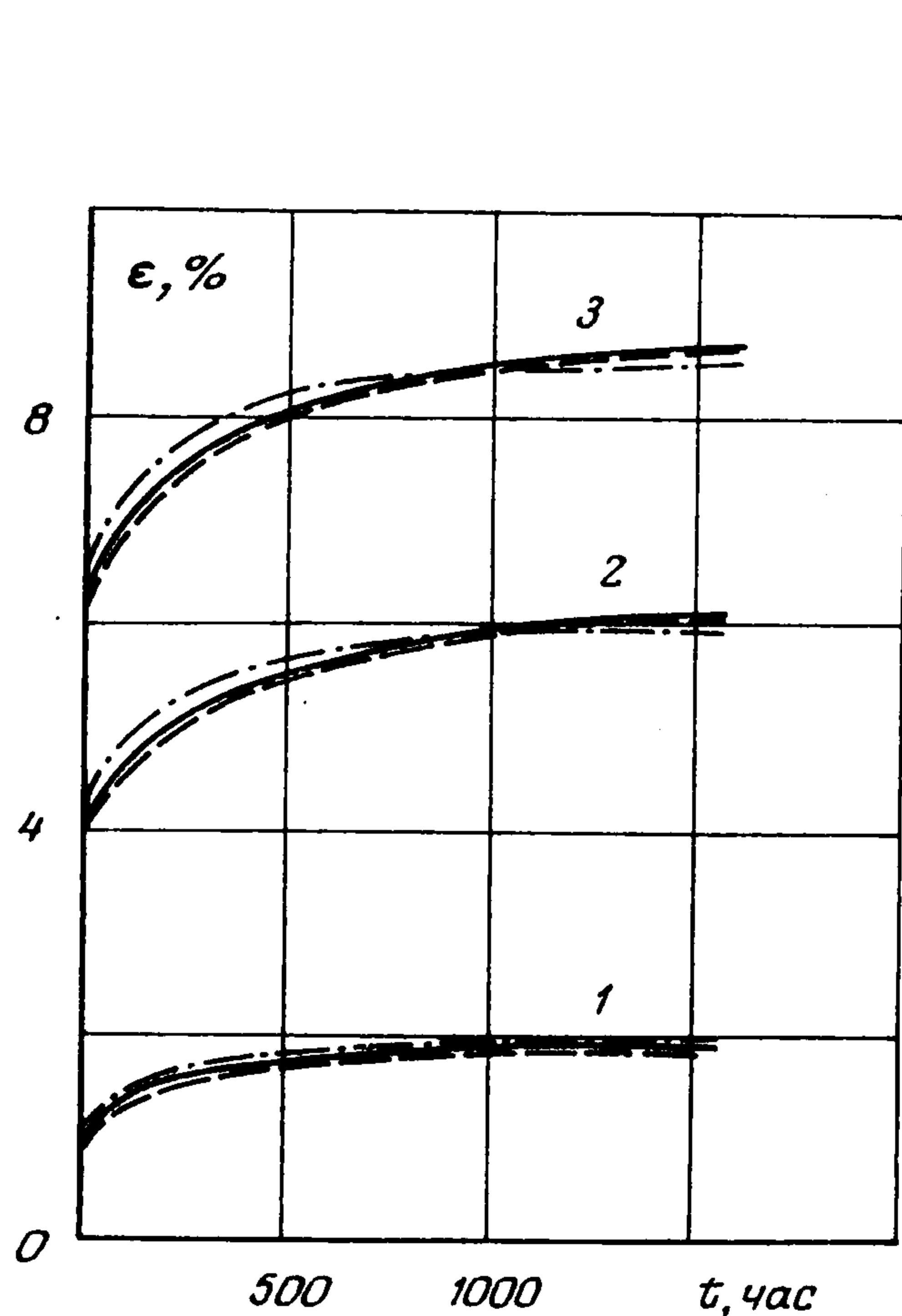
$$\frac{dJ(\eta)}{d\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \eta^{(n-1)}$$

