Прикладная математика и механика. Том 42, 1978

УДК 539.3

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В. П. Баран, Д. В. Грилицкий, Р. И. Мокрик

(Львов)

Предлагается в динамических задачах термоупругости использовать в качестве условий излучения принцип причинности. Из анализа основных математических моделей, описывающих термоупругое поведение сплошной среды и применяемых при решении конкретных задач, следует, что некоторые из них будут давать физически неосуществимые решения. Для устранения возникающей неоднозначности решения возможен подход, имеющий ясный физический смысл и основанный на принципе причинности [1,2]: требуется, чтобы временный источник не давал отклика раньше времени пуска источника. В задачах термоупругости известны различные виды условий излучения типа Зоммерфельда [3–6].

В данной работе для выделения единственного решения в динамических задачах термоупругости предлагается использовать принцип причинности, эквивалентный требованию аналитичности решения в верхней половине комплексной плоскости частот, изучаются аналитические свойства решений основных краевых задач для наиболее часто применяемых моделей термоупругих сред и делаются выводы о их физической осуществимости.

Фундаментальные уравнения обобщенной динамической связанной задачи при отсутствии массовых сил и источников тепла имеют вид [7]

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \beta\,\mathrm{grad}\,t - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\tau^2} = 0 \tag{1}$$

$$\Delta t - \frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial\tau} - \frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\tau^2} - \eta\,\mathrm{div}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} - \eta\tau_r\,\mathrm{div}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial\tau^2} = 0$$

Здесь использованы обозначения работы [7].

Если выражения для перемещений и температуры представить в виде

$$\mathbf{u}(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}_F(x,\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$t(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T_F(x,\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega$$

то $\mathbf{U}_F(x,\omega)$ и $T_F(x,\omega)$ будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\mu\Delta\mathbf{U}_F + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}_F - \beta\,\mathrm{grad}\,T_F + \rho\omega^2\mathbf{U}_F = 0 \tag{2}$$

$$\Delta T_F + \left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)T_F + \eta(1 - i\omega\tau_r)\,i\omega\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}_F = 0$$

Для системы (2), так же как и в работе [3], можно показать, что ее регулярное решение допускает в области регулярности представление

$$\mathbf{U}_F = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$$
$$(\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)\mathbf{U}_1 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{U}_1 = 0$$
$$(\Delta + \lambda_3^2)\mathbf{U}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_2 = 0$$
$$(\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)T_F = 0$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} + i\omega\left(\frac{1}{a} - \frac{i\omega}{c_q^2}\right) + \frac{i\omega(1 - i\omega\tau_r)}{\lambda + 2\mu}\eta\beta$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2 = i\omega\frac{\omega^2}{c_1^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{i\omega}{c_q^2}\right), \quad \lambda_3^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}$$

Исследование показывает, что $\lambda_k(s)$ ($k = 1, 2, 3$; $-s = i\omega$) — аналитические функции параметра s при $\operatorname{Re} s > 0$, если выполняется условие

$$c_1^2 \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2} c_q^2, \quad \varepsilon = \frac{a\eta\beta}{\lambda + 2\mu} \tag{3}$$

Если σ — показатель экспоненциального роста по времени первоначальных данных задачи и их требуемых производных равен нулю и выполняется неравенство (3), то (см. [8], гл. X) единственное решение краевой задачи (S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая конечную область)

$$\mu\Delta\mathbf{U}_L + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_L - \beta\operatorname{grad}T_L - \rho s^2\mathbf{U}_L = \mathbf{f}_1(x, s) \tag{4}$$
$$\Delta T_L - \left(\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c_q^2}\right)T_L - \eta(1 + s\tau_r)s\operatorname{div}\mathbf{U}_L = f_2(x, s)$$
$$\mathbf{U}_L\Big|_S = \mathbf{F}_1(x, s), \quad T_L\Big|_S = F_2(x, s)$$
$$\mathbf{U}_L(x, s) = \int_0^\infty \mathbf{u}(x, \tau)e^{-s\tau}d\tau, \quad T_L(x, s) = \int_0^\infty t(x, \tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Здесь $\mathbf{U}_L(x, s)$, $T_L(x, s)$ — аналитические функции при $\operatorname{Re} s > 0$. Утверждение, что $\mathbf{U}_L(x, s)$ — функция, регулярная при $\operatorname{Re} s > 0$, эквивалентно утверждению, что соответствующее преобразование Фурье $\mathbf{U}_F(x, \omega)$ регулярно при $\operatorname{Im} \omega > 0$. Теорема единственности для обобщенной динамической связанной задачи термоупругости доказана в работе [9].

