Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.374

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ С РАСТУЩИМИ РАЗРЕЗАМИ И ПОЛОСТЯМИ

Л. П. Трапезников, Б. А. Шойхет

(Ленинград)

Рассматривается задача теории ползучести для стареющих однородных линейно-деформированных тел с растущими разрезами и полостями. На подвижных участках контура заданы либо напряжения, либо перемещения. Коэффициент Пуассона полагается постоянным. Получены явные представления для напряжений, деформаций и перемещений задачи теории ползучести через напряжения, деформации и перемещения упругомгновенных задач. Из этих представлений, в частности, следует, что для рассматриваемой задачи в общем случае принцип Вольтерра несправедлив. Полученные результаты обобщают известные теоремы Н. Х. Арутюняна, справедливые для области с неподвижной границей [1–4]. Основные результаты статьи без распространения на случай развивающихся полостей анонсированы в [5].

1. Пусть однородное изотропное линейно-деформируемое тело, обладающее свойствами старения и ползучести, занимает трехмерную область $\Omega(\tau)$, внутри которой заданы объемные силы $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) = \{f_i(\mathbf{x}, \tau)\}$ и тензор вынужденных деформаций $\varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{x}, \tau)$. Коэффициент Пуассона ν полагается постоянным.

Граница $S(\tau)$ области $\Omega(\tau)$ состоит из четырех неподвижных участков S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, квазистатически растущего разреза $\gamma(\tau)$ с начальным положением $\gamma(t_0)$ и границы $S_\omega(\tau)$ квазистатически растущей полости $\omega(\tau)$ с начальным положением $\omega(t_1)$. Здесь $t_0 \geqslant \tau_0$, $t_1 \geqslant \tau_0$, τ_0 — момент начала приложения внешних воздействий, $\gamma(\tau_1) \subset \gamma(\tau_2)$, $\omega(\tau_1) \subset \omega(\tau_2)$, если $\tau_1 \leqslant \tau_2$. На S_1 задан вектор напряжений $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) = \{F_i(\mathbf{x}, \tau)\}$, на S_2 — вектор перемещений $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau) = \{U_i(\mathbf{x}, \tau)\}$, на S_3 — нормальные перемещения $U_n(\mathbf{x}, \tau)$ и вектор касательных напряжений $\mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau)$, на S_4 — нормальные напряжения $F_n(\mathbf{x}, \tau)$ и вектор тангенциальных перемещений $\mathbf{U}_\tau(\mathbf{x}, \tau)$.

Уравнения Коши, уравнения равновесия и граничные условия, записанные для момента времени τ, имеют вид

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = 2^{-1}(u_{i,j}(\mathbf{x}, \tau) + u_{j,i}(\mathbf{x}, \tau)), \quad \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, \tau) + f_i(\mathbf{x}, \tau) = 0 \\
& \mathbf{x} \in \Omega(\tau) \\
& \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in S_2 \\
& u_n(\mathbf{x}, \tau) = U_n(\mathbf{x}, \tau), \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in S_3 \\
& \sigma_n(\mathbf{x}, \tau) = F_n(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{U}_\tau(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in S_4
\end{aligned}
$$

здесь ε_{ij}, σ_{ij} — тензоры деформаций и напряжений; $\mathbf{u} = \{u_i\}$ — поле перемещений; $\mathbf{n} = \{n_i\}$ — внешняя нормаль к границе S; $\sigma_n = \{\sigma_{ij}n_j\}$ — вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$; u_n, σ_n — нормальные компоненты векторов перемещений и напряжений; $\mathbf{u}_\tau$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ — векторы тангенциальных перемещений и напряжений. Зависимость между тензорами деформаций и напряжений имеет вид

$$\begin{aligned}
(1.2)\qquad & \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},\tau) = (1+\nu)\left[(I+L)\left(\frac{\sigma_{ij}}{E}\right)\right] - \\
& -\nu\delta_{ij}\left[(I+L)\left(\frac{\sigma_{kk}}{E}\right)\right] + \varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\Omega(\tau) \\
& \sigma_{ij}(\mathbf{x},\tau) = \frac{E(\tau)}{1+\nu}\left\{[(I+N)(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^\circ)] + \right. \\
& \left. + \delta_{ij}\frac{\nu}{1-2\nu}[(I+N)(\varepsilon_{kk}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{kk})]\right\}, \quad \mathbf{x}\in\Omega(\tau) \\
& I\varphi = \varphi(\mathbf{x},\tau), \quad L\varphi = \int_{\tau_0}^{\tau}\varphi(\mathbf{x},\xi)P(\tau,\xi)\,d\xi, \\
& N\varphi = \int_{\tau_0}^{\tau}\varphi(\mathbf{x},\xi)R(\tau,\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