Так как ряды (2.3) сходятся равномерно (оба ряда мажорируются, первый — рядом (2.2), а второй — рядом, определяющим функцию  $\mathcal{E}_{-\alpha}(\beta, t)$ ), функция  $J(\eta)$  — дифференцируемая функция аргумента  $\eta$  и, следовательно, допускает представление

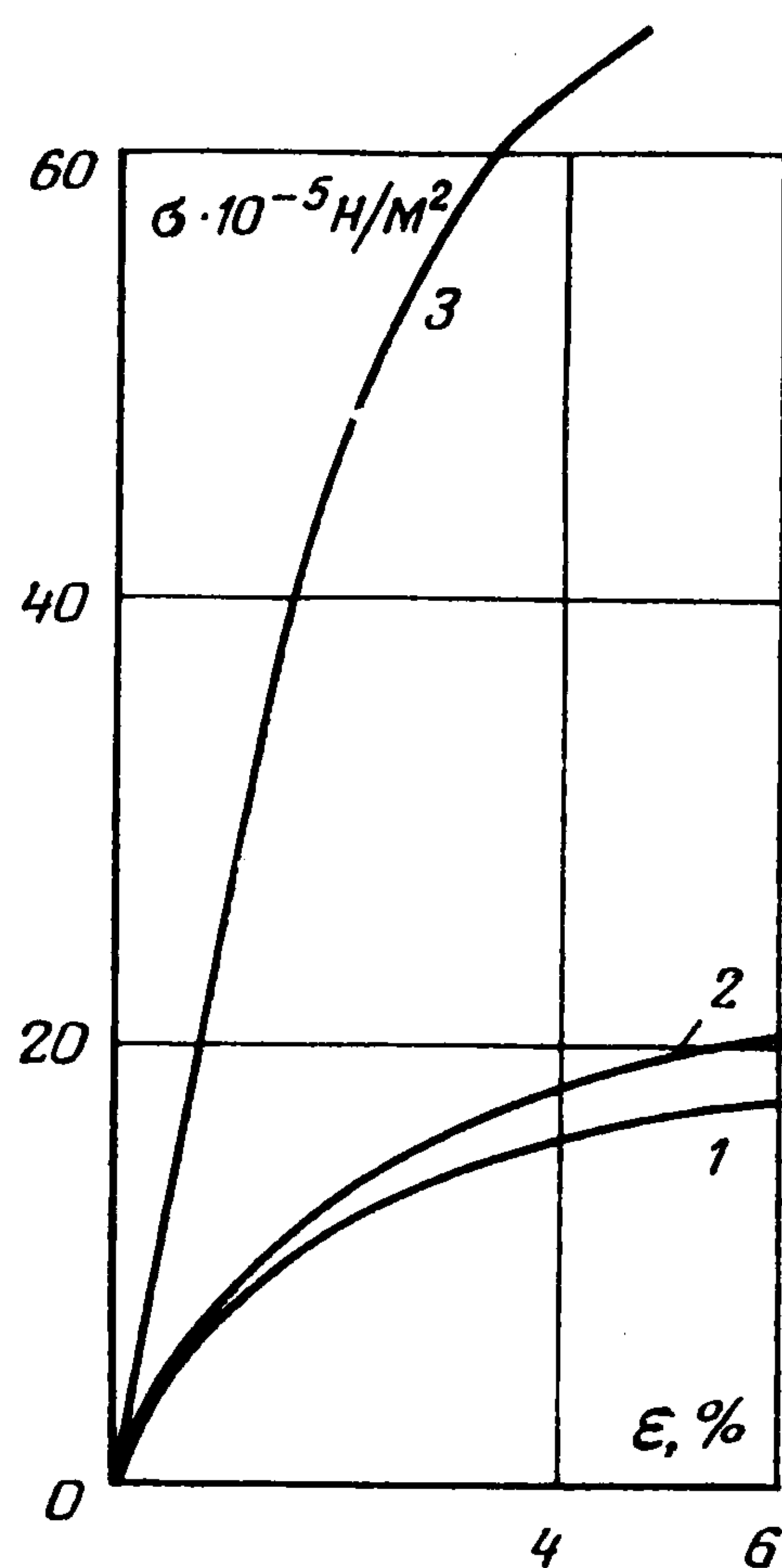
$$I(t) = J(1) = J(1 - \delta) + \left[ \frac{dJ(1 - \delta)}{d\eta} \right] \delta + O(\delta^2), \quad \delta > 0$$

Очевидно, что ряды (2.3) сходятся существенно лучше, чем (2.2). Расчеты на ЭВМ показали, что при  $\delta = 0.1$  вычисление по формулам (2.3) дает ошибку не более 3%, если в (2.3) оставить 100 слагаемых.