В случае, когда $\varepsilon = 0$, в (4) происходит разделение полей деформации и температуры. Тогда для аналитичности соответствующего решения обобщенной динамической несвязанной задачи в верхней полуплоскости комплексной плоскости частот необходимо выполнение неравенства

$$c_1 \geqslant c_q \tag{5}$$

В классическом случае задача (1) переходит в динамическую связанную задачу. Исследование аналитических свойств единственного решения краевой задачи, получающейся из задачи (4) при $c_q = \infty$, $\tau_r = 0$, проведено в работе [8]. Показано, что если показатель экспоненциального роста по времени первоначальных данных задачи равен нулю, то решение аналитично при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, или, что то же самое, $\mathbf{U}_F$ и T_F аналитичны при $\operatorname{Im}\omega > \sigma_0$, где

(6) $$\sigma_0 = \max\{c_1^2 a^{-1}(1-\varepsilon),\ 0\}$$

Поэтому необходимый критерий аналитичности принципа причинности выполняется только при условии $\varepsilon \geqslant 1$. Так, при $\varepsilon = 0$, когда происходит разделение полей деформаций и температуры, решение динамической несвязанной задачи уже не будет аналитической функцией при $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Пренебрежение инерционными членами в (1) приводит к обобщенной квазистатической связанной задаче, которую запишем в пространстве изображений Фурье по времени

(7) $$\mu\Delta\mathbf{U}_F + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}_F - \beta\operatorname{grad}T_F = 0$$
$$\Delta T_F + \left(\frac{i\omega}{a} + \frac{\omega^2}{c_q^2}\right)T_F + \eta(1 - i\omega\tau_r)\, i\omega\operatorname{div}\mathbf{U}_F = 0$$

Решение задачи (7) представим в виде
$$\mathbf{U}_F = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_3$$

Здесь $\mathbf{U}_1$ — решение бестемпературной силовой статической задачи с заданными граничными условиями, которое, очевидно, удовлетворяет принципу причинности; $U_2 = \operatorname{grad}\Phi_F$ — частное решение первого уравнения (7), а $\mathbf{U}_3$ — решение, введенное для того, чтобы совместно с решением $\mathbf{U}_2$ удовлетворить нулевым граничным условиям.

Для Φ_F получаем уравнение
$$\Delta\Phi_F = kT_F, \quad k = \frac{\beta}{\lambda+2\mu}$$

Тогда из второго уравнения (6) следует уравнение для определения T_F

(8) $$\Delta T_F + (i\omega M + \omega^2 N)T_F = 0$$
$$M = a^{-1} + \eta k, \quad N = c_q^{-2} + \tau_r\eta k$$

причем

(9) $$\Phi_F = -\frac{k}{i\omega M + \omega^2 N}T_F$$

Известно, что решение уравнения Гельмгольца, которому удовлетворяет T_F для основных граничных задач,— аналитическая функция параметра ω при $\operatorname{Im}\omega > 0$. Тогда из (9) следует, что и Φ_F — аналитическая функция в верхней полуплоскости комплексной плоскости частот. Операции, которые необходимо выполнить с функцией Φ_F для получения напряжений и перемещений, приводят также к функциям с указанным свойством аналитичности. Перемещения или напряжения, выражающиеся через функцию $\mathbf{U}_3$, компенсируют на границе области S напряжения или перемещения, выражающиеся через потенциал Φ_F. Следовательно, граничные условия для $\mathbf{u}_3$ при $\tau < 0$ нулевые. Использование теоремы единственности приводит к выводу, что $\mathbf{u}_3 \equiv 0$ при $\tau < 0$. Тогда $\mathbf{u} \equiv 0$ до момента начала действия возмущения.

Этот вывод остается справедливым и для частных случаев задачи (7): $\eta = 0$ — обобщенная квазистатическая несвязанная задача; $c_q = \infty$,

$\tau_r = 0$ — квазистатическая связанная задача; $c_q = \infty$, $\tau_r = 0$, $\eta = 0$ — квазистатическая несвязанная задача.