Здесь $E(\mathbf{x},\tau) \equiv E(\tau)$ — модуль упругомгновенных деформаций, $P(\tau,\xi)$ — ядро ползучести, $R(\tau,\xi)$ — ядро релаксации. Ядра $P(\tau,\xi)$ и $R(\tau,\xi)$ связаны между собой зависимостью

$$(1.3)\qquad R(t,\tau) + P(t,\tau) = -\int_{\tau}^{t} P(t,\xi)R(\xi,\tau)\,d\xi$$

Здесь рассматривается вариант, в котором на берегах $\gamma^\pm(\tau)$ разреза $\gamma(\tau)$ и на границе $S_\omega^1(\tau)$ полости $\omega(\tau)$ заданы напряжения. В этом случае уравнения (1.1), (1.2) дополняются краевыми условиями

$$\begin{aligned}
(1.4)\qquad & \sigma_n(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{F}^\pm(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\gamma^\pm(\tau) \\
& \sigma_n(\mathbf{x},\tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in S_\omega(\tau)
\end{aligned}$$

Решение задачи ползучести (1.1), (1.2), (1.4) обозначим через $u_i^*(\mathbf{x},\tau)$, $\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x},\tau)$, $\sigma_{ij}^*(\mathbf{x},\tau)$. Назовем задачей 1* задачу (1.1), (1.2), (1.4) при равных нулю деформативных воздействиях, т. е. при $\varepsilon_{ij}^\circ = 0$, $\mathbf{U} = 0$ на S_2, $U_n = 0$ на S_3, $\mathbf{U}_\tau = 0$ на S_4, и задачей 2* — задачу (1.1), (1.2), (1.4) при равных нулю внешних силах, т. е. при $f_i = 0$ в Ω, $\mathbf{F} = 0$ на S_1, $\mathbf{F}_\tau = 0$ на S_3, $F_n = 0$ на S_4, $\mathbf{F}^\pm = 0$ на $\gamma^\pm$, $\mathbf{F} = 0$ на S_ω^1; решения задач 1*, 2* обозначим через $u_i^{*(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{*(1)}$, $\sigma_{ij}^{*(1)}$,; $u_i^{*(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{*(2)}$, $\sigma_{ij}^{*(2)}$ соответственно. Очевидно

$$(1.5)\qquad u_i^* = u_i^{*(1)} + u_i^{*(2)}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^{*(1)} + \varepsilon_{ij}^{*(2)}, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{*(1)} + \sigma_{ij}^{*(2)}$$

Цель работы — выразить решения задач 1*, 2* через решения упругомгновенных задач, в которых $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},\tau)$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{x},\tau)$ связаны между собой законом мгновенной упругости

$$(1.6)\qquad \varepsilon_{ij}(\mathbf{x},\tau) = (1+\nu)\frac{\sigma_{ij}(\mathbf{x},\tau)}{E(\tau)} - \nu\delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}(\mathbf{x},\tau)}{E(\tau)} + \varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{x},\tau)$$

Обозначим через $u_i^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))$, $\sigma_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))$ решение упругомгновенной задачи 1, соответствующей задаче 1*. Оно должно удовлетворять уравнениям (1.1) и (1.6) при нулевых деформативных воздействиях, т. е. при $\varepsilon_{ij}^{\circ} = 0$ в Ω, $\mathrm{U} = 0$ на S_2, $U_n = 0$ на S_3, $\mathrm{U}_\tau = 0$ на S_4 и условиям (1.4) на подвижной части границы.