На фиг. 2 приведены экспериментальные кривые ползучести (сплошные кривые), положенные в основу расчетов [5], в результате которых были получены следующие значения параметров:  $\alpha = 0.885$ ,  $\beta = 0.112 \text{ мин}^{-(1-\alpha)}$ ,  $f = 0.116 \text{ мин}^{-(1-\alpha)}$ . Кривым



Фиг. 2



Фиг. 3

1, 2, 3 соответствуют значения напряжения, равные  $8.12 \cdot 10^5$ ,  $12.18 \cdot 10^5$ ,  $14.21 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ . Полученная кривая мгновенного деформирования приведена на фиг. 3 (кривая 1); кривая 2 — диаграмма, полученная в работе [5], которой соответствуют следующие значения параметров:  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.32 \text{ мин}^{-(1-\alpha)}$ ,  $f = 0.26 \text{ мин}^{-(1-\alpha)}$ .

Затем полученные результаты использовались для построения кривых ползучести. На фиг. 2 показаны штриховыми линиями результаты расчетов данной работы, а штрихпунктирными линиями — результаты работы [5]. Как видно, разработанная методика позволяет точнее рассчитать параметры определяющего уравнения материала, так что вычисленные кривые ползучести почти полностью совпадают с экспериментальными.

3. Обоснование возможности использования определяющего уравнения с ядром Абеля. Как уже говорилось выше, определяющее уравнение (0.1) с ядром Ю. Н. Работнова можно использовать достаточно просто лишь при расчетах ползучести с пос-

тоянным напряжением. Для того чтобы нелинейное наследственное определяющее уравнение можно было эффективно применять и при других режимах, было предложено [1] упростить ядро интегрального уравнения и взять его в виде ядра Абеля  $F(t) = f t^{-\alpha}$ , которое характеризуется двумя параметрами. Обработка большого количества экспериментальных данных подтвердила возможность его применения, простота же в данном случае очевидна. Уравнение (0.1) может теперь быть записано в виде

$$(3.1) \quad \varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + f(1-\alpha) \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \sigma(\tau) d\tau$$

Обычно значение  $\alpha$  берется в интервале  $0 < \alpha < 1$ , так как при  $\alpha = 0$  ядро теряет особенность и становится регулярным, а при  $\alpha = 1$  особенность уже не интегрируема. Введение множителя  $1 - \alpha$  перед знаком интеграла значительно расширяет возможности применения уравнения (3.1): если положить  $\alpha = 1$ , то интегральный член исчезает. Это позволяет в рамках одного подхода объединить две основные существующие в настоящее время модели. Первая из них наиболее простая — это обычная деформационная теория (в динамике — схема Кармана — Тейлора — Рахматулина, предполагающая существование единой динамической диаграммы деформирования, не зависящей от скорости деформирования). Полагая в (3.1)  $\alpha = 1$ , приходим к определяющему уравнению  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ , при этом диаграмма деформирования уже не зависит ни от скорости нагружения, ни от предыстории процесса. Если же положить в (3.1)  $\alpha = 0$ , то после дифференцирования по времени получим

$$(3.2) \quad \varphi' \varepsilon = \sigma + f\sigma$$

Если  $\varphi' = E = \text{const}$ , то получаем модель вязкоупругого тела Максвелла. На зависимости типа (3.2) основана вторая основная схема деформирования — модель Мальверна — Соколовского. Таким образом, уравнение (3.1) в крайних случаях  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  соответствует двум, как казалось раньше, взаимоисключающим схемам деформирования.