Для того чтобы лучше уяснить дальнейшие рассуждения и связать их с уже известными фактами, рассмотрим один известный пример из физики, детально рассмотренный в работе [10]. Уравнение движения для смещения $\mathbf{x}_j$ j-го электрона под действием поля падающей волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega\tau}$, имеет вид

$$m\left(\frac{d^2\mathbf{x}_j}{d\tau^2} + 2\gamma_j\frac{d\mathbf{x}_j}{d\tau} + \omega_j^2\mathbf{x}_j\right) = e\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega\tau}, \quad \gamma_j > 0 \tag{10}$$

где второе слагаемое в скобках характеризует затухание, обусловленное столкновением и излучением, а ω_j — частота собственных колебаний.

Решение уравнения (10), аналитическое при $\operatorname{Im}\omega > 0$, имеет вид

$$\mathbf{x}_j = \frac{e\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega\tau}}{m(\omega_j^2 - 2i\gamma_j\omega - \omega^2)} \tag{11}$$

Если тормозящее действие, оказываемое на электрон, обусловливается только излучением, то, согласно Лоренцу, член, характеризующий затухание в (10), можно заменить реакцией излучения — $\beta_j d^3\mathbf{x}_j / d\tau^3$. Это приводит к замене в выражении (11) члена — $2i\gamma_j\omega$ на $-i\beta_j\omega^3$. Получающееся выражение уже не удовлетворяет принципу причинности, поскольку в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\omega > 0$ имеется полюс $\omega \approx \approx i / \beta_j$ $(1 / \beta_j \gg \omega_j)$. Учитывая это, сделан вывод, что уточнение Лоренца неоправданно.

Подобные затруднения встречаются и в динамических задачах термоупругости. Решением уравнения Ляме без температурного члена являются функции, удовлетворяющие принципу причинности, что следует из аналитических свойств решений соответствующей эллиптической задачи [8]. Решение краевых задач для диффузионного вида уравнения теплопроводности (вытекающего из закона Фурье), дающего достаточно точное описание температурного поля, кроме коротких промежутков времени, тоже не нарушает принципа причинности. Поскольку температура будет иметь бесконечную скорость распространения, то градиент температуры, а следовательно, и величина, пропорциональная градиенту ($-\beta \operatorname{grad} t$), будет иметь бесконечную скорость распространения. Попытка уточнить уравнения Ляме, учитывающих конечную скорость распространения волн сжатия и сдвига, путем присоединения к ним параболического уравнения теплопроводности и добавлением к уравнениям Ляме слагаемого — $\beta \operatorname{grad} t$ (система (1) при $c_q = \infty$, $\tau_r = 0$, $\eta = 0$) приводит к уже упоминавшемуся неприемлемому свойству: решение этой задачи не будет удовлетворять принципу причинности.

Некоторые улучшения наблюдаются при введении в уравнение теплопроводности члена, учитывающего механическую связь

$$-\frac{\beta t_0}{\lambda_t}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{12}$$

(динамическая связанная задача). Все же эти улучшения недостаточны для удовлетворения принципа причинности, поскольку значение ε заключается в интервале (0, 1) и для большинства реальных тел значительно меньше единицы [11,12]. Поэтому значения ε не приводят к равенству $\sigma_0 = 0$ (см. выражение (6)), т. е. к аналитичности решений в верхней полуплоскости комплексного переменного ω.

Если к статическому уравнению Ляме с добавленным членом $-\beta \operatorname{grad} t$, которое можно интерпретировать как динамическое уравнение Ляме с бесконечной скоростью распространения волн сжатия и сдвига, присоединить уравнение теплопроводности с бесконечной скоростью распространения тепла с учетом члена механической связи или без него, то полученная квазистатическая задача будет описывать поведение термоупругой среды, уже не нарушая принципа причинности.

Поле деформаций в теле можно представить в виде суммы потенциального и вихревого поля. Тогда с температурой будет связана лишь только потенциальная составляющая поля. Учитывая предыдущие рассуждения, можно предвидеть, что математическая модель среды, учитывающая конечную скорость волн сдвига и бесконечную скорость распространения волн сжатия и температуры

$$\Delta\varphi - kt = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\tau^2} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0 \tag{13}$$

$$\Delta t - M\frac{\partial t}{\partial\tau} = 0, \quad \mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}$$

тоже не будет нарушать принципа причинности. Действительно, рассуждая так же, как в случае квазистатической задачи, получаем, что решение краевой задачи для уравнений (13) в пространстве изображений Фурье по времени будет аналитической функцией параметра ω при $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Задачу (13) назовем квазидинамической связанной задачей. Очевидно, что указанное свойство аналитичности сохраняется и для квазидинамической несвязанной задачи, когда член механической связи в уравнении теплопроводности не учитывается, т. е. при $M = 1 / a$.