Обозначим через $u_i^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))$, $\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))$ решение упругомгновенной задачи 2, соответствующей задаче 2*. Оно должно удовлетворять уравнениям (1.1) и (1.6) при равных нулю внешних силах, т. е. при $f_i = 0$ в Ω, $\mathrm{F} = 0$ на S_1, $\mathrm{F}_\tau = 0$ на S_3, $F_n = 0$ на S_4, и условиям на подвижных участках границы

$$\sigma_n(\mathrm{x}, \tau) = 0, \quad \mathrm{x} \in \gamma^{\pm}(t), \quad \mathrm{x} \in S_\omega(t) \tag{1.7}$$

Теорема 1. Решение задачи 1* представимо в виде

$$\sigma_{ij}^{*(1)}(\mathrm{x}, t) = \sigma_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{ij}^{*(1)}(\mathrm{x}, t) = \varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + \int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau)) P(t, \tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

$$u_i^{*(1)}(\mathrm{x}, t) = u_i^{(1)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + \int_{\tau_0}^{t} u_i^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau)) P(t, \tau)\, d\tau \tag{1.10}$$

Теорема 2. Решение задачи 2* представимо в виде

$$\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = \sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + E(t) \int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))}{E(\tau)} R(t, \tau)\, d\tau \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) &= \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + \int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t)) R(t, \tau)\, d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau)) P(t, \tau)\, d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t} P(t, \tau) \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \xi, \gamma(\tau), \omega(\tau)) R(\tau, \xi)\, d\xi \right\} d\tau \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} u_i^{*(2)}(\mathrm{x}, t) &= u_i^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t} u_i^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), w(t)) R(t, \tau)\, d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t} u_i^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau)) P(t, \tau)\, d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t} P(t, \tau) \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} u_i^{(2)}(\mathrm{x}, \xi, \gamma(\tau) \omega(\tau)) R(\tau, \xi)\, d\xi \right\} d\tau \end{aligned} \tag{1.13}$$

Доказательство теоремы 1. Проверим, что функции $\sigma_{ij}^{*(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{*(1)}$, $u_i^{*(1)}$ удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2), (1.4) задачи ползучести в случае равенства нулю деформативных воздействий.

По определению упругомгновенного решения и в силу (1.8), напряжения $\sigma_{ij}^{*(1)}$ удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях.

Очевидно, при любом t деформации $\varepsilon_{ij}^{*(1)}$ связаны с $u_i^{*(1)}$ соотношениями Коши $\varepsilon_{ij}^{*(1)} = {}^1/_2 (u_{i,j}^{*(1)} + u_{j,i}^{*(1)})$.

Так как $u_i^{(1)}$ удовлетворяют однородным граничным условиям на S_2, S_3 и S_4, из (1.10) следует, что этим же условиям удовлетворяют функции $u_i^{*(1)}$.

Проверим закон ползучести (1.2). Подставим в (1.9) выражение для $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ из (1.6); принимая во внимание, что $\varepsilon_{ij}^{\circ} = 0$, получим с учетом (1.8)

$$\varepsilon_{ij}^{*(1)}(\mathrm{x}, \tau) = (1 + \nu)(I + L)\left(\frac{\sigma_{ij}^{*(1)}}{E}\right) - \nu\delta_{ij}(I + L)\left(\frac{\sigma_{kk}^{*(1)}}{E}\right)$$

Это совпадает с первым уравнением в (1.2), что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Проверим, что функции $\sigma_{ij}^{*(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{*(2)}$, $u_i^{*(2)}$ удовлетворяют уравнениям (1.1), (1.2), (1.4) задачи ползучести в случае равенства нулю силовых воздействий.

Подставим $\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t)$ при произвольном t и произвольном $\mathrm{x} \in \Omega(t)$ в уравнения равновесия, получим

$$\sigma_{ij,j}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = \sigma_{ij,j}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + E(t)\int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij,j}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))}{E(\tau)} R(t, \tau)\, d\tau \tag{1.14}$$

На основе определения упругомгновенного решения правая часть в (1.14) равна нулю.