Уравнение (3.1) было ранее проверено при обработке большого числа экспериментов при различных режимах нагружения как на металлах, так и на полимерах и композитах [1, 6-8]. Для того чтобы сопоставить его с уравнением (2.1) и посмотреть, не приводит ли уменьшение числа параметров ядра (дробно-экспоненциальное ядро содержит три параметра, а ядро Абеля — только два) к увеличению ошибок в расчетах, уравнение (3.1) было применено к тем же данным о ползучести стеклотекстолитов, о которых говорилось выше [5].

При определении параметров ядра была использована методика, изложенная выше в п. 1, при этом оказалось, что для ядра Абеля  $\alpha = 0.9593$ ,  $f = 3.27 \text{ мин}^{-(1-\alpha)}$ . Соответствующая кривая мгновенного деформирования приведена на фиг. 3 (кривая 3). Видно, что кривые мгновенного деформирования, соответствующие уравнениям (2.1) и (3.1), сильно различаются.

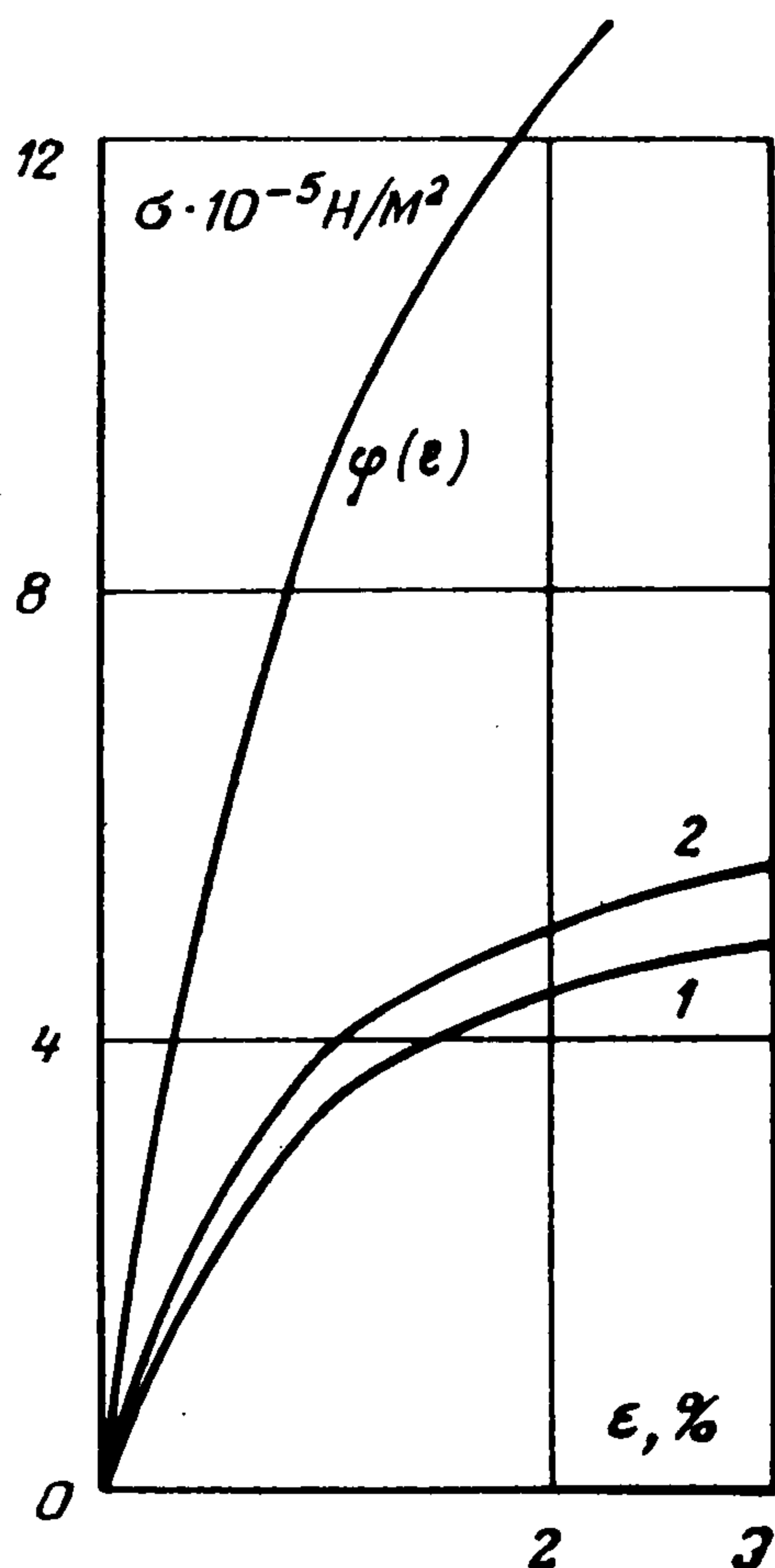
Далее полученные параметры и  $\varphi(\varepsilon)$  использовались для построения кривых ползучести (см. фиг. 2). Соответствие расчетов с экспериментами было настолько хорошим, что в масштабе чертежа не удалось различить полученных кривых.