Если учитывать, что тепловой поток зависит не только от температурного градиента, но и от его предыстории, то получаем видоизмененный закон Фурье

$$\mathbf{q} + \tau_r\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{q} = -\lambda_t \operatorname{grad} t$$

фактически записанный Максвеллом уже в 1867 г. [13]. Этот закон приводит к гиперболическому уравнению теплопроводности, что соответствует конечной скорости распространения тепла, равной $c_q = \sqrt{a / \tau_r}$. Условие выполнения принципа причинности для динамической связанной задачи термоупругости, когда учитывается конечная скорость распространения тепла (второй звук), дается выражением (3). Но в [7] отмечено, что экспериментальные данные тепловых пульсаций свидетельствуют об опережении акустического волнового фронта над тепловым, т. е. для реального тела имеет место более сильное неравенство, чем необходимое (3) или (5), $c_1 > c_q$.

Тогда получаем, что принцип причинности выполняется как для обобщенной динамической связанной задачи, так и для несвязанной.

Подводя итог, заключаем, что принцип причинности выполняется для следующих задач: обобщенной динамической связанной и несвязанной задач, обобщенной квазидинамической связанной и несвязанной задач, обобщенной квазистатической связанной и несвязанной задач, квазистатической связанной и несвязанной задач и не выполняется для динамической связанной и динамической несвязанной задач.

Следовательно, если в уравнениях термоупругости величина скорости распространения тепла больше, чем соответствующая ей скорость распространения волн сжатия, решение соответствующей краевой задачи, кроме обобщенной динамической связанной задачи, перестает отображать поведение реального термоупругого тела даже в рамках тех неточностей, которые непосредственно следуют из физических допущений. Данная задача может применяться для описания термоупругого поведения сред, для которых скорость распространения тепла незначительно превышает скорость распространения волн сжатия (если такие среды существуют).

При решении конкретных задач динамической термоупругости с использованием интегральных преобразований Фурье по времени и Ханкеля или Фурье по пространственным координатам будут возникать неопределенности при выборе направления разреза и направления обхода особых точек на действительной оси, так же как в случае динамических задач теории упругости [14]. Использование с этой целью принципа причинности ничем не отличается от его применения в динамических задачах теории упругости, рассмотренной в работе [2].

Поступила 25 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Мокрик Р. И., Баран В. П.* Об условии излучения в динамических задачах теории упругости. Доп. АН УССР. Сер. А, 1977, № 8.
3. *Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В.* Граничные задачи термоупругости. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 1.
4. *Ignaczak J., Nowacki W.* The Sommerfeld radiation conditions for coupled problems of thermoelasticity examples of coupled stress and temperature concentration at cylindrical and spherical cavities. Arch. mech. stosowej, 1962, t. 14, N1.
5. *Новацкий В.* Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости. Механика. Сб. перев. М., 1966, № 6.
6. *Roznowski T.* Radiation conditions of Sommerfeld type for coupled thermoelasticity. Bull. Acad. polon. sci Cl IV, 1971, vol. 19, No. 7—8.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. Киев, «Наукова думка», 1976.
8. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., «Наука», 1976.
9. *Green A. E.* A note on linear thermoelasticity. Mathematika, 1972, vol. 19, No. 1.
10. *Rohrlich F.* Classical charged particles. Reading Massachusets, Addison — Wesley, 1965.
11. *Nowacki W.* On some problems of thermoelasticity. Problems of continuum mechanics. Philadelfia, 1961.
12. *Nowacki W.* Dynamiczne zagadnienia termosprezystosci. Warszawa, PWN, 1966. (Рус. перев.: М., «Мир», 1970.)
13. *Bargmann H.* Recent developments in the field of thermally induced waves and vibrations. Nuclear Engng and Design, 1974, vol. 27, No. 3.
14. *Бабешко В. А.* К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.