Проверим выполнение краевых условий в напряжениях. На подвижном контуре $\gamma^{\pm}(t)$ и подвижной границе $S_\omega(t)$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) n_j &= \sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) n_j + \\ &+ E(t)\int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))\, n_j}{E(\tau)} R(t, \tau)\, d\tau \\ &\mathrm{x} \in \gamma^{\pm}(t), \quad \mathrm{x} \in S_\omega(t)\end{aligned} \tag{1.15}$$

Упругомгновенные решения удовлетворяют условиям $\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))n_j = 0$, $\mathrm{x} \in \gamma^{\pm}(t)$, $\mathrm{x} \in S_\omega(t)$, $\tau \leqslant t$, поэтому правая часть (1.15) равна нулю. Следовательно, $\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t)n_j = 0$, $\mathrm{x} \in \gamma^{\pm}(t)$; $\mathrm{x} \in S_\omega(t)$. Аналогично проверяются краевые условия в напряжениях на S_1, S_3, S_4.

Проверим, что перемещения $u_i^{*(2)}$ удовлетворяют краевым условиям на части границы S_2 (проверка краевых условий в перемещениях на S_3, S_4 производится аналогично).

Так как $u_i^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t)) = U_i(\mathrm{x}, \tau)$ при $\mathrm{x} \in S_2$, из (1.13) получим, что при $\mathrm{x} \in S_2$

$$\begin{aligned}u_i^{*(2)}(\mathrm{x}, t) &= U_i(\mathrm{x}, t) + \int_{\tau_0}^{t} U_i(\mathrm{x}, \tau) R(t, \tau)\, d\tau + \int_{\tau_0}^{t} U_i'(\mathrm{x}, \tau) P(t, \tau)\, d\tau + \\ &+ \int_{\tau_0}^{t} P(t, \tau)\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} U_i(\mathrm{x}, \xi) R(\tau, \xi)\, d\xi\right\} d\tau = U_i(\mathrm{x}, t)\end{aligned} \tag{1.16}$$

Последнее равенство следует из тождества

$$(1.17)\qquad \int_{\tau_0}^{t} R(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{\tau_0}^{t} P(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{\tau_0}^{t} P(t,\tau)\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} R(\tau,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\right\}d\tau = 0$$

вытекающего из (1.3) и справедливого для любой функции $\varphi(\tau)$, заданной при $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant t$, в силу чего сумма интегральных членов в (1.16) равна нулю.

Уравнения Коши выполняются в силу того, что $\varepsilon_{ij}^{*(2)}$ и $u_i^{*(2)}$ выражаются через $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ и $u_i^{(2)}$ соответственно посредством одного и того же интегрального оператора.

Проверим закон ползучести, т. е. покажем, что

$$(1.18)\qquad \varepsilon_{ij}^{*(2)}(\mathbf{x},\tau) = (1+\nu)(I+L)\left(\frac{\sigma_{ij}^{*(2)}}{E}\right) - \nu\delta_{ij}(I+L)\left(\frac{\sigma_{kk}^{*(2)}}{E}\right) + \varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{x},\tau)$$

В задаче 2 обратим закон мгновенной упругости (1.6)

$$(1.19)\qquad \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(t),\omega(t)) = \frac{E(\tau)}{1+\nu}\Big\{[\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(t),\omega(t)) - \varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{x},\tau)] + \delta_{ij}\frac{\nu}{1-2\nu}[\varepsilon_{kk}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(t),\omega(t)) - \overset{\circ}{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x},\tau)]\Big\}$$

Подставляя (1.19) в (1.11), получим

$$(1.20)\qquad \frac{\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathbf{x},t)}{E(t)} = \frac{1}{1+\nu}\Big\{[\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x},t,\gamma(t),\omega(t)) - \varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{x},t)] + \int_{\tau_0}^{t}[\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(\tau),\omega(\tau)) - \varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{x},\tau)]\,R(t,\tau)\,d\tau\Big\} +$$
$$+ \delta_{ij}\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Big\{[\varepsilon_{kk}^{(2)}(\mathbf{x},t,\gamma(t),\omega(t)) - \overset{\circ}{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x},t)] + \int_{\tau_0}^{t}[\varepsilon_{kk}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(\tau),\omega(\tau)) - \overset{\circ}{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x},\tau)]\,R(t,\tau)\,d\tau\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{1+\nu}\int_{\tau_0}^{t}\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(t),\omega(t))\,R(t,\tau)\,d\tau + \delta_{ij}\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_{\tau_0}^{t}\varepsilon_{kk}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(t),\omega(t))\,R(t,\tau)\,d\tau -$$
$$- \frac{1}{1+\nu}\int_{\tau_0}^{t}\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(\tau),\omega(\tau))\,R(t,\tau)\,d\tau - \delta_{ij}\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\int_{\tau_0}^{t}\varepsilon_{kk}^{(2)}(\mathbf{x},\tau,\gamma(\tau),\omega(\tau))\,R(t,\tau)\,d\tau$$