Таким образом, оказалось, что более простое уравнение дает хорошие результаты и может быть рекомендовано в качестве определяющего уравнения для нелинейных наследственных сред.

Большим преимуществом (3.1) является то, что оно может быть использовано при различных режимах нагружения. Поэтому процедура определения параметров, связанная с постановкой целенаправленного эксперимента, существенно упрощается: достаточно иметь две кривые деформирования, полученные с разной скоростью нагружения. На фиг. 4 приведены диаграммы деформирования органоволокнита, полученные при скоростях нагружения  $\sigma' = 10^2 \text{ н/м}^2\text{с}$  и  $\sigma' = 10^5 \text{ н/м}^2\text{с}$ . В случае нагружения в режиме  $\sigma' = \text{const}$  уравнение (3.1) приводится к простому виду

$$(3.3) \quad \varphi(\varepsilon) = \sigma' t + f\sigma' t^{(2-\alpha)} (2-\alpha)^{-1}$$

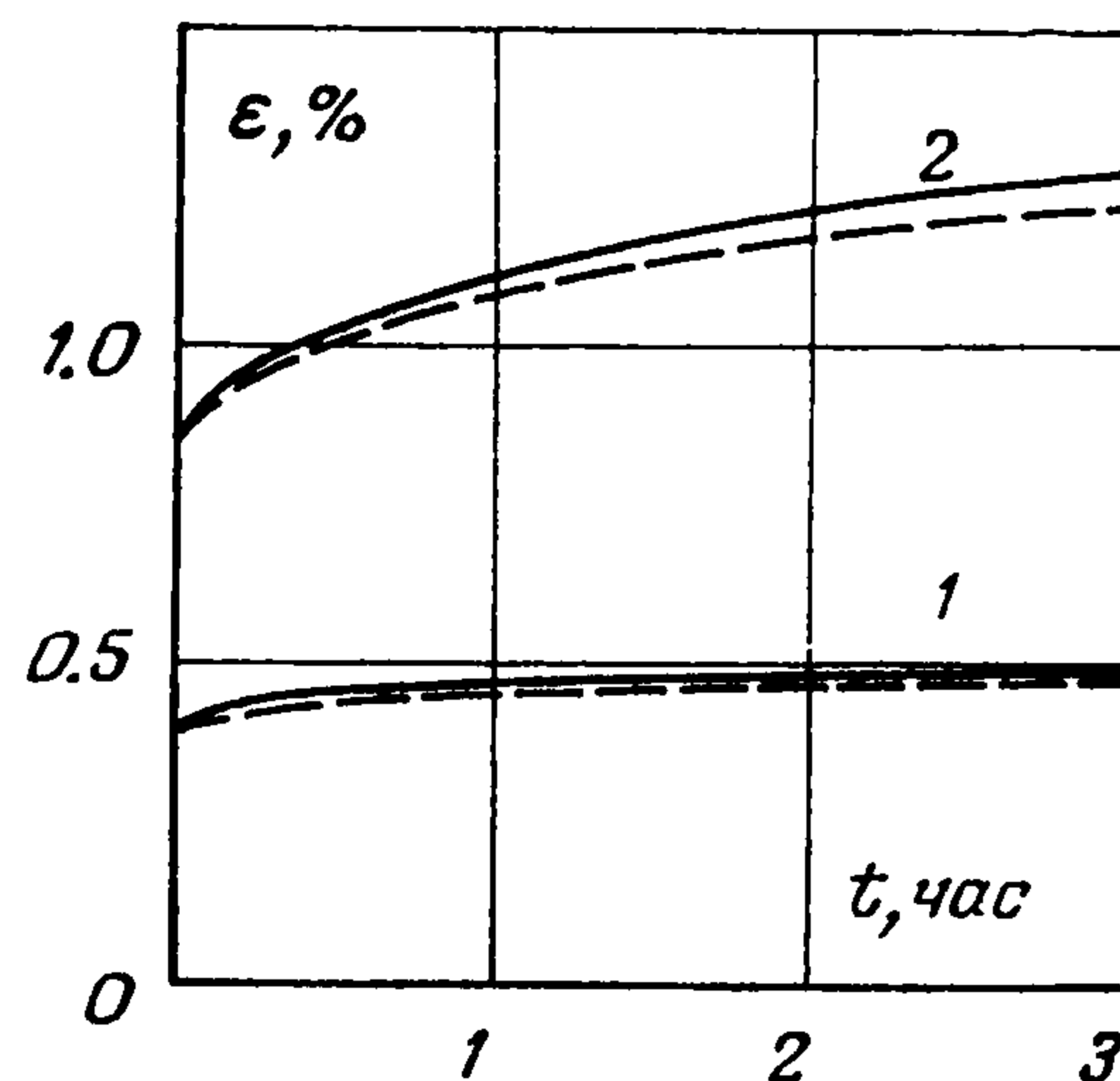
Приведенные на фиг. 4 диаграммы использованы для определения параметров по методике, изложенной в п. 1. Получены следующие значения:  $\alpha = 0.9795$ ,  $f = 1.507 \text{ час}^{-(1-\alpha)}$ . На фиг. 4 приведена также мгновенная диаграмма деформирования  $\sigma = \varphi(\epsilon)$ . Затем найденные параметры использовались для предсказания поведения материала при ползучести, т. е. при нагружении в режиме  $\sigma = \text{const}$ . На фиг. 5 при-



Фиг. 4

ведены результаты расчетов (штриховые линии) и эксперимент (сплошные линии) при  $\sigma = 2 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$  (кривые 1) и  $\sigma = 3.5 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$  (кривые 2).