Если закон (1.18) имеет место, то подстановка (1.20) в (1.18) (в формуле (1.18) нужно предварительно заменить τ на t и ξ на τ) должна дать

(1.12). Так как

$$K(M(\varphi)) = M(K(\varphi)) = \varphi$$
$$K\varphi \equiv (I + L)\varphi, \quad M\varphi \equiv (I + N)\varphi$$

то подстановка первых двух слагаемых в правой части формулы (1.20) (выражений с фигурными скобками) в формулу (1.18) дает выражение

$$\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) - \varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{x}, t)$$

С учетом (1.19) и (1.6) третье и четвертое слагаемые в (1.20) дают члены вида

$$\int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t)) R(t, \tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_{\tau_0}^{t} P(t, \tau)\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \xi, \gamma(\tau), \omega(\tau)) R(\tau, \xi)\, d\xi\right\} d\tau$$

а пятое и шестое слагаемые

$$-\int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau)) R(t, \tau)\, d\tau -$$
$$-\int_{\tau_0}^{t} P(t, \tau)\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \xi, \gamma(\xi), \omega(\xi)) R(\tau, \xi)\, d\xi\right\} d\tau =$$
$$= \int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau)) P(t, \tau)\, d\tau$$

При выводе последнего выражения использовано тождество (1.17).

Суммирование полученных выражений вместе со слагаемым $\varepsilon_{ij}^{\circ}(\mathbf{x}, t)$ дает правую часть (1.12), что и требовалось доказать.

2. Рассмотрим теперь вариант, в котором на берегах растущего разреза и границе полости $\omega(\tau)$ заданы перемещения. В этом случае, кроме уравнений (1.1) и (1.2), должны выполняться условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{U}^{\pm}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in \gamma^{\pm}(\tau) \tag{2.1}$$
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in S_{\omega}(\tau)$$

Решение задачи ползучести по-прежнему обозначим через u_i^*, ε_{ij}^*, σ_{ij}^*.

Задачей 1* назовем задачу (1.1), (2.1), (1.2) при равных нулю деформативных воздействиях: $\varepsilon_{ij}^{\circ} = 0$ в Ω, $\mathbf{U} = 0$ на S_2.

$$U_n = 0 \text{ на } S_3, \mathbf{U}_\tau = 0 \text{ на } S_4, \mathbf{U}^{\pm} = 0 \text{ на } \gamma^{\pm}(\tau), \mathbf{U} = 0 \text{ на } S_{\omega}(\tau)$$

задачей 2* назовем задачу (1.1), (2.1), (1.2) при равных нулю внешних силах. Решение упругомгновенной задачи 1, соответствующей задаче 1*, обозначим через $u_i^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))$, $\sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))$. Оно должно удовлетворять уравнениям (1.1) и (1.6) при нулевых деформативных воздействиях и условиям на разрезе и границе полости

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma^{\pm}(t); \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{\omega}(t)$$

Решение упругомгновенной задачи 2, соответствующей задаче 2*, обозначим через $u_i^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))$, $\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))$. Оно должно удовлетворять уравнениям (1.1), (1.6) и (2.1) при равных нулю внешних силах.

Очевидно, по-прежнему справедливо представление (1.5).

Теорема 3. Решение задачи 1* представимо в виде

$$\sigma_{ij}^{*(1)}(\mathrm{x}, t) = \sigma_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + E(t)\int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))}{E(\tau)} \times$$
$$\times P(t, \tau)\,d\tau + E(t)\int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))}{E(\tau)} R(t, \tau)\,d\tau +$$
$$+ E(t)\int_{\tau_0}^{t} R(t, \tau)\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\sigma_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \xi, \gamma(\tau), \omega(\tau))}{E(\xi)} P(\tau, \xi)\,d\xi\right\}d\tau \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{ij}^{*(1)}(\mathrm{x}, t) = \varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + \int_{\tau_0}^{t} \varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))\,P(t, \tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

$$u_i^{*(1)}(\mathrm{x}, t) = u_i^{(1)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + \int_{\tau_0}^{t} u_i^{(1)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(t), \omega(t))\,P(t, \tau)\,d\tau \tag{2.4}$$

Теорема 4. Решение задачи 2* представимо в виде

$$\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = \sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + E(t)\int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))}{E(\tau)} R(t, \tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)), \quad u_i^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = u_i^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) \tag{2.6}$$

Доказательство теорем 3 и 4 полностью аналогично доказательству теорем 2 и 1 и здесь не приводится.

Замечания. 1°. В случае неподвижных разреза и полости (т. е. при $\gamma(\tau) \equiv \gamma(t) \equiv \gamma(t_0)$, $\omega(\tau) \equiv \omega(t) \equiv \omega(t_1)$) представления (1.8) — (1.10) и (2.5), (2.6), очевидно, совпадают с известными представлениями, следующими из первой и второй теорем Н. Х. Арутюняна [1-4]. В известные представления, следующие из второй и первой теорем Н. Х. Арутюняна [1-4], переходят и представления (1.11) — (1.13) и (2.2) — (2.4). Последнее следует из тождества (1.17), аннулирующего для случая неподвижных разрезов и полостей интегральные члены в (1.12), (1.13) и (2.2).

2°. При $E(t) \equiv E = \mathrm{const}$, $P(t, \tau) \equiv P(t - \tau)$, $R(t, \tau) \equiv R(t - \tau)$ приведенные выше результаты переходят в зависимости для изотропного наследственно-упругого или вязкоупругого тела с постоянным коэффициентом Пуассона.

3°. Основным результатом статьи являются теоремы 2 и 3. Представления (1.11)—(1.13) и (2.2)— (2.4) показывают, что в этих случаях принцип Вольтерра [6] несправедлив. Действительно, формальное применение принципа Вольтерра к условиям теоремы 2 приводит к зависимостям

$$\sigma_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = \sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)) + E(t)\int_{\tau_0}^{t} \frac{\sigma_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, \tau, \gamma(\tau), \omega(\tau))}{E(\tau)} R(t, \tau)\,d\tau$$

$$\varepsilon_{ij}^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = \varepsilon_{ij}^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t)), \quad u_i^{*(2)}(\mathrm{x}, t) = u_i^{(2)}(\mathrm{x}, t, \gamma(t), \omega(t))$$

что совпадает с (1.11) — (1.13) лишь в случае неподвижных разрезов и полостей. Аналогичный результат получается для условий теоремы 3. Что касается представлений (1.8) — (1.10) и (2.5), (2.6) (теоремы 1 и 4), то они могут быть получены формальным применением принципа Вольтерра. И, напротив, доказательство представлений (1.8) — (1.10) и (2.5), (2.6) можно рассматривать как доказательство применимости указанного принципа для условий теорем 1 и 4. Отметим, что для растущего разреза в изотропном вязкоупругом теле теоремы 1 и 4 сформулированы в [7] (теорема 1 при дополнительном допущении об односвязности рассматриваемой области).

4°. Теоремы 1—4 позволяют выражать асимптотику решения задачи ползучести в окрестности квазистатически движущегося разреза через известную асимптотику [8] решения упругой задачи.

5°. На основе известных теорем существования и единственности решения задач теории упругости [9–11] конструктивные представления решения задачи ползучести через решения задач упругости, полученные в теоремах [1–4], позволяют доказать существования и единственность решения задачи ползучести для тел с развивающимися разрезами и полостями.

Поступила 11 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Докл. АН АрмССР, 1947, т. 7, № 5.
2. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
3. *Харлаб В. Д.* К общей линейной теории ползучести. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1961, т. 68.
4. *Трапезников Л. П., Шойхет Б. А.* Применение вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно к доказательству некоторых теорем линейной теории ползучести. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1975, т. 109.
5. *Трапезников Л. П., Шойхет Б. А.* О решении задачи теории ползучести для стареющих тел с растущим разрезом. Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 1.
6. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
9. *Friedrichs K. O.* On boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. Math., 1947, vol. 48, No. 2.
10. *Эйдус Д. М.* О смешанной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1951, т. 76, № 2.
11. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 1.