Вообще говоря, для определения параметров уравнения (3.1) не обязательно проводить эксперимент в каком-то определенном режиме нагружения. В работе [1] выбраны режимы  $\sigma = \text{const}$  и  $\sigma' = \text{const}$ , потому что в этом случае интеграл легко берется, уравнение



Фиг. 5

(3.1) принимает очень простой вид (3.3), и обработка экспериментов может быть проведена без применения ЭВМ. Однако разработанная в п. 1 методика решения обратных задач позволяет обрабатывать на ЭВМ данные экспериментов при произвольных режимах нагружения.

Некоторая модификация уравнения (3.1), связанная с выделением упругой и пластически-наследственной составляющих деформации, дает возможность использовать его для описания не только полимеров и композитов, но и металлов [6-8].

Поступила 14 XI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Суворова Ю. В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред. Механика полимеров, 1977, № 6.
2. Звонов Е. М., Малинин Н. И., Паперник Л. Х., Цейтлин Б. М. Определение характеристик ползучести линейных упругонаследственных материалов с использованием ЭЦВМ. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.
3. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интегралов от нее. М., «Наука», 1969.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
5. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. Механика полимеров, 1971, № 1.
6. Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
7. Мельшанов А. Ф., Суворова Ю. В., Хазанов С. Ю. Экспериментальная проверка определяющего уравнения для металлов при нагружении и разгрузке. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6.
8. Суворова Ю. В. Учет температуры в наследственной теории упругопластических сред. Проблемы прочности, 1977, № 